

Układy odniesienia: od karuzeli do Einsteina

Prawa Newtona obowiązują tylko w układach inercjalnych. Na karuzeli czy w hamującym autobusie trzeba dopisać siły bezwładności. Einstein zażądał więcej: wszystkie układy inercjalne mają być równoprawne także dla światła. Z tego jednego żądania wynika, że ruchome zegary chodzą wolniej, ruchome pręty są krótsze, jednoczesność zależy od obserwatora, a masa jest formą energii.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, rozdz. 12.5, 15,
16, 17

W TYM DZIALE

- 0 Prolog: miony, które nie powinny dolecieć
- 1 Układy odniesienia i siły bezwładności
- 2 Zasada względności i stała prędkość światła
- 3 Transformacja Lorentza i jej skutki
- 4 Czasoprzestrzeń, interwał i paradoks bliźniąt
- 5 Pęd, energia i
$$E = mc^2$$
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: miony, które nie powinny dolecieć

Promieniowanie kosmiczne uderza w górne warstwy atmosfery i na wysokości ok. 15 km wytwarza miony: cząstki podobne do elektronu, ale ok. 200 razy cięższe. Mion jest nietrwały. W spoczynku żyje średnio $\tau = 2,2 \mu\text{s}$, po czym rozpada się na elektron i neutrino. Nawet lecąc prawie z prędkością światła, przebyłby w tym czasie średnio $c\tau \approx 660 \text{ m}$. Do powierzchni Ziemi ma 15 km, czyli ponad 22 takie odcinki. Bez żadnych poprawek dolatywałby jeden mion na ok. 10^{10} . (FLP I-15-4)

Tymczasem przez każdy metr kwadratowy powierzchni Ziemi przelatuje ok. 170 mionów na sekundę, a liczniki na szczytach gór i na poziomie morza rejestrują liczby niewiele się różniące. Coś jest nie tak z rachunkiem. Szczególna teoria względności mówi, co: zegar mionu lecącego z prędkością $0,998 c$ chodzi, z naszego punktu widzenia, ok. 16 razy wolniej. Mion „przeżywa” tylko 3 mikrosekundy z 50, które w naszym układzie trwa jego lot. Z punktu widzenia mionu wyjaśnienie jest inne, ale liczby te same: to atmosfera pędzi na niego i jest 16 razy cieńsza (przykład 7.3).

Zanim dojdziemy do Einsteina, wróćmy do pytania, które zostawił dział 1 „Ruch i jego przyczyny”: w jakim układzie odniesienia obowiązują prawa Newtona i co się dzieje, gdy obserwator przyspiesza lub się obraca.

Pytanie na start. *Lecisz statkiem z prędkością $0,9 c$ i świecisz latarką do przodu. Z jaką prędkością światło oddala się od ciebie? A jaką zmierzy obserwator na Ziemi? Odpowiedź w części 2.*

Układy odniesienia i siły bezwładności

1.1 Zasada względności Galileusza

Galileusz zauważył, że w kabinie statku płynącego równo po spokojnym morzu wszystko dzieje się tak samo jak na lądzie: krople kapią pionowo, a rzucona piłka leci tak samo w każdą stronę. Nie ma doświadczenia mechanicznego, które wewnątrz kabiny wykryłoby jednostajny ruch statku. Jeśli układ S' porusza się względem S z prędkością v wzdłuż osi x , to współrzędne przelicza się transformacją Galileusza: (FLP I-15-1)

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Prędkości się odejmują ($u' = u - v$), ale przyspieszenia są takie same ($a' = a$), więc $F' = ma$ ma tę samą postać w obu układach. Układy, w których obowiązuje pierwsza zasada dynamiki, nazywamy **inercjalnymi**; każdy układ poruszający się względem inercjalnego jednostajnie i bez obrotu też jest inercjalny.

1.2 Układ przyspieszający: siła bezwładności

W autobusie, który hamuje z przyspieszeniem $\vec{a}_0$, pasażerowie lecą do przodu, choć nikt ich nie pcha. Obserwator na chodniku mówi: pasażer porusza się dalej ze stałą prędkością, to autobus zwalnia. Pasażer może jednak opisywać ruch we własnym układzie, jeśli dopisze do sił rzeczywistych **siłę bezwładności**: (FLP I-12-5)

PRAWO · SIŁA BEZWŁADNOŚCI W UKŁADZIE PRZYSPIESZAJĄCYM

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0.$$

$\vec{a}_0$ to przyspieszenie układu względem układu inercjalnego. Siła $-m\vec{a}_0$ nie pochodzi od żadnego ciała (nie ma pary w sensie trzeciej zasady), jest proporcjonalna do masy i nadaje każdemu ciału w układzie jednakowe przyspieszenie, zupełnie jak grawitacja.

Ostatnia uwaga jest głęboka. W zamkniętej windzie przyspieszającej w górę z przyspieszeniem g w pustym kosmosie wszystko dzieje się tak, jakby stała na Ziemi. W swobodnie spadającej windzie wszystko dzieje się tak, jakby grawitacji nie było: astronauta na stacji kosmicznej nie są poza zasięgiem ziemskiej grawitacji (działa na nich ok. 90% ziemskiego g), tylko razem ze stacją spadają. Einstein uczynił z tej obserwacji **zasadę równoważności** i punkt wyjścia ogólnej teorii względności. W tym dziale zostajemy przy układach inercjalnych.

1.3 Układ obracający się: siła odśrodkowa i siła Coriolisa

Ziemia się obraca, więc ściśle biorąc laboratorium na Ziemi nie jest układem inercjalnym. W układzie obracającym się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ trzeba dopisać dwie siły bezwładności:

(FLP I-19-4)

PRAWO · SIŁY BEZWŁADNOŚCI W UKŁADZIE OBRACAJĄCYM SIĘ

$$m\vec{a}' = \vec{F} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{odśrodkowa, } m\omega^2 r_{\perp} \text{ od osi}} - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolisa}}.$$

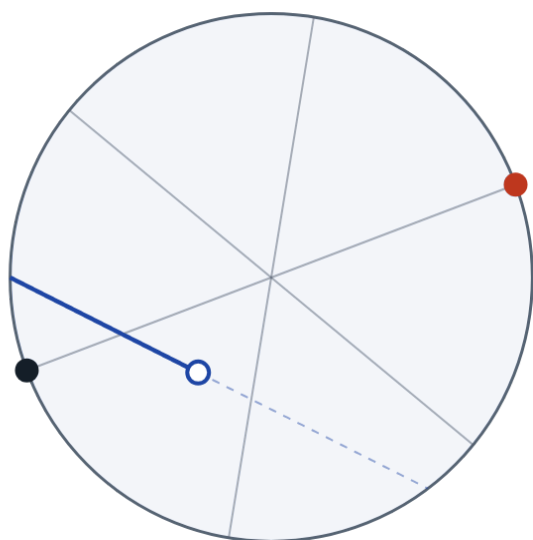
Siła odśrodkowa działa na każde ciało, także spoczywające, i jest skierowana od osi obrotu. Siła Coriolisa działa tylko na ciała, które poruszają się względem układu, prostopadle do ich prędkości $\vec{v}'$. Przy obrocie przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jak Ziemia oglądana znad bieguna północnego) odchyła ruch w prawo.

Przyspieszenie odśrodkowe na równiku to $\omega^2 R \approx 0,034 \text{ m/s}^2$, czyli 0,35% g (zadanie 1.3); to ona, razem z wywołanym nią spłaszczeniem Ziemi, sprawia, że na biegunie ważymy o ok. 0,5% więcej niż na równiku. Przyspieszenie Coriolisa jest jeszcze mniejsze ($2\omega v$, przy $v = 10 \text{ m/s}$ to ok.

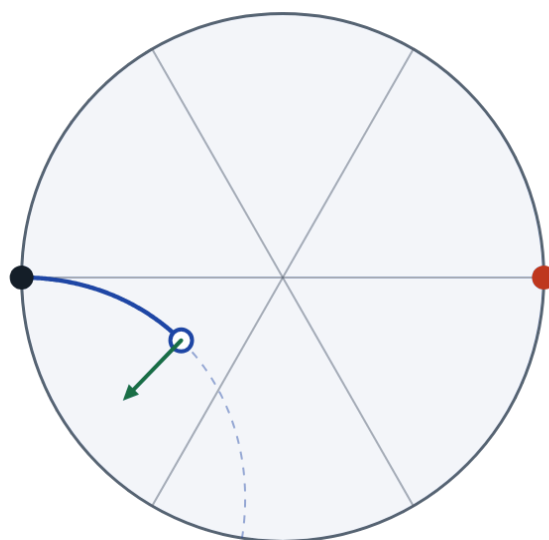
10^{-3} m/s^2), ale działa długo i na wielkich masach powietrza: dlatego niżej na półkuli północnej wirują przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Najbardziej przekonującym dowodem obrotu Ziemi jest **wahadło Foucaulta** (1851): płaszczyzna jego wahań obraca się względem podłogi, na szerokości λ z okresem $23,9 \text{ h} / \sin \lambda$.

SYMULACJA 1 Rzut przez karuzelę o promieniu 5 m. Rzucający celuje prosto w łapiącego po drugiej stronie. Lewy (na wąskim ekranie górny) panel: widok z nieruchomej kamery nad karuzelą; piłka leci po prostej, ale ukośnie, bo ma też prędkość obwodu. Drugi panel: ten sam ruch z kamery obracającej się z karuzelą; tor jest zakrzywiony, a zielona strzałka pokazuje przyspieszenie Coriolisa.

Widok z góry (układ inercyjny)



Widok z karuzeli (układ obracający się)



— tor piłki — rzucający — łapiący

prędkość obwodu ωR 3,00 m/s

czas lotu 1,33 s

chybienie (wzdłuż obwodu) 8,64 m

przyspieszenie Coriolisa na starcie $2\omega u$ 7,20 m/s²

W układzie inercyjnym piłka leci po prostej, ale ukosem, bo ma też prędkość obwodu ωR . Z karuzeli widać, jak skręca w prawo (zielona strzałka: przyspieszenie Coriolisa) i mija łapiącego o 8,6 m.

Stan na rysunku: promień 5 m, $\omega = 0,60 \text{ rad/s}$, $u = 6,0 \text{ m/s}$; lot 1,33 s, chybienie 8,64 m.

⚠️ PUŁAPKA · SIŁY BEZWŁADNOŚCI W UKŁADZIE INERCJALNYM

Siły odśrodkowej nie wolno dopisywać, gdy rozwiązujemy zadanie w układzie inercjalnym. Samochód na zakręcie wymaga siły *dośrodkowej* (tarcia opon), a w równaniu $\vec{F} = m\vec{a}$ zapisanym z punktu widzenia drogi siły odśrodkowej nie ma. Albo układ inercjalny i same siły rzeczywiste, albo układ obracający się i dodatkowe siły bezwładności. Mieszanie obu opisów daje błędne wyniki.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 W autobusie hamującym z opóźnieniem 3 m/s^2 wisi na sznurku ciężarek. O jaki kąt i w którą stronę odchyli się sznurek od pionu?
- 2 Człowiek o masie 70 kg stoi na wadze łazienkowej w windzie. Ile pokaże waga (w niutonach i w „kilogramach”), gdy winda przyspiesza w górę z przyspieszeniem 2 m/s^2 ? Gdy przyspiesza w dół z takim samym przyspieszeniem? Gdy spada swobodnie?
- 3 Oblicz prędkość kątową obrotu Ziemi (doba gwiazdowa trwa $23 \text{ h } 56 \text{ min}$) i przyspieszenie odśrodkowe na równiku. O ile niutonów mniej waży tam człowiek o masie 70 kg niż na biegunie (pomijając spłaszczenie Ziemi)?
- 4 Pociąg o masie 400 t jedzie z prędkością 300 km/h na szerokości 50°N . Jaka jest pozioma składowa siły Coriolisa i na którą szynę naciska? Jaką część ciężaru pociągu stanowi?
- 5 Oblicz, w jakim czasie płaszczyzna wahań wahadła Foucaulta obróci się o 360° w Warszawie ($52,2^\circ \text{N}$), na biegunie i na równiku.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Zasada względności i stała prędkość światła

W XIX w. Maxwell połączył elektryczność i magnetyzm w jedną teorię, z której wynikało, że światło jest falą elektromagnetyczną biegnącą z prędkością $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Względem czego? Fale dźwiękowe biegną względem powietrza, więc sądzono, że światło biegnie względem wypełniającego przestrzeń „eteru”. Ziemia krąży wokół Słońca z prędkością 30 km/s , więc w laboratorium powinien wiać „wiatr eteru”, a światło powinno biec szybciej w jedną stronę niż w drugą. FLP I-15-3

Michelson i Morley (1887) porównywali czasy biegu światła w dwóch prostopadłych ramionach interferometru, obracając go o 90° . Spodziewali się przesunięcia o ok. 0,4 prążka interferencyjnego (zadanie 2.4), zmierzili co najmniej dwadzieścia razy mniej, czyli zero w granicach błędu. Lorentz i FitzGerald zaproponowali, że ramię ustawione wzdłuż ruchu kurczy się akurat tyle, by zniwelować efekt. Einstein (1905) odwrócił rozumowanie i przyjął dwa postulaty:

🔧 PRAWO · POSTULATY SZCZEGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

1. **Zasada względności:** prawa fizyki (wszystkie, nie tylko mechaniki) mają tę samą postać we wszystkich układach inercjalnych.
2. **Stałość prędkości światła:** światło w próżni biegnie z prędkością c w każdym układzie inercjalnym, niezależnie od ruchu źródła.

Drugi postulat wynika właściwie z pierwszego, bo prędkość c wynika z równań Maxwella. Transformacja Galileusza nie może być poprawna: dawałaby $c' = c - v$.

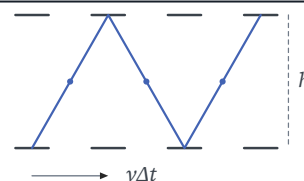
2.1 Zegar świetlny i dylatacja czasu

Najprostszy zegar: dwa lustra w odległości h i foton odbijający się między nimi. Jedno tyknięcie (tam i z powrotem) trwa $\Delta\tau = 2h/c$. Wstawmy taki zegar do pociągu jadącego z prędkością v , lustrami jedno nad drugim. Dla pasażera nic się nie zmienia. Obserwator na peronie widzi, że foton biegnie ukosem: w czasie $\Delta t/2$ przebywa w poziomie drogę $v\Delta t/2$, w pionie h , a jego prędkość to wciąż c (postulat 2). Z twierdzenia Pitagorasa: FLP I-15-4

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

🔧 WYNIK · DYLATACJA CZASU

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$



$\Delta\tau$ to **czas własny**: czas mierzony zegarem, który jest obecny przy obu zdarzeniach (tu: wysłanie i powrót fotonu). W każdym innym układzie te same zdarzenia dzieli dłuższy czas $\gamma\Delta\tau$. Zasada względności wymaga, by tak samo zwalniał każdy zegar w pociągu, także zegarek pasażera i jego tętno: inaczej pasażer mógłby wykryć ruch pociągu, porównując zegary.

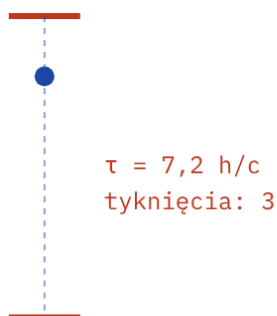
Uwaga na oznaczenie: w dziale 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe” litera γ oznaczała współczynnik tłumienia; tutaj, jak w lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza, to czynnik Lorentza. Kilka wartości warto znać: $\gamma(0,6) = 1,25$, $\gamma(0,8) =$

$5/3$, $\gamma(0,866) = 2$, $\gamma(0,99) \approx 7,1$. Dla małych prędkości $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$: samolot pasażerski ($\beta \approx 8 \cdot 10^{-7}$) ma $\gamma - 1 \approx 3,5 \cdot 10^{-13}$.

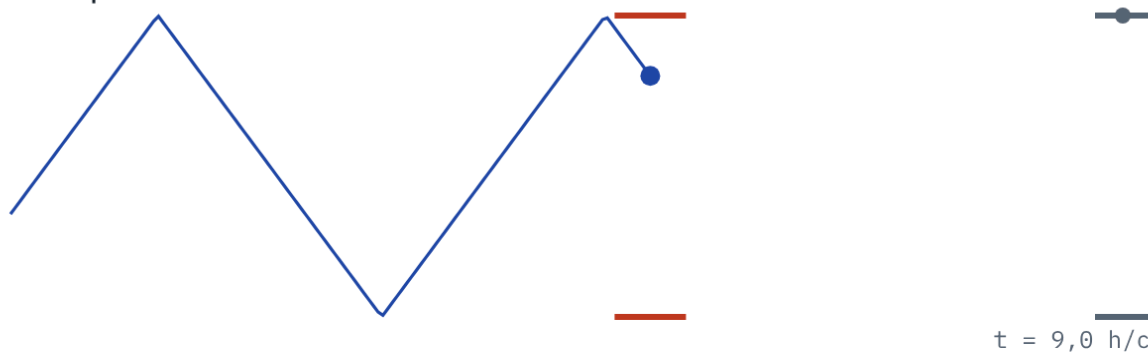
SYMULACJA 2

Zegar świetlny w pociągu. Górny panel: układ pociągu, foton biega pionowo. Dolny panel: układ peronu, foton biegnie ukosem, a obok stoi taki sam zegar w spoczynku. Jednostką czasu jest h/c . Zmieniaj prędkość pociągu i porównaj, ile razy tyknie każdy zegar.

W układzie pociągu



W układzie peronu



— foton — zegar w pociągu — zegar na peronie

czynnik γ 1,250

czas peronu t 9,0 h/c

czas zegara w pociągu $\tau = t/\gamma$ 7,2 h/c

droga fotonu w jednym tyknięciu (peron) 2,50 h

tyknięcia zegara na peronie 4

Z peronu foton biegnie ukosem i w jednym tyknięciu pokonuje drogę 2,50 h zamiast 2h. Ponieważ jego prędkość to wciąż c , tyknięcie trwa $\gamma = 1,25$ razy dłużej: ruchomy zegar chodzi wolniej.

Stan na rysunku: $\beta = 0,60$, $\gamma = 1,250$; czas peronu 9,0 h/c, zegar w pociągu 7,2 h/c.

SKĄD TO WIEMY?

W 1971 r. Hafele i Keating oblecieli Ziemię samolotami rejsowymi z zegarami atomowymi i porównali je z zegarami w obserwatorium: różnice wynosiły kilkadziesiąt do ponad dwustu nanosekund, zgodnie z przewidywaniem (łącznie z efektem grawitacyjnym); zegar lecący na wschód stracił czas, lecący na zachód zyskał. W 1977 r. w CERN miony krążące w pierścieniu z $\gamma \approx 29$ żyły średnio ok. $64 \mu\text{s}$ zamiast $2,2 \mu\text{s}$, zgodnie z teorią z dokładnością do ok. 0,1%. Dziś dylatację czasu trzeba uwzględniać w każdym odbiorniku GPS (zadanie feynmanowskie 1).

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Oblicz γ dla $\beta = 0,6; 0,8; 0,99$. Ile czasu upływa na Ziemi, gdy na zegarze statku mija 1 rok?

- 2 Przy jakiej prędkości ruchomy zegar chodzi dwa razy wolniej? A dziesięć razy wolniej?

- 3 Stacja kosmiczna krąży z prędkością $7,66 \text{ km/s}$. O ile mniej postarzeje się astronauta w ciągu pół roku na orbicie (licząc tylko efekt prędkości)?

- 4 Interferometr Michelsona ma ramiona o długości $L = 11 \text{ m}$ (dzięki wielokrotnym odbiciom). Zakładając eter i wiatr eteru $v = 30 \text{ km/s}$ wzdłuż jednego ramienia, oblicz różnicę czasów biegu w obu ramionach (do najniższego rzędu w β) i oczekiwane przesunięcie prążków przy obrocie o 90° dla $\lambda = 550 \text{ nm}$.

- 5 Na pytanie z prologu: statek leci z prędkością $0,9 c$ i świeci latarką do przodu. Z jaką prędkością światło oddala się od pasażera, a z jaką zmierzy je obserwator na Ziemi? Z jaką prędkością, według obserwatora na Ziemi, rośnie odległość między czołem impulsu a statkiem?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

3 Transformacja Lorentza i jej skutki

W lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza transformację Lorentza wzięliśmy jako gotowy wynik. Teraz wyprowadzimy ją z postulatów. Niech S' porusza się względem S z prędkością v wzdłuż osi x , a początki układów pokrywają się w chwili $t = t' = 0$.

FLP I-15-2

1. **Liniowość.** Ruch jednostajny w S musi być jednostajny w S' , więc wzory przejścia są liniowe.
2. **Początek S'** ($x' = 0$) to w S punkt $x = vt$. Zatem $x' = A(x - vt)$ dla pewnej stałej A .
3. **Symetria.** S porusza się względem S' z prędkością $-v$, a żaden układ nie jest wyróżniony (postulat 1): $x = A(x' + vt')$ z tym samym A .
4. **Światło.** Impuls wysłany z początku w chwili zero biegnie w S według $x = ct$, a w S' według $x' = ct'$ (postulat 2). Podstawiamy: $ct' = A(c - v)t$ i $ct = A(c + v)t'$. Mnożymy stronami: $c^2 = A^2(c^2 - v^2)$, więc $A = \gamma$.
5. **Czas.** Z $x = \gamma(x' + vt')$ i $x' = \gamma(x - vt)$ wyliczamy t' .

🔧 PRAWO · TRANSFORMACJA LORENTZA

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Odwrotna: zamiana $v \rightarrow -v$. Dla $v \ll c$ mamy $\gamma \approx 1$ i $vx/c^2 \approx 0$, więc wracamy do transformacji Galileusza. Przekształcenie w postaci macierzowej i jego interpretacja jako „obrotu hiperbolicznego” są w lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza.

Trzy skutki odczytujemy, przekształcając różnice współrzędnych dwóch zdarzeń: $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$, $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$.

3.1 Względność jednoczesności

Dwa zdarzenia jednoczesne w S ($\Delta t = 0$), odległe o Δx , w S' dzieli czas $\Delta t' = -\gamma v\Delta x/c^2$.

Klasyczny przykład Einsteina: pośrodku jadącego wagonu błyska lampa. W układzie wagonu światło dociera do obu ścian jednocześnie. Na peronie światło też biegnie z prędkością c w obie strony, ale tylna ściana jedzie na spotkanie światła, a przednia ucieka. Według peronu światło trafia w tylną ścianę wcześniej. Oba opisy są poprawne. „Jednocześnie” dla odległych zdarzeń nie ma znaczenia absolutnego. (FLP I-15-6)

3.2 Dylatacja czasu (jeszcze raz)

Zegar spoczywa w S' ($\Delta x' = 0$) i tyka co $\Delta\tau$. Z transformacji odwrotnej $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2) = \gamma\Delta\tau$: ten sam wynik co z zegara świetlnego. Efekt jest symetryczny: obserwator w S' też uważa, że zegary z S chodzą wolniej. Sprzeczności nie ma, bo porównanie jednego zegara z dwoma różnymi zegarami z drugiego układu wymaga ich synchronizacji, a ta zależy od układu (część 3.1).

3.3 Skrócenie Lorentza

Pręt spoczywa w S' i ma tam długość L_0 (długość własna). W S mierzymy położenia jego końców jednocześnie ($\Delta t = 0$): $L_0 = \Delta x' = \gamma\Delta x$, więc

🏠 WYNIK · SKRÓCENIE LORENTZA

$$L = \frac{L_0}{\gamma}.$$

Skraca się tylko wymiar wzdłuż ruchu. Wymiary poprzeczne się nie zmieniają: gdyby się zmieniały, to z dwóch jednakowych prętów poprzecznych mijających się w ruchu każdy obserwator uznałby za krótszy pręt drugiego. A to, czy koniec jednego pręta wystaje poza drugi (i np. rysuje na nim kreskę), nie może zależeć od układu: sprzeczność. (FLP I-15-5)

3.4 Składanie prędkości

Ciało porusza się w S' z prędkością u' (wzdłuż x). Dzieląc $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$ przez $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$: (FLP I-16-3)

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}.$$

Dla $u' = c$ wychodzi $u = c$: postulat 2 jest wbudowany w transformację. Dwie prędkości $0,9c$ składają się na $0,994c$. W lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza ten sam wzór wynikł z dodawania prędkości.

⚠️ PUŁAPKA · „WIDZIEĆ” A „ZMIERZYĆ”

Dylatacja i skrócenie to wyniki pomiarów po uwzględnieniu czasu biegu światła, a nie złudzenia optyczne. To, co rejestruje aparat fotograficzny, to inna sprawa: światło z dalszych części obiektu wyszło wcześniej. Szybko lecąca kula na zdjęciu wciąż wygląda jak kula, tylko obrócona (efekt Terrella, 1959). Skrócenie Lorentza jest realne, ale na zdjęciu go wprost nie zobaczymy.

📝 ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Pręt o długości własnej 1 m i grubości 2 cm leci wzdłuż swojej osi z prędkością $0,8c$. Jaka długość i grubość zmierzy obserwator, obok którego przelatuje?
- 2 Statek lecący z prędkością $0,6c$ wystrzeliwuje do przodu sondę z prędkością $0,6c$ względem siebie. Jaka jest prędkość sondy względem Ziemi? Co dałby Galileusz?

- 3 W wagonie o długości własnej 300 m, jadącym z prędkością $0,6c$, zapalono jednocześnie (w układzie wagonu) lampy na obu końcach. Która lampa zapaliła się wcześniej według peronu i o ile?

- 4 Mion z prologu ($\beta = 0,998$, $\gamma \approx 15,8$). Jak gruba jest atmosfera (15 km) w jego układzie? Ile czasu własnego mionu trwa przelot? Ile to średnich czasów życia?

- 5 Naładowany pion żyje w spoczynku średnio 26 ns. Jaką średnią drogę przebywa w laboratorium wiązka pionów o $\gamma = 10$? Porównaj z $c\tau$.

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

4 Czasoprzestrzeń, interwał i paradoks bliźniąt

Obrót osi zmienia współrzędne x i y punktu, ale nie zmienia odległości $\sqrt{x^2 + y^2}$. Minkowski (1908) zauważył, że transformacja Lorentza zmienia x i t , ale nie zmienia pewnej kombinacji. Czas i przestrzeń okazują się dwoma aspektami jednej **czasoprzestrzeni**, a zdarzenie to punkt (ct, x, y, z) . (FLP I-17-1, 17-2)

🔧 DEFINICJA · INTERWAŁ CZASOPRZESTRZENNY

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

jest taki sam we wszystkich układach inercjalnych. Trzy przypadki:

- $s^2 > 0$, **interwał czasowy**: istnieje układ, w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu; czas między nimi w tym układzie to czas własny $\tau = s/c$. Jedno zdarzenie może być przyczyną drugiego.
- $s^2 = 0$, **światłny**: zdarzenia może połączyć tylko sygnał świetlny.
- $s^2 < 0$, **przestrzenny**: istnieje układ, w którym zdarzenia są jednoczesne, i układy, w których zachodzą w odwrotnej kolejności. Żaden sygnał nie może ich połączyć, więc nie mogą być związane przyczynowo.

Na diagramie czasoprzestrzennym (oś ct pionowo, x poziomo) ciało zakreśla **linię świata**, a światło biegnie pod kątem 45° . Linie świetlne wychodzące z danego zdarzenia tworzą **stożek świetlny**: zdarzenia wewnątrz górnej części to absolutna przyszłość (każdy obserwator zgodzi się, że są później), wewnątrz dolnej absolutna przeszłość, a na zewnątrz „gdzie indziej”, o którego kolejności względem nas decyduje wybór układu. (FLP I-17-3) Względność kolejności nie narusza więc przyczynowości, dopóki nic nie porusza się szybciej od światła.

4.1 Czas własny wzdłuż linii świata

Zegar poruszający się z prędkością $v(t)$ w ciągu czasu dt układu inercyjnego odmierza $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Czas własny wzdłuż całej linii świata to całka $\tau = \int \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$. Jest to czasoprzestrzenny odpowiednik długości krzywej, z jedną różnicą: ze względu na znak minus w interwale *prosta* linia świata (ruch jednostajny) ma *najdłuższy* czas własny spośród wszystkich linii łączących dwa zdarzenia.

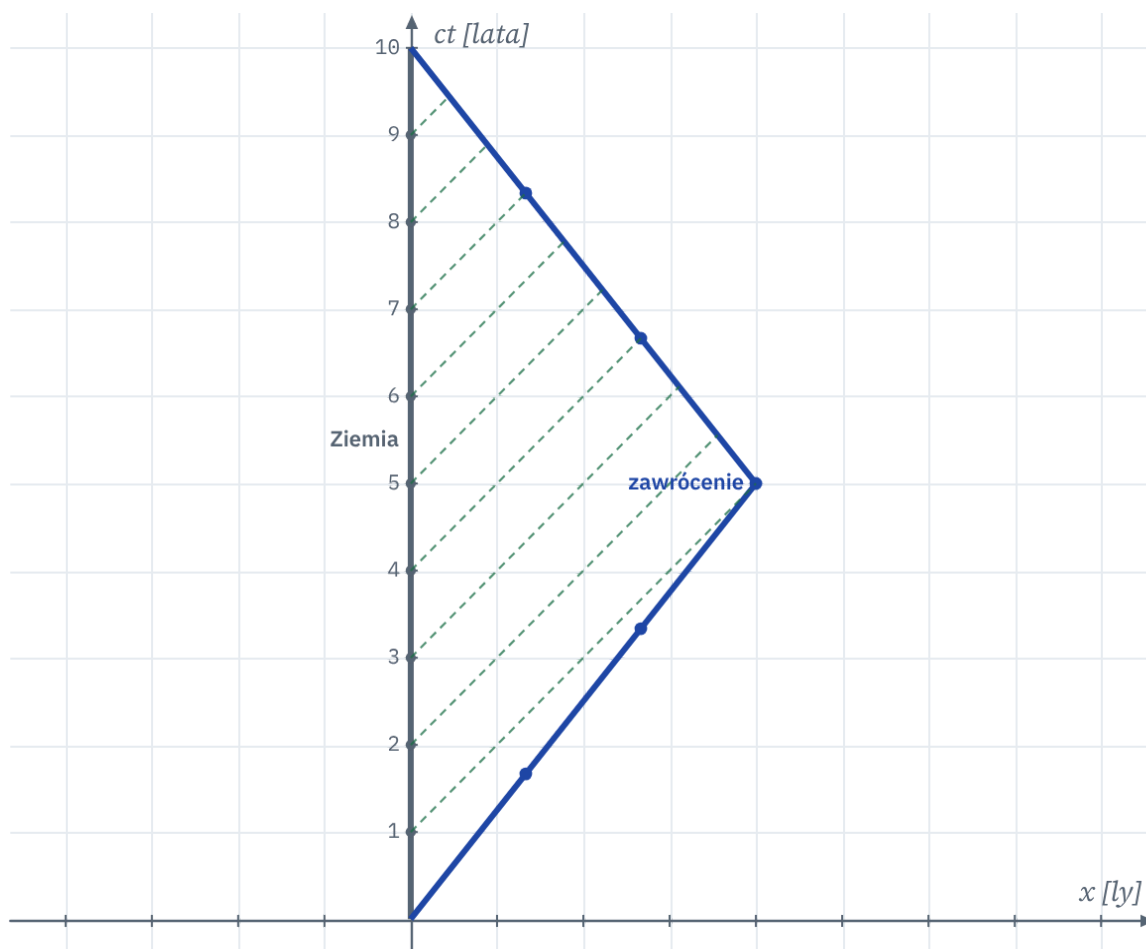
4.2 Paradoks bliźniąt

Ania zostaje na Ziemi, Bartek leci z prędkością $0,8c$ do gwiazdy odległej o 4 lata świetlne i wraca. Według Ani podróż trwa 10 lat, a zegar Bartka chodzi wolniej: Bartek postarzeje się o $10/\gamma = 6$ lat. Paradoks: czy Bartek nie może powiedzieć, że to Ania się oddaliła i wróciła, więc to ona powinna być młodsza? FLP I-16-2

Nie, bo sytuacja nie jest symetryczna. Ania przez cały czas pozostaje w jednym układzie inercyjnym; Bartek przy zawróceniu zmienia układ. Linia świata Ani jest prosta, Bartka załamana, a prosta ma najdłuższy czas własny. Asymetrię widać też bez rachunków, jeśli bliźnięta co rok wysyłają sobie sygnał świetlny (symulacja 3 i przykład 7.4).

SYMULACJA 3

Paradoks bliźniąt na diagramie czasoprzestrzennym. Kropki oznaczają kolejne lata czasu własnego każdego z bliźniąt, a przerywane linie to sygnały świetlne wysyłane co rok (wybierz, kto je wysyła). Zmieniaj prędkość statku i odległość gwiazdy.



— linia świata Ziemi — linia świata podróżnika - - - sygnały świetlne co rok

czynnik γ 1,667

upływ czasu na Ziemi [lata] 10,00

upływ czasu podróżnika [lata] 6,00

różnica wieku [lata] 4,00

Kropki to kolejne lata czasu własnego. Sygnały odebrane przez podróżnika: w drodze tam 1, w drodze powrotnej 9. Asymetria bierze się z zawrócenia: tylko podróżnik zmienia układ inercjalny, więc on zaczyna odbierać sygnały częściej już w połowie swojej podróży, a Ziemia dopiero po 90% czasu podróży, gdy dotrze do niej światło wysłane w chwili zawrócenia.

Stan na rysunku: $\beta = 0,80$, gwiazda 4,0 ly; na Ziemi mija 10,00 roku, podróżnikowi 6,00 roku.

⚠️ PUŁAPKA · „PRZYSPIESZENIE POSTARZA”

Różnicy wieku nie wywołuje samo przyspieszenie przy zawracaniu. Zawrócenie może trwać dowolnie krótko, a różnica wieku zależy od długości obu odcinków lotu. Przyspieszenie jest ważne tylko dlatego, że wskazuje, kto zmienił układ inercjalny, a więc czyja linia świata jest załamana.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Zdarzenie B zaszło w S w chwili $ct = 5$ lat w odległości $x = 4$ ly od zdarzenia A (A w początku układu). Oblicz interwał. Jakiego rodzaju jest? Jaki czas własny dzieli zdarzenia i w jakim układzie zachodzą w jednym miejscu?
- 2 Sklasyfikuj pary zdarzeń o $(c\Delta t, \Delta x)$ równych: $(1, 3)$; $(4, 4)$; $(5, 1)$ (w latach i latach świetlnych). Dla pary przestrzennej znajdź prędkość układu, w którym zdarzenia są jednoczesne.
- 3 Bliźniak leci z prędkością $0,6c$ do gwiazdy odległej o 3 ly i wraca. Ile lat minie na Ziemi, a ile na statku? Jaką odległość do gwiazdy zmierzy podróżnik?
- 4 Gdy źródło oddala się z prędkością βc , odbiornik rejestruje sygnały wysyłane co T w odstępach kT , gdzie $k = \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$ (relatywistyczny efekt Dopplera; przy zbliżaniu: T/k). Wyprowadź ten wzór z dylatacji czasu i opóźnienia sygnału.
- 5 Na Ziemi wystartowała rakieta (zdarzenie A), a 5 minut później w naszym układzie na Marsie, odległym wtedy o 10 minut świetlnych, zawałił się krater (zdarzenie B). Czy A mogło spowodować B? Czy istnieje obserwator, dla którego B zaszło przed A? Z jaką prędkością musiałby się poruszać?

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ feynmanowskie

5 Pęd, energia i $E = mc^2$

Gdyby pęd był równy mv , zasada zachowania pędu, prawdziwa w jednym układzie, byłaby fałszywa w innym, bo prędkości przekształcają się według nowego wzoru. Einstein znalazł wielkość, która jest zachowana we wszystkich układach. Jest to pęd z czynnikiem γ :

FLP I-15-8, 16-4

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad E = \gamma m c^2, \quad E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

m to masa (spoczynkowa), ta sama w każdym układzie. Energia kinetyczna to $E_k = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^4/c^2 + \dots$; pierwszy wyraz to wynik Newtona. Ciało w spoczynku ma energię mc^2 . Dla cząstki bez masy (foton) $E = pc$ i $v = c$.

Feynman zapisuje te wzory inaczej: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nazywa masą (relatywistyczną), a m_0 masą spoczynkową. Wtedy $p = mv$ i $E = mc^2$ wyglądają jak wzory klasyczne. Oba zapisy dają te same wyniki; dziś częściej używa się jednej, niezmienniczej masy m i czynnika γ we wzorach. W tym kursie używamy drugiego zapisu, a „ m_0 ” z działu 3 „Pęd, zderzenia i środek masy” to nasza masa m .

5.1 Dlaczego $E = mc^2$

Argument Feynmana: dwie jednakowe kule o masie m lecą naprzeciw siebie z prędkościami $\pm u$ i sklejają się w spoczywającą bryłę. Z zachowania energii (liczonej jako γmc^2) bryła ma energię $2\gamma(u)mc^2$, a ponieważ spoczywa, jej masa wynosi $M = 2\gamma(u)m$. Masa bryły jest większa od sumy mas kul o $\Delta M = 2(\gamma - 1)m = E_k/c^2$: energia kinetyczna zamieniła się w ciepło, a ciepło ma masę. Zasada zachowania pędu w układzie poruszającym się względem bryły wymaga właśnie takiego M , więc wynik nie zależy od tego, jak zdefiniujemy energię (zadanie feynmanowskie 8).

FLP I-16-5

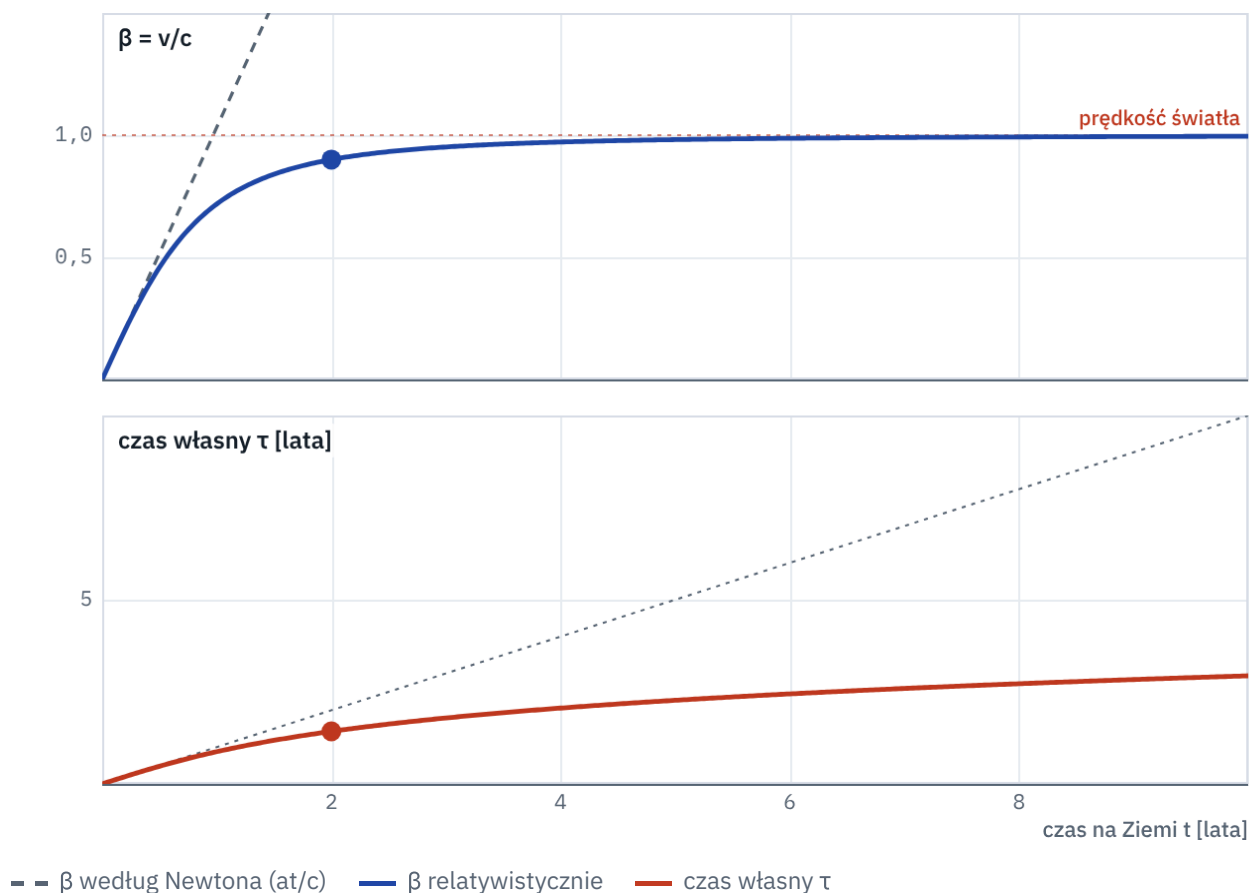
Każda energia zawarta w ciele ma masę E/c^2 . Atom wodoru jest lżejszy od protonu i elektronu osobno o $13,6 \text{ eV}/c^2$, czyli o ułamek $1,4 \cdot 10^{-8}$ swojej masy; deuteron jest lżejszy od protonu i neutronu o $2,22 \text{ MeV}/c^2$, ułamek $1,2 \cdot 10^{-3}$. Dlatego w chemii zmian masy nie widać, a w fizyce jądrowej tak. Słońce wypromieniowuje $3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$, więc traci ok. 4,3 mln ton masy na sekundę. W fizyce cząstek energię mierzy się w elektronowoltach: $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$, $m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}$.

5.2 Stała siła: dlaczego nie da się przekroczyć c

Stała siła F zwiększa pęd liniowo: $p = Ft$. Ale prędkość to $v = pc^2/E = pc/\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$, więc zbliża się do c i nigdy jej nie osiąga. Energia potrzebna do osiągnięcia c byłaby nieskończona. Rakieta, której pasażerowie stale czują przyspieszenie a (np. g), porusza się po hiperboli na diagramie czasoprzestrzennym, a jej pospieszność rośnie liniowo z czasem własnym: $\phi = a\tau/c$. Stąd $\beta = \tanh(a\tau/c)$, $\gamma = \cosh(a\tau/c)$ i czas na Ziemi $t = (c/a) \sinh(a\tau/c)$ (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne).

SYMULACJA 4

Rakieta ze stałym przyspieszeniem własnym. Górny wykres: prędkość według Newtona (przerywana, rośnie bez ograniczeń) i według teorii względności (dąży do c). Dolny wykres: czas na pokładzie w funkcji czasu na Ziemi, z przekątną $\tau = t$ dla porównania.



β 0,900

γ 2,295

czas własny τ [lata] 1,43

przebyta droga 1,25 ly

pospieszność $\phi = a\tau/c$ 1,472

Według Newtona statek przekroczyłby c po 0,97 roku. Naprawdę β zbliża się do 1, ale nigdy jej nie osiąga; za to pospieszność rośnie liniowo z czasem własnym, a zegar na pokładzie zostaje coraz bardziej w tyle.

Stan na rysunku: $a = 1,00 \text{ g}$, $t = 2,00 \text{ roku}$; $\beta = 0,900$, $\tau = 1,43 \text{ roku}$, droga 1,25 ly.

SKĄD TO WIEMY?

Akceleratory sprawdzają wzory relatywistyczne codziennie. Proton w LHC ma energię 6,8 TeV, ponad 7000 razy więcej niż $m_p c^2$. Według Newtona miałby prędkość 120 razy większą od c ; naprawdę jest wolniejszy od światła o ok. 3 m/s, a częstotliwość jego obiegu zgadza się z $v \approx c$ (przykład 7.6). Bilanse energii w rozpadach jąder i cząstek zgadzają się z $E = mc^2$ z dokładnością lepszą niż milionowe części.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Elektron rozpędzono do energii kinetycznej 1 MeV. Oblicz γ i β . Co dałby wzór Newtona?

- 2 O ile wzrasta masa szklanki herbaty (0,25 kg wody), gdy ogrzejesz ją o 80 K? Czy da się to zważyć?

- 3 Słońce świeci mocą $3,83 \cdot 10^{26}$ W. Ile masy traci na sekundę? Jaką część swojej masy ($2 \cdot 10^{30}$ kg) straciło w ten sposób przez 4,6 mld lat (przyjmij stałą moc)?

- 4 Laser o mocy 1 W świeci na czarną płytkę, która pochłania całe światło. Jaką siłą światło na nią działa? Ile razy większa byłaby siła przy lustrze?

- 5 Rakieta przyspiesza stale z przyspieszeniem własnym g . Po roku czasu pokładowego jaka jest jej pospieszność, prędkość i γ ? Ile czasu minęło na Ziemi?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA DLA ZADAŃ Z UKŁADÓW ODNIESIENIA I WZGLĘDNOŚCI

1. **Nazwij zdarzenia** (konkretne punkty w czasie i przestrzeni) i układy. Każda długość i każdy czas dotyczą pary zdarzeń w konkretnym układzie.
2. **Znajdź wielkości własne:** czas własny mierzy zegar obecny przy obu zdarzeniach, długość własną mierzy się w układzie, w którym obiekt spoczywa. Wtedy $\Delta t = \gamma \Delta \tau$, $L = L_0 / \gamma$.
3. **Gdy w grę wchodzi jednoczesność** lub zdarzenia w różnych miejscach, nie używaj skrótów: zapisz współrzędne i zastosuj transformację Lorentza.
4. **Sprawdź niezmienniki:** interwał s^2 i $E^2 - (pc)^2$ są takie same w każdym układzie.
5. **Dynamika:** zachowane są energia całkowita γmc^2 i pęd $\gamma m\vec{v}$, a nie masa ani energia kinetyczna. Do progów reakcji używaj masy niezmienniczej układu.
6. **Sprawdzenie:** granica $v \ll c$ musi dać wynik Newtona i Galileusza; żadna prędkość ciała nie może przekroczyć c .

Przykład 7.1

Wahadło w hamującym autobusie

Wahadło o długości 1 m wisi w autobusie hamującym z opóźnieniem 3 m/s^2 . Jakie jest położenie równowagi i jaki okres małych drgań?

- 1 W układzie autobusu na ciężarek działa grawitacja mg w dół i siła bezwładności $ma_0 = 3m$ do przodu. Ich suma to „efektywna grawitacja” $m\vec{g}_{\text{ef}}$.
- 2 $g_{\text{ef}} = \sqrt{g^2 + a_0^2} \approx 10,26 \text{ m/s}^2$, skierowane pod kątem $\arctg(3/9,81) \approx 17^\circ$ od pionu do przodu.
- 3 Wahadło drga wokół kierunku $\vec{g}_{\text{ef}}$ z okresem $T = 2\pi\sqrt{l/g_{\text{ef}}} \approx 1,96 \text{ s}$ (zamiast 2,01 s).

Wynik: sznurek odchyła się o 17° do przodu, a okres skraca się o ok. 2%.

Sprawdzenie: w układzie chodnika: naciąg sznurka musi nadawać ciężarkowi przyspieszenie a_0 do tyłu i równoważyć ciężar, więc ma składowe ma_0 i mg ; ten sam kąt ✓.

Przykład 7.2

Kamień w głębokim szybie

Kamień puszczony z krawędzi szybu kopalni o głębokości 100 m na szerokości 50°N . Gdzie spadnie względem linii wyznaczonej pionem murarskim?

- 1 Czas spadku: $t = \sqrt{2h/g} \approx 4,5$ s; prędkość w dół $v = gt'$ w chwili t' .
- 2 Siła Coriolisa $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$: dla prędkości pionowej w dół ma wartość $2m\omega v \cos \lambda$ i jest skierowana na wschód.
- 3 Przyspieszenie na wschód $2\omega gt' \cos \lambda$; całkując dwukrotnie: $x = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \lambda \approx \frac{1}{3} \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \cdot 9,81 \cdot 92 \cdot 0,643 \approx 1,4$ cm.

Wynik: kamień spada ok. 1,4 cm na wschód od pionu.

Sprawdzenie: w układzie inercjalnym: wierzchołek szybu jest dalej od osi Ziemi niż dno, więc ma większą prędkość na wschód; kamień zachowuje tę prędkość i wyprzedza dno. (Ten prosty argument daje kierunek; dokładny wynik, z czynnikiem $\frac{1}{3}$ zamiast $\frac{1}{2}$, wymaga uwzględnienia zachowania momentu pędu.) Taki efekt zmierzono w XIX w. w szybach kopalń, zgodnie z rachunkiem ✓.

Przykład 7.3

Miony w dwóch układach

Miony powstają 15 km nad Ziemią i lecą w dół z prędkością 0,998 c. Jaka część dociera do powierzchni? Rozwiąż w układzie Ziemi i w układzie mionu.

- 1 $\gamma = 1/\sqrt{1 - 0,998^2} \approx 15,8$.
- 2 Układ Ziemi: lot trwa $15 \text{ km}/(0,998 c) \approx 50 \mu\text{s}$, ale zegar mionu odmierza $50/15,8 \approx 3,2 \mu\text{s}$. Przeżywa $e^{-3,2/2,2} \approx 0,24$.
- 3 Układ mionu: mion spoczywa i żyje średnio $2,2 \mu\text{s}$, a Ziemia nadlatuje z prędkością 0,998 c. Warstwa atmosfery ma grubość $15/15,8 \approx 0,95 \text{ km}$ i mija w $3,2 \mu\text{s}$. Ten sam wynik: 24%.
- 4 Bez teorii względności: $e^{-50/2,2} \approx 10^{-10}$.

Wynik: dociera ok. 24% mionów zamiast jednego na dziesięć miliardów. Ziemia tłumaczy to dylatacją czasu, mion skróceniem Lorentza.

Sprawdzenie: liczba mionów, które dolatują, to fakt niezależny od układu, więc oba opisy muszą dać ten sam wynik ✓. W rzeczywistości miony mają różne energie i powstają na różnych wysokościach, ale efekt jest dobrze zmierzony.

Przykład 7.4

Bliźnięta i sygnały co rok

Bartek leci z prędkością $0,8c$ do gwiazdy oddległej o $4 ly$ i wraca. Bliźnięta wysyłają sobie sygnał świetlny w każde urodziny. Ile sygnałów odbierze każde z nich i kiedy?

- 1 Ziemia: podróż trwa 10 lat, Bartek postarzeje się o 6 lat. Czynniki Dopplera $k = \sqrt{1,8/0,2} = 3$.
- 2 Bartek: w drodze tam (3 lata jego czasu) odbiera sygnały Ani co 3 lata, czyli 1 sygnał. W drodze powrotnej (3 lata) co $1/3$ roku: 9 sygnałów. Razem 10: Ania postarzała się o 10 lat ✓.
- 3 Ania: sygnały Bartka z drogi tam odbiera co 3 lata. Światło wysłane przy zawróceniu (w roku 5) dociera do Ziemi w roku 9. Przez 9 lat Ania odbiera 3 sygnały, a w ostatnim roku, gdy Bartek wraca, 3 kolejne, co $1/3$ roku. Razem 6: Bartek postarzał się o 6 lat ✓.

Wynik: Bartek wraca o 4 lata młodszy. U Bartka częstotliwość odbieranych sygnałów zmienia się w połowie podróży, a u Ani dopiero po 9 latach z 10: to widoczna asymetria.

Sprawdzenie: oboje zgadzają się co do liczby sygnałów odebranych przez każde z nich, bo liczenie sygnałów nie zależy od układu ✓.

Drabina w garażu

Drabina o długości własnej 10 m wjeżdża z prędkością $0,8c$ do garażu o długości 6 m z dwojgiem drzwi. W układzie garażu drabina ma 6 m, więc na chwilę mieści się w środku i oboje drzwi można jednocześnie zamknąć. W układzie drabiny garaż ma $6/\gamma = 3,6$ m, więc drabina się w nim nie zmieści. Kto ma rację?

- 1 $\gamma = 5/3$; w układzie garażu drabina ma $10 \cdot 0,6 = 6$ m i w pewnej chwili wypełnia garaż dokładnie.
- 2 Zdarzenia: zamknięcie drzwi tylnych (wejściowych) i otwarcie przednich, jednocześnie w układzie garażu, odległe o 6 m.
- 3 W układzie drabiny $\Delta t' = -\gamma v \Delta x / c^2$: zdarzenie przy przednich drzwiach zachodzi o $\gamma \beta \cdot 6 \text{ m} / c = 8 \text{ m} / c \approx 27 \text{ ns}$ wcześniej niż przy tylnych. Przednie drzwi otwierają się, zanim zamkną się tylne; w tym czasie garaż przesuwa się o $0,8 \cdot 8 = 6,4$ m, czyli dokładnie tyle, o ile drabina (10 m) jest dłuższa od garażu (3,6 m).

Wynik: obaj obserwatorzy mają rację co do pomiarów; nie zgadzają się co do tego, czy oba końce drabiny były w garażu „jednocześnie”. Paradoks znika, gdy uwzględnimy względność jednoczesności.

Sprawdzenie: gdyby oboje drzwi pozostały zamknięte, drabina musiałaby się zatrzymać; ale sygnał o zatrzymaniu przodu dociera do tyłu najwyżej z prędkością c , więc żadne ciało nie jest naprawdę sztywne i drabina by się zgmiotła (lub rozbiła drzwi) w obu opisach ✓.

Przykład 7.6

Proton w LHC

Protony w Wielkim Zderzaczu Hadronów mają energię 6,8 TeV, a obwód pierścienia to 26,66 km. Oblicz γ , różnicę $c - v$ i częstotliwość obiegu. Porównaj z fizyką Newtona.

- 1 $\gamma = E/m_p c^2 = 6800/0,9383 \approx 7250$.
- 2 $1 - \beta \approx 1/(2\gamma^2) \approx 9,5 \cdot 10^{-9}$, więc $c - v \approx 2,9$ m/s.
- 3 Częstotliwość obiegu $f = v/(26\,659 \text{ m}) \approx 11\,245$ Hz, praktycznie taka sama jak dla $v = c$.
- 4 Newton: $v = \sqrt{2E_k/m} \approx 120 c$, więc proton obiegałby pierścień 120 razy częściej.

Wynik: $\gamma \approx 7250$, proton jest wolniejszy od światła o 3 m/s i obiega pierścień ok. 11 245 razy na sekundę.

Sprawdzenie: wnęki przyspieszające (RF) w LHC pracują z częstotliwością ok. 400 MHz, równą 35 640-krotności częstotliwości obiegu: $35\,640 \cdot 11\,245 \approx 400,8$ MHz ✓. Pęd protonu $pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} \approx 6,8$ TeV: przy takich energiach $E \approx pc$, jak dla fotonu.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Siła odśrodkowa wyrzuca ciało na zewnątrz zakrętu.”

W układzie inercyjnym ciało po prostu porusza się dalej prosto, gdy zabraknie siły dośrodkowej. Siła odśrodkowa istnieje tylko w opisie z układu obracającego się.

× „Woda w umywalce na półkuli północnej zawsze wiruje przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.”

Przyspieszenie Coriolisa przy prędkości 0,1 m/s to ok. 10^{-5} m/s^2 , tysiące razy mniej niż efekty kształtu umywalki i ruchów wody. Liczy się dopiero w skali kilometrów (nizę, prądy oceaniczne) lub w starannie przygotowanym eksperymencie.

× „Dylatacja czasu to złudzenie: zegar tylko wydaje się wolniejszy.”

Mion naprawdę przeżywa dłużej, a zegary z lotu naprawdę wskazują po powrocie inny czas niż zegary, które zostały na ziemi (o dziesiątki do setek nanosekund). Efekty pozorne, związane z czasem biegu światła, odejmuje się w pomiarze i dylatacja zostaje.

× „Nic nie może się poruszać szybciej od światła.”

Nie może ciało ani sygnał niosący informację. Plamka lasera na Księżycu, cień czy punkt przecięcia nożyc mogą przesuwać się dowolnie szybko (zadanie feynmanowskie 2).

× „ $E = mc^2$ dotyczy tylko bomb i reaktorów.”

Dotyczy każdej energii: ogrzana herbata, naładowany akumulator i ściśnięta sprężyna też są cięższe. W chemii zmiany są rzędu 10^{-10} masy, więc ich nie widać.

× „Masa rośnie z prędkością, więc szybkie ciało staje się czarną dziurą.”

Masa niezmiennicza się nie zmienia, a ciało w swoim układzie spoczywa. To, czy ciało jest czarną dziurą, nie może zależeć od tego, kto na nie patrzy.

× „Teoria względności mówi, że wszystko jest względne.”

Jest dokładnie odwrotnie: teoria opiera się na tym, co jest niezmiennicze: prędkości światła, interwale, masie, prawach fizyki. Względne są tylko współrzędne.

8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

1 **GPS.** Satelity GPS krążą na orbitach o promieniu 26 560 km. O ile mikrosekund na dobę ich zegary rozchodzą się z zegarami na Ziemi z powodu prędkości (STW)? Efekt grawitacyjny (zegar wyżej chodzi szybciej) to $\Delta t/t = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$. Jaki jest wynik łączny i jaki błąd położenia dałby on po dobie?

2 **Plamka szybsza od światła.** Obracasz laser na Ziemi raz na sekundę (pełny obrót), a jego promień omiata Księżyc (384 400 km). Z jaką prędkością biegnie plamka? Czy łamie to teorię względności?

3 **Światło w płynącej wodzie.** Fizeau (1851) mierzył prędkość światła w wodzie płynącej z prędkością v . W spoczywającej wodzie światło biegnie z prędkością c/n ($n = 1,333$). Jaką prędkość daje relatywistyczne składanie prędkości (do pierwszego rzędu w v)? Porównaj z Galileuszem.

- 4 **Do centrum Galaktyki.** Rakieta przyspiesza z przyspieszeniem g do połowy drogi, a potem hamuje. Ile lat zajmie podróż na pokładzie i na Ziemi do Proxymy Centauri (4,24 ly) i do centrum Galaktyki (26 000 ly)?
- 5 **Wiadro Newtona.** Wiadro z wodą obraca się z prędkością 2 obr/s. Jaki kształt ma powierzchnia wody i o ile wyżej stoi woda przy ścianie (promień 10 cm) niż na osi? Jak Newton użył tego doświadczenia do obrony „ruchu absolutnego”?
- 6 **Dlaczego $\sin \lambda$?** Wyjaśnij, dlaczego płaszczyzna wahadła Foucaulta obraca się z prędkością kątową $\omega \sin \lambda$ i dlaczego na równiku wcale się nie obraca.
- 7 **Próg produkcji antyprotonu.** Antyprotony wytwarza się w reakcji $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$, ostrzeliwując spoczywające protony. Jaka jest minimalna energia kinetyczna pocisku? Dlaczego nie wystarczy $2m_p c^2$?
- 8 **Masa zderzenia z dwóch układów.** Dwie kule po 1 kg lecą naprzeciw siebie z prędkościami $\pm 0,6c$ i skleja się. Oblicz masę powstałej bryły. Następnie przejdź do układu, w którym jedna kula spoczywa, i sprawdź, że pęd jest zachowany tylko wtedy, gdy bryła ma tę właśnie masę.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co to jest układ inercjalny i jak go rozpoznać?

Układ, w którym ciało bez działających sił porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. W układzie nieinercjalnym trzeba dopisać siły bezwładności, które nie mają źródła w żadnym ciele.

2 W którą stronę siła Coriolisa odchyła ruch na półkuli północnej?

W prawo względem kierunku ruchu (patrzac z góry).

3 Ile wynosi γ przy $0,6c$ i co mówi?

1,25: ruchomy zegar chodzi 1,25 raza wolniej, ruchomy pręt jest 1,25 raza krótszy.

- 4 Każdy z dwóch obserwatorów uważa, że zegar drugiego chodzi wolniej. Dlaczego to nie jest sprzeczność?

Porównanie wymaga zsynchronizowanych zegarów w różnych miejscach, a synchronizacja (jednoczesność) zależy od układu.

- 5 Co jest takie samo dla wszystkich obserwatorów inercjalnych: odległość, czas czy interwał?

Interwał $(c\Delta t)^2 - \Delta x^2$ (a także prędkość światła i masa).

- 6 Czy dwa zdarzenia o interwale przestrzennym mogą być przyczyną i skutkiem?

Nie: łączyłby je sygnał szybszy od światła, a w niektórych układach skutek wyprzedzałby przyczynę.

- 7 Ile wynosi energia kinetyczna cząstki o $\beta = 0,6$ w jednostkach mc^2 ? Co daje Newton?

$\gamma - 1 = 0,25$; Newton: $\frac{1}{2}\beta^2 = 0,18$.

- 8 Dlaczego jądro helu jest lżejsze od dwóch protonów i dwóch neutronów?

Energia wiązania (ok. 28 MeV) została wypromieniowana przy jego powstaniu, a energia ma masę: ubytek to ok. 0,8% masy.

UKŁADY NIEINERCJALNE I KINEMATYKA

przyspieszający: $m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0$ obracający się: $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ $x' = \gamma(x - vt)$, $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ $\Delta t = \gamma\Delta\tau$, $L = L_0/\gamma$, $u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$ Doppler: $k = \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$

CZASOPRZESTRZEŃ I DYNAMIKA

 $s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2$: > 0 czasowy, $= 0$ świetlny, < 0 przestrzenny $\tau = \int \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$ $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, $E = \gamma mc^2$, $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ $E_k = (\gamma - 1)mc^2$; foton: $E = pc$ stała a własne: $\beta = \tanh(a\tau/c)$, $t = (c/a) \sinh(a\tau/c)$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 15 (szczególna teoria względności), 16 (energia i pęd relatywistyczny).
- **Dla chętnych:** rozdz. 12.5 (siły pozorne), 17 (czasoprzestrzeń, czterowektory), 34.6 (relatywistyczny efekt Dopplera).

Następny dział: **Ciepło i teoria kinetyczna**. Wiemy już, że ciepło ma masę; teraz zobaczymy, czym ono jest. Ciśnienie gazu i jego temperatura okażą się średnimi z ruchu ogromnej liczby cząsteczek, a rozkład ich prędkości to rozkład normalny z lekcji 5.1 Prawdopodobieństwo i rozkłady.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. W układzie autobusu siła bezwładności ma_0 działa do przodu. $\tan \theta = a_0/g \approx 0,31$, $\theta \approx 17^\circ$ do przodu.
2. $N = m(g + a)$: 827 N, czyli ok. 84 kg. W dół: $m(g - a) = 547$ N, ok. 56 kg. Swobodny spadek: 0.
3. $\omega = 2\pi/86\,164 \text{ s} \approx 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$, $\omega^2 R \approx 0,034 \text{ m/s}^2$; różnica ok. 2,4 N (0,35%). Spłaszczenie Ziemi dodaje jeszcze ok. 0,18%, stąd ok. 0,5% różnicy między biegunem a równikiem.
4. Pozioma składowa pochodzi od pionowej składowej $\omega \sin \lambda$: $F = 2m\omega v \sin \lambda \approx 3,7 \text{ kN}$, w prawo względem kierunku jazdy (na półkuli północnej), więc na prawą szynę. To ok. 0,1% ciężaru.
5. $T = 23,93 \text{ h} / \sin \lambda$: Warszawa ok. 30,3 h, biegun 23,9 h (doba gwiazdowa), równik: nie obraca się wcale (zadanie feynmanowskie 6).

Zadania · część 2

1. 1,25; 1,667; 7,09. Na Ziemi: 1,25 roku; 1,67 roku; 7,1 roku.
2. $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$: dla $\gamma = 2$: $\beta = \sqrt{3}/2 \approx 0,866$; dla $\gamma = 10$: $\beta \approx 0,995$.
3. $\gamma - 1 \approx \frac{1}{2}\beta^2 = 3,3 \cdot 10^{-10}$; pół roku to $1,58 \cdot 10^7 \text{ s}$, różnica ok. 5 ms. Efekt grawitacyjny (zegar wyżej chodzą szybciej) działa przeciwnie, ale na tej wysokości jest kilka razy mniejszy.
4. $t_{\parallel} = \frac{2L}{c}\gamma^2$, $t_{\perp} = \frac{2L}{c}\gamma$, różnica $\approx \frac{L}{c}\beta^2$. Obrót zamienia ramiona, więc zmiana różnicy dróg optycznych to $2L\beta^2$, a przesunięcie $2L\beta^2/\lambda \approx 0,40$ prążka. Zmierzono mniej niż 0,02.
5. Obaj mierzą c (postulat 2). Odległość czoła impulsu od statku w układzie Ziemi rośnie w tempie $c - 0,9c = 0,1c$: to nie jest prędkość żadnego ciała, tylko szybkość zmiany odległości między dwoma obiektami mierzona w jednym układzie, i może wynosić nawet $2c$ (dwa promienie biegnące w przeciwnych stronach).

Zadania · część 3

1. $L = 1/\gamma = 0,6 \text{ m}$; grubość bez zmian, 2 cm.
2. $u = 1,2/(1 + 0,36)c \approx 0,882c$. Galileusz: $1,2c$.
3. $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$: lampa z przodu ($x' = 300 \text{ m}$) ma późniejszy czas o $\gamma vL'/c^2 = 1,25 \cdot 0,6 \cdot 300/c \approx 750 \text{ ns}$. Według peronu wcześniej zapaliła się tylna lampa.
4. $15/15,8 \approx 0,95 \text{ km}$; czas $0,95 \text{ km}/(0,998c) \approx 3,2 \mu\text{s}$, czyli ok. 1,4 średniego czasu życia. Dociera ok. $e^{-1,44} \approx 24\%$.
5. $\gamma\beta c\tau \approx 10 \cdot 0,995 \cdot 7,8 \text{ m} \approx 78 \text{ m}$, zamiast $c\tau \approx 7,8 \text{ m}$. Dlatego wiązki pionów da się prowadzić przez długie tory eksperymentów.

Zadania · część 4

1. $s^2 = 25 - 16 = 9$, czasowy; $\tau = 3$ lata, w układzie poruszającym się z $\beta = 0,8$. Sprawdzenie: $ct' = \gamma(5 - 0,8 \cdot 4) = \frac{5}{3} \cdot 1,8 = 3 \checkmark$.

- (1, 3): $s^2 = -8$, przestrzenny; jednocześnie dla $\beta = c\Delta t/\Delta x = 1/3$. (4, 4): świetlny. (5, 1): $s^2 = 24$, czasowy, $\tau \approx 4,9$ roku.
 - Ziemia: $2 \cdot 3/0,6 = 10$ lat. Statek: $10/1,25 = 8$ lat. Odległość w układzie statku: $3/1,25 = 2,4$ ly, przebyta w $2,4/0,6 = 4$ lata w jedną stronę ✓.
 - W układzie odbiornika kolejne sygnały są wysyłane co γT , a źródło oddala się w tym czasie o $v\gamma T$, co dodaje opóźnienie $\beta\gamma T$. Odstęp: $\gamma T(1 + \beta) = T\sqrt{(1 + \beta)^2/(1 - \beta^2)} = T\sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$.
- FLP I-34-6
- $c\Delta t = 5$ min świetlnych $< \Delta x = 10$: interwał przestrzenny, A nie mogło spowodować B. $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) < 0$ dla $\beta > 0,5$ (w kierunku od Ziemi do Marsa).

Zadania · część 5

- $\gamma = 1 + 1/0,511 \approx 2,96$, $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} \approx 0,941$. Newton: $\beta = \sqrt{2E_k/mc^2} \approx 1,98$, czyli prawie dwa razy więcej niż c .
- $\Delta E = mc_w \Delta T \approx 84$ kJ, $\Delta m = \Delta E/c^2 \approx 9 \cdot 10^{-13}$ kg, ok. 1 nanograma. Najlepsze wagi laboratoryjne przy takiej masie mają rozdzielczość rzędu mikrograma, więc nie.
- $P/c^2 \approx 4,3 \cdot 10^9$ kg/s. Przez $1,45 \cdot 10^{17}$ s: $6 \cdot 10^{26}$ kg, ok. 0,03% masy.
- Pęd fotonów $p = E/c$, więc $F = P/c \approx 3,3$ nN. Lustro odwraca pęd: dwa razy więcej, 6,7 nN.
- $\phi = g\tau/c = 9,81 \cdot 3,16 \cdot 10^7/3 \cdot 10^8 \approx 1,03$; $\beta = \tanh \phi \approx 0,775$, $\gamma = \cosh \phi \approx 1,58$; $t = (c/g) \sinh \phi \approx 1,19$ roku. Przebyta droga ok. 0,56 ly.

Zadania feynmanowskie

- $v = \sqrt{GM/r} \approx 3,87$ km/s, $\frac{1}{2}\beta^2 \approx 8,3 \cdot 10^{-11}$: zegar satelity spóźnia się o ok. 7,2 μ s na dobę.
 - Grawitacyjnie: $\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{6371 \text{ km}} - \frac{1}{26\,560 \text{ km}} \right) \approx 5,3 \cdot 10^{-10}$: śpieszy się o ok. 45,7 μ s.
 - Łącznie ok. +38 μ s na dobę. Pomnożone przez c : ok. 11 km błędu dziennie. Dlatego zegary satelitów fabrycznie strojone są nieco wolniej.
- $v = 2\pi d/T \approx 2,4 \cdot 10^9$ m/s $\approx 8c$.
 - Plamka nie jest ciałem: kolejne położenia plamki oświetlają różne fotony wysłane z Ziemi. Plamka w punkcie A nie może wywołać niczego w punkcie B, więc nie przenosi informacji między nimi. Teoria względności zabrania szybszej od światła transmisji sygnału, a nie ruchu „wzoru”.
- $u = \frac{c/n + v}{1 + v/(nc)} \approx \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.
 - Woda „unosy” światło tylko w 44% swojej prędkości, a nie w 100%, jak dawałby Galileusz. Fizeau zmierzył właśnie taki współczynnik, pół wieku przed Einsteinem (Fresnel tłumaczył go częściowym unoszeniem eteru).
- Proxima: ok. 3,5 roku na pokładzie, 5,9 roku na Ziemi.
 - Centrum Galaktyki: ok. 20 lat na pokładzie, ok. 26 000 lat na Ziemi. Czas pokładowy rośnie tylko logarytmicznie z odległością: do Andromedy (2,5 mln ly) ok. 29 lat.
 - Haczyk to energia: przy $\gamma \sim 10^4$ każdy kilogram ładunku ma energię kinetyczną $\sim 10^{21}$ J, porównywalną z roczną produkcją energii ludzkości.

5. 1. W układzie wiadra powierzchnia jest prostopadła do $\vec{g}_{\text{ef}}$ (grawitacja + odśrodkowa); potencjał $gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$ jest stały na powierzchni: $z = \omega^2 r^2 / 2g$, paraboloida. Dla $\omega = 4\pi \text{ rad/s}$, $r = 0,1 \text{ m}$: ok. 8 cm.
2. Newton: kształt wody zależy od obrotu względem przestrzeni, a nie względem wiadra (na początku wiadro się obraca, a woda nie, i powierzchnia jest płaska). Mach odpowiadał, że chodzi o obrót względem odległych gwiazd. Szczególna teoria względności zachowuje ten wyróżniony status układów inercjalnych: obrót, w przeciwieństwie do ruchu jednostajnego, da się wykryć lokalnie.
6. 1. Rozłóż $\vec{\omega}$ Ziemi na składową pionową $\omega \sin \lambda$ i poziomą (północną) $\omega \cos \lambda$.
2. Siła Coriolisa od składowej poziomej, przy poziomych prędkościach wahadła, jest pionowa: zmienia tylko nieznacznie naciąg nici. Pozioma siła Coriolisa pochodzi od składowej pionowej i obraca płaszczyznę wahań z prędkością $\omega \sin \lambda$ (na północy zgodnie z ruchem wskazówek zegara, oglądając z góry).
3. Na równiku składowa pionowa jest zerowa; na biegunie płaszczyzna stoi względem gwiazd, a Ziemia obraca się pod nią w 23,9 h.
7. 1. Przed: $(E + m_p c^2)^2 - (pc)^2 = 2m_p c^2 E + 2(m_p c^2)^2$.
2. Na progu po zderzeniu: $(4m_p c^2)^2$. Zatem $E = 7m_p c^2$, $E_k = 6m_p c^2 \approx 5,6 \text{ GeV}$.
3. Nie wystarczy $2m_p c^2$, bo pęd pocisku musi być zachowany: produkty muszą się poruszać i zabierają energię kinetyczną. Bevatron w Berkeley zbudowano na 6,2 GeV właśnie po to; antyproton odkryto w 1955 r.
8. 1. Układ środka masy: $M = 2\gamma(0,6) \cdot 1 \text{ kg} = 2,5 \text{ kg}$; o 0,5 kg więcej niż suma mas, bo energia kinetyczna $2(\gamma - 1)mc^2$ zmieniła się w ciepło.
2. Układ kuli lewej: druga kula ma prędkość $1,2/1,36 \approx 0,882 c$, $\gamma = 2,125$, pęd $\gamma mv = 1,875 \text{ kg} \cdot c$. Bryła porusza się z prędkością $0,6 c$ ($\gamma = 1,25$), pęd $M \cdot 1,25 \cdot 0,6 c = 0,75 M c$.
3. Zachowanie pędu: $0,75 M = 1,875$, $M = 2,5 \text{ kg} \checkmark$. Ciepło ma masę: zasada zachowania pędu wymaga $E = mc^2$.

Fizyka · Dział 7: Układy odniesienia i szczególna teoria względności · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 12, 15–17 (oraz 19-4 i 34-6). Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.