

Drgania: jedno równanie dla całej fizyki

Ciężarek na sprężynie, wahadło, obwód elektryczny, atom pochłaniający światło i most kołyszący się pod tłumem: wszystkie te układy opisuje to samo równanie różniczkowe. Feynman poświęca mu cztery rozdziały, bo kto je zrozumie, ten zrozumie połowę fizyki. Ten dział prowadzi od drgań swobodnych przez tłumienie i rezonans do zasady superpozycji i drgań sprzężonych.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, rozdz. 21, 23,
24, 25

W TYM DZIALE

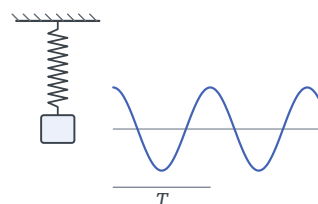
- 0 Prolog: most, który tańczył
- 1 Oscylator harmoniczny
- 2 Drgania w liczbach zespolonych
- 3 Tłumienie
- 4 Drgania wymuszone i rezonans
- 5 Układy liniowe, analogie i drgania sprzężone
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: most, który tańczył

W czerwcu 2000 r. otwarto w Londynie kładkę Millennium nad Tamizą. Pierwszego dnia przeszło po niej kilkadziesiąt tysięcy ludzi i kładka zaczęła kołysać się na boki, tak że przechodnie musieli się trzymać barier. Po dwóch dniach ją zamknięto. Okazało się, że jej własna częstotliwość drgań bocznych wynosiła ok. 1 Hz. Idący człowiek przenosi ciężar z nogi na nogę z częstotliwością równą połowie częstotliwości kroków (2 kroki na sekundę to 1 Hz w bok), czyli właśnie ok. 1 Hz. Gdy kładka zaczęła się lekko kołysać, ludzie bezwiednie dostosowywali krok do jej ruchu i pompowali w nią energię coraz zgodniej.

Naprawa kosztowała miliony funtów i polegała na dodaniu tłumików (część 5 i przykład 6.6). Ta historia zawiera wszystkie wątki działu: częstotliwość własną, rezonans, tłumienie i to, że ten sam opis matematyczny stosuje się do kładki, wahadła i obwodu radiowego.

Pytanie na start. Ciężarek na sprężynie drga z okresem 1 s. Zabierasz go na Księżyc. Czy okres się zmieni? A okres wahadła? Odpowiedź w części 1 i w zadaniu 1.5.



Oscylator harmoniczny

Ciało o masie m na sprężynie o sztywności k odsunięte o x od położenia równowagi czuje siłę $-kx$. Druga zasada dynamiki daje równanie, które w dziale 2 „Energia” nazwaliśmy równaniem małych drgań, a w lekcji 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne rozwiązaliśmy: FLP I-21-2

PRAWO · OSCYLATOR HARMONICZNY

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Amplitudę A i fazę φ wyznaczają warunki początkowe; częstość ω_0 zależy tylko od układu. Energia $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$ przelewa się między kinetyczną a potencjalną dwa razy w każdym okresie.

Najważniejsza własność: okres nie zależy od amplitudy (izochronizm). To dlatego, że siła rośnie proporcjonalnie do wychylenia: dwa razy dalej to dwa razy większa siła i dwa razy dłuższa droga, więc ten sam czas. Każdy układ w pobliżu minimum energii potencjalnej drga harmonicznie przy małych wychyleniach, z $\omega_0 = \sqrt{U''(x_0)/m}$ (dział 2, część 4.3). Wahadło: $\omega_0 = \sqrt{g/l}$; obwód LC: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (część 5).

⚠️ PUŁAPKA · CIĘŻAR A OKRES SPRĘŻYNY

Ciężarek wiszący na pionowej sprężynie drga z tym samym okresem $2\pi\sqrt{m/k}$ co na poziomym stole. Ciężar przesuwa tylko położenie równowagi (o mg/k), a siła liczona od nowego położenia to znowu $-kx$. Na Księżycu sprężyna drga tak samo; wahadło wolniej, bo jego „sztywność” pochodzi od grawitacji.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Ciężarek 0,5 kg wisi na sprężynie o sztywności 200 N/m. Oblicz częstość kątową, częstotliwość i okres drgań.
- 2 Zawieszenie ciężarka wydłuży sprężynę o 4,9 cm. Jaki będzie okres drgań? Czy potrzebujesz masy ciężarka?
- 3 Oscylator z $\omega_0 = 20$ rad/s drga z amplitudą 3 cm. Jaka jest największa prędkość i największe przyspieszenie? Gdzie występują?
- 4 W chwili $t = 0$ ciężarek ($\omega_0 = 20$ rad/s) jest 2 cm od równowagi i porusza się od niej z prędkością 0,3 m/s. Oblicz amplitudę i fazę początkową w zapisie $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- 5 Wahadło zegara ma „tykać” co sekundę, czyli mieć okres 2 s. Jak długie musi być (wahadło matematyczne)? Jaki byłby jego okres na Księżycu ($g = 1,62$ m/s²)?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Drgania w liczbach zespolonych

Rachunki z sinusami i cosinusami szybko się komplikują. Feynman zamiast nich używa funkcji wykładniczej o wykładniku urojonym (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory): $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$. Pochodna to mnożenie przez $i\omega$, więc równanie różniczkowe zamienia się w algebraiczne.

FLP I-22-6, I-23-1

🔧 METODA · ZAPIS ZESPOLONY

Szukamy rozwiązania w postaci $x = \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t})$, gdzie $\hat{A} = Ae^{i\varphi}$ to **amplituda zespolona** (fazor): jej moduł to amplituda, a argument faza. Wtedy $\dot{x} \rightarrow i\omega\hat{A}$, $\ddot{x} \rightarrow -\omega^2\hat{A}$. Dla równań liniowych o rzeczywistych współczynnikach wolno liczyć na liczbach zespolonych i wziąć część rzeczywistą na końcu.

Przykład: dla $m\ddot{x} + kx = 0$ podstawienie daje $(-m\omega^2 + k)\hat{A} = 0$, czyli $\omega = \omega_0$. Ta sama sztuczka zadziała przy tłumieniu i wymuszeniu, gdzie metodą „na piechotę” trzeba by rozwiązywać układ równań na amplitudy przy sinusie i cosinusie.

🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 30 min

1 Ruch opisuje $x = \operatorname{Re}(3e^{i(5t+\pi/3)})$ cm. Podaj amplitudę, częstość kątową, fazę i $x(0)$.

2 Zapisz $3\cos\omega t + 4\sin\omega t$ jako $A\cos(\omega t - \delta)$.

3 Sprawdź bezpośrednio, że $x = e^{i\omega_0 t}$ spełnia $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$.

4 Podstaw $x = e^{st}$ do $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ i znajdź s . Kiedy s jest zespolone, a kiedy rzeczywiste? Co to oznacza dla ruchu?

5 Pokaż, że prędkość w ruchu harmonicznym wyprzedza wychylenie w fazie o 90° , a przyspieszenie jest w przeciwfazie do wychylenia. Narysuj trzy fazory.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

3 Tłumienie

Prawdziwe drgania gasną. Najprostszy model oporu to siła proporcjonalna do prędkości: $-b\dot{x}$ (opór lepki, tłumik olejowy, opór elektryczny). Dzielnik przez masę i oznaczając $\gamma = b/m$:

FLP I-24-2

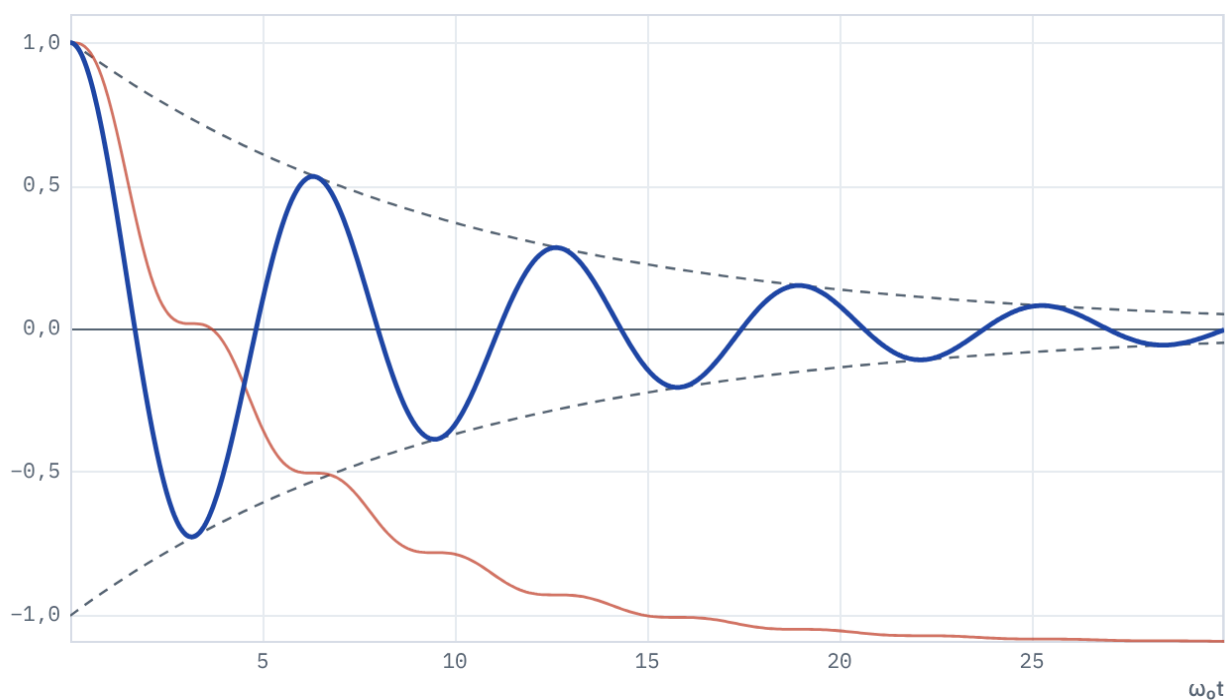
🔊 PRAWO · OSCYLATOR TŁUMIONY

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad \gamma < 2\omega_0 : x = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t + \varphi), \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}.$$

Amplituda maleje jak $e^{-\gamma t/2}$, energia jak $e^{-\gamma t}$. **Dobroć** $Q = \omega_0/\gamma$ mówi, ile radianów drgań mieści się w czasie, w którym energia maleje e razy. W każdym okresie amplituda maleje o czynnik $e^{-\pi/Q}$, a energia traci ułamek ok. $2\pi/Q$.

Trzy reżimy: **słabe tłumienie** ($\gamma < 2\omega_0$, drgania gasnące), **krytyczne** ($\gamma = 2\omega_0$, najszybszy powrót bez przeregulowania, czyli bez przelotu przez położenie równowagi) i **nadkrytyczne** ($\gamma > 2\omega_0$, powolne pełzanie do równowagi). Samozamykacze drzwi i wskazówki mierników projektuje się blisko tłumienia krytycznego, amortyzatory samochodowe wyraźnie poniżej (ok. 0,2–0,4 krytycznego, przykład 6.2); kamertony i kryształy kwarcu mają Q rzędu tysięcy i milionów.

SYMULACJA 1 Oscylator tłumiony: wychylenie i energia w czasie. Zmieniaj współczynnik tłumienia γ (w jednostkach ω_0) i obserwuj przejście od drgań gasnących przez tłumienie krytyczne do pełzania. Przerywana krzywa to obwiednia $Ae^{-\gamma t/2}$, gdzie $A = \omega_0/\omega_d$ (dla startu z $x_0 = 1, v_0 = 0$).



— wychylenie $x(t)$ - - - obwiednia $\pm Ae^{-(\gamma t/2)}$ — energia E/E_0 (pełna wysokość wykresu = 1)

dobroć Q 5,00

reżim słabe tłumienie

czas uspokojenia ($|x| < 2\%$) 38,4 / ω_0

Słabe tłumienie: drgania gasną z obwiednią $e^{-(\gamma t/2)}$, a częstość jest nieco mniejsza niż ω_0 ($\omega_d = 0,995 \omega_0$).

Stan na rysunku: $\gamma = 0,20 \omega_0$, $Q = 5,00$; czas uspokojenia $38,4/\omega_0$.

- 1 Amplituda drgań maleje dwukrotnie po 10 okresach. Oblicz dobroć Q (przy słabym tłumieniu $\omega_d \approx \omega_0$). ■ ■ ■
- 2 Na jedno koło samochodu przypada 250 kg, a sprężyna zawieszenia ma sztywność 25 kN/m. Oblicz częstotliwość własną i współczynnik b amortyzatora dający tłumienie krytyczne. ■ ■ ■
- 3 Kamerton 440 Hz ma dobroć $Q = 5000$. Po jakim czasie jego energia zmaleje e razy? Ile drgań wykona w tym czasie? ■ ■ ■
- 4 Samozamykacz drzwi ma za słabe tłumienie: drzwi uderzają we framugę z dużą prędkością (bez framugi przeleciałyby przez położenie zamknięte). Mechanik dokręca zawór i tłumienie rośnie kilkukrotnie ponad krytyczne. Co się stanie teraz? Jakie tłumienie jest najlepsze? ■ ■ ■
- 5 Amplituda wahadła maleje o 1% w każdym okresie. Oszacuj jego dobroć. ■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

4 Drgania wymuszone i rezonans

Popychamy oscylator siłą okresową $F_0 \cos \omega t$. Po zgaśnięciu drgań własnych (stanu przejściowego) oscylator drga z częstością siły, nie własną. Zapis zespolony daje amplitudę od razu: FLP I-23-2

🔧 WYNIK · ODPOWIEDŹ OSCYLATORA NA SIŁĘ OKRESOWĄ

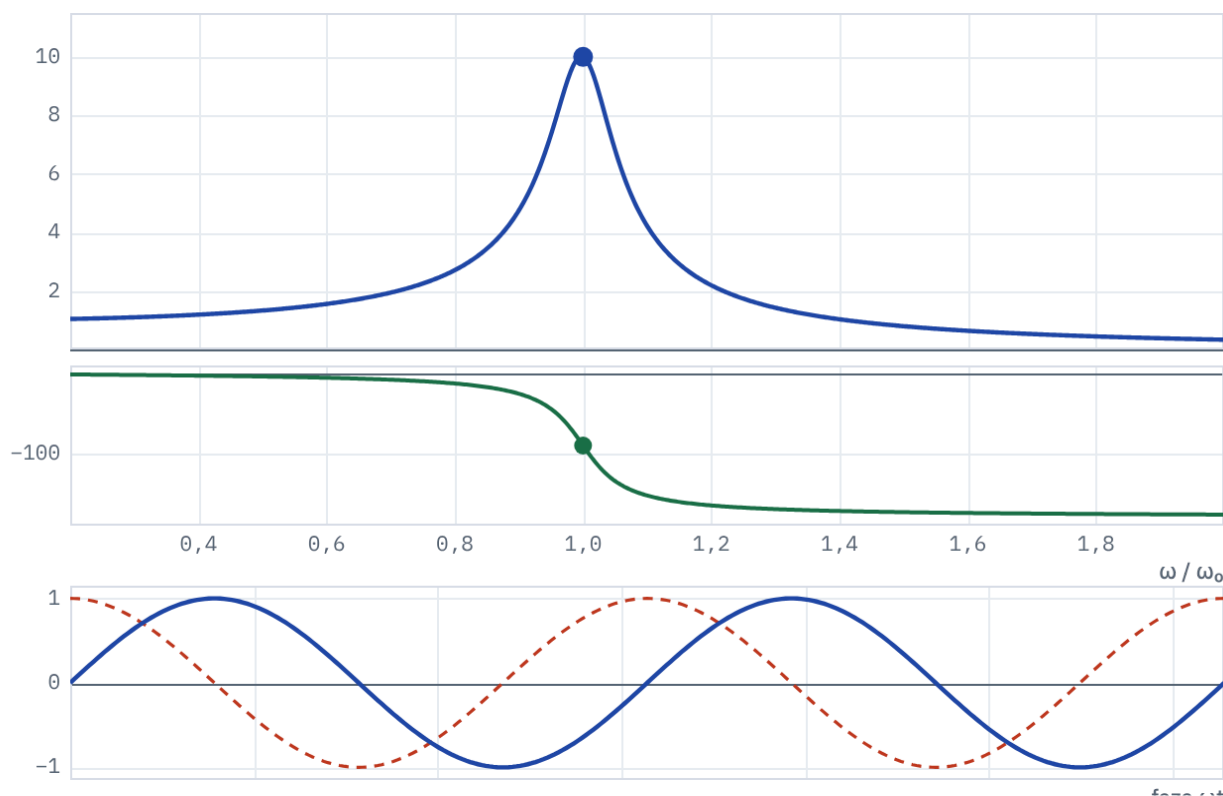
$$\hat{x} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}, \quad |\hat{x}| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}.$$

Przy $\omega \approx \omega_0$ amplituda jest Q razy większa niż wychylenie statyczne F_0/k , a wychylenie opóźnia się o 90° względem siły. Szerokość krzywej rezonansowej (moc spada o połowę) to $\Delta\omega \approx \gamma = \omega_0/Q$.

Faza mówi, czy siła wykonuje pracę. Daleko poniżej rezonansu ciało porusza się razem z siłą (sprężyna dominuje), daleko powyżej w przeciwfazie (dominuje bezwładność), a w rezonansie siła jest w fazie z prędkością i stale pompuje energię. Rezonans to zjawisko wszechobecne:

odbiornik radiowy wybiera stację, ucho rozróżnia wysokość dźwięku, atomy pochłaniają światło o ściśle określonych częstotliwościach, a kładki i mosty czasem tańczą. FLP I-23-4

SYMULACJA 2 Krzywa rezonansowa: amplituda i faza w funkcji częstości siły, dla wybranej dobroci Q . Punkt pokazuje bieżącą częstość; pod spodem ruch ciała (niebieski, przeskalowany do wspólnej wysokości, gdy amplituda $> F_0/k$) i siła (czerwona) w stanie ustalonym. Przy dużym Q krzywa jest wąska i wysoka, a zmiana fazy z 0 na -180° następuje gwałtownie.



— amplituda (w jednostkach F_0/k) — faza (środkowy wykres) - - - siła (dolny wykres)
— ruch ciała (przeskalowany)

amplituda / (F_0/k) **10,00**

faza $-90,0^\circ$

szerokość $\Delta\omega/\omega_0 \approx 1/Q$ **0,100**

moc pochłaniania (w rezonansie = 1) **1,000**

W pobliżu rezonansu: amplituda do $Q = 10$ razy statyczna, faza przechodzi przez -90° : siła jest w fazie z prędkością i pompuje energię. (Wykres ruchu jest przeskalowany do wspólnej wysokości.)

Stan na rysunku: $Q = 10,0$, $\omega/\omega_0 = 1,000$; amplituda $10,00 F_0/k$, faza $-90,0^\circ$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 40 min

1 Pokaż ze wzoru na $|\hat{x}|$, że w rezonansie ($\omega = \omega_0$) amplituda wynosi $Q \cdot F_0/k$.

■ ■ ■

- 2 Rezonator 1000 Hz ma dobroć 50. Jaka jest szerokość jego krzywej rezonansowej w hercach?
- 3 Obwód strojenia radia ma cewkę 250 μH . Jaka pojemność dostroi go do 1 MHz?
- 4 Jaka jest faza wychylenia względem siły daleko poniżej rezonansu, w rezonansie i daleko powyżej? Opisz słowami, co wtedy robi ciało.
- 5 Człowiek stawia ok. 2 kroki na sekundę. Z jaką częstotliwością działa na kładkę siła pionowa, a z jaką boczna? Dlaczego kładka Millennium miała kłopot z drganiami bocznymi o częstotliwości ok. 1 Hz?

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

5 Układy liniowe, analogie i drgania sprzężone

5.1 Superpozycja

Równanie oscylatora jest **liniowe**: jeśli x_1 jest odpowiedzią na siłę F_1 , a x_2 na F_2 , to $x_1 + x_2$ jest odpowiedzią na $F_1 + F_2$. Dowolną siłę okresową można rozłożyć na sinusoidy (szereg Fouriera, lekcja 4.2 Szeregi Fouriera), policzyć odpowiedź na każdą osobno i dodać. Tak działa cała teoria obwodów, akustyki i automatyki. Zasada przestaje obowiązywać, gdy układ jest nieliniowy, np. wahadło przy dużych kątach. FLP I-25-1, I-25-2

5.2 Analogie

To samo równanie w różnych układach: $a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F(t)$

układ	q	bezwładność a	opór b	szttywność c	wymuszenie F
masa na sprężynie	wychylenie x	masa m	b (N·s/m)	k	siła
wahadło (małe kąty)	kąt θ	ml^2	βl^2 (opór $-\beta v$ na ciężarek)	$mg l$	moment siły
obwód RLC	ładunek q	indukcyjność L	opór R	$1/C$	SEM $\mathcal{E}$

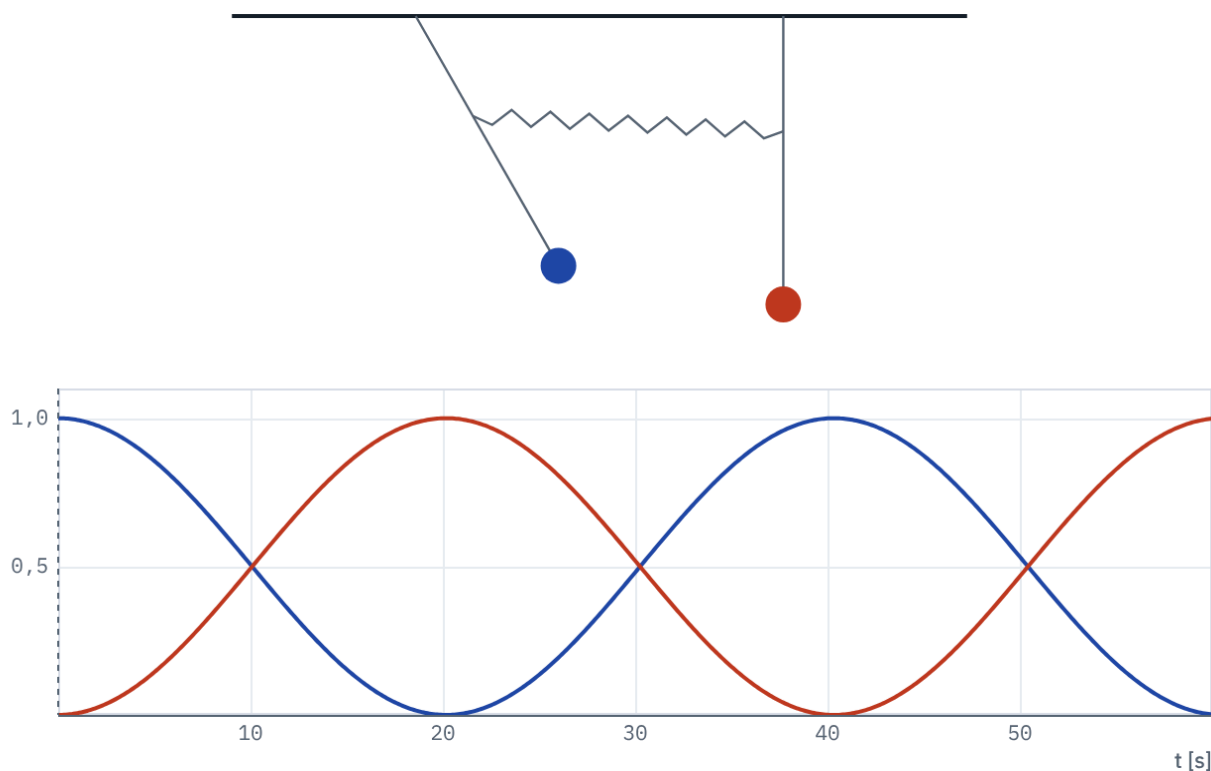
Dla obwodu RLC: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{L/C}$. W latach 40.–60. XX w. budowano z tego powodu elektroniczne komputery analogowe: drgania konstrukcji modelowano obwodem elektrycznym, w którym parametr zmienia się pokrętelem, a odpowiedź odczytuje woltomierzem, zamiast budować i obciążać model ze stali. FLP I-25-4

5.3 Drgania sprzężone

Dwa jednakowe wahadła połączone słabą sprężyną (przyczepioną do ciężarków) to układ dwóch równań. FLP I-49-4 Ma on dwa **mody własne**: wahadła kołyszą się zgodnie (sprężyna się nie odkształca, $\omega_1 = \sqrt{g/l}$) albo przeciwnie (sprężyna pracuje, $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$). Każdy ruch jest sumą tych dwóch modów (lekcja 2.3 Wartości i wektory własne, wartości własne). Gdy wychylimy tylko jedno wahadło, oba mody są wzbudzone jednakowo, a ich suma daje dudnienia: energia powoli przepływa do drugiego wahadła i z powrotem, z okresem $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$.

SYMULACJA 3

Dwa wahadła połączone sprężyną. Wychylamy tylko lewe. Zmieniaj siłę sprężenia: im słabsza sprężyna, tym wolniej energia przepływa do prawego wahadła. Wykres pokazuje energię każdego wahadła w czasie (przybliżenie słabego sprężenia); wychylenia na rysunku są powiększone trzykrotnie.



— lewe wahadło — prawe wahadło

ω_1 (zgodnie) 3,132 rad/s

ω_2 (przeciwnie) 3,288 rad/s

pełne przejście energii 20,2 s

energia lewego 100%

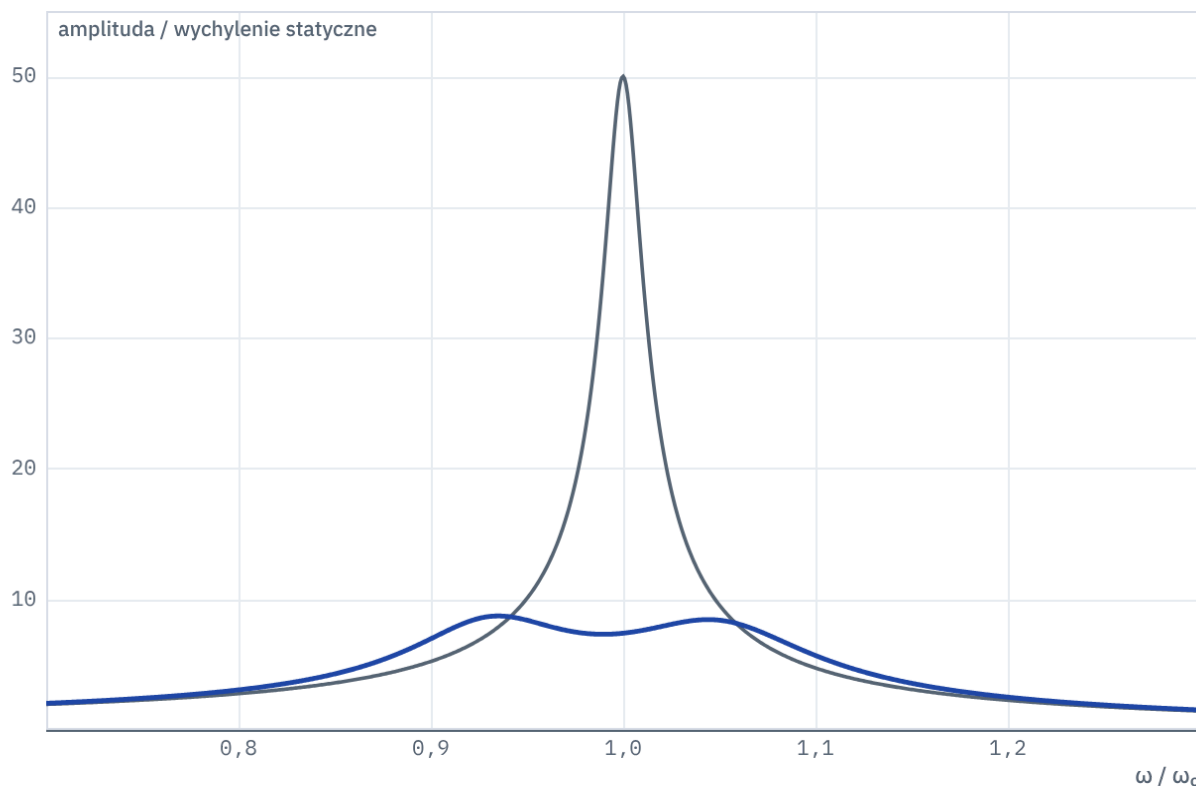
Energia przechodzi do prawego wahadła po 20,2 s i wraca po 40,3 s. To dudnienia dwóch modów o bliskich częstościach.

Stan na rysunku: $k/m = 0,50 \text{ s}^{-2}$, $t = 0,0 \text{ s}$; $\omega_1 = 3,132$, $\omega_2 = 3,288 \text{ rad/s}$; przejście energii po 20,2 s.

Sprężenie z drugim oscylatorem może też *gasić* drgania. Strojony tłumik masowy (ang. TMD) to mała masa na sprężynie, dostrojona do częstotliwości konstrukcji. W pobliżu rezonansu drga ona kilka razy silniej niż konstrukcja, ćwierć okresu za nią (prawie w przeciwfazie do siły wymuszającej), więc ciągnie konstrukcję przeciw sile i odbiera jej energię, a jej własny tłumik zamienia ją w ciepło. Wieżowiec Taipei 101 ma tłumik w postaci kuli o masie ok. 660 t zawieszanej między 87. a 92. piętrem.

SYMULACJA 4

Krzywa rezonansowa konstrukcji (dobroć 50) bez tłumika i z tłumikiem masowym. Zmieniaj stosunek masy tłumika do masy konstrukcji; strojenie i tłumienie tłumika są dobrane optymalnie (wzory Den Hartoga). Zamiast jednego wysokiego szczytu pojawiają się dwa niskie.



— bez tłumika ($Q = 50$) — z tłumikiem masowym

szczyt z tłumikiem 8,7

szczyt bez tłumika 50,0

strojenie f_t / f_0 0,980

tłumienie tłumika ζ_t 0,084

przybliżenie $\sqrt{1 + 2/\mu}$ 10,0

Tłumik o masie 2,0% zmniejsza największą amplitudę 5,7 razy. Zamiast jednego szczytu przy ω_0 są dwa niskie po bokach: układ ma teraz dwa mody.

Stan na rysunku: masa tłumika 2,0% masy konstrukcji; szczyt amplitudy 8,7 (bez tłumika 50).

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 40 min

1 Obwód LC ma cewkę 0,1 H i kondensator 10 μF . Oblicz częstość kątową i częstotliwość drgań.

2 Do obwodu z zadania 5.1 dodano opornik 10 Ω . Oblicz dobroć.

3 Dwa wahadła o długości 1 m połączono sprężyną, dla której $k/m = 0,5 \text{ s}^{-2}$. Oblicz częstotliwości modów i czas, po którym energia przejdzie całkowicie z jednego wahadła do drugiego.

4 Wyjaśnij, dlaczego zasada superpozycji nie obowiązuje dla wahadła przy dużych wychyleniach. Co z tego wynika dla okresu?

5 Oscylator o częstotliwości 3 Hz i dużej dobroci popychamy symetryczną falą prostokątną (siła na przemian $+F_0$ i $-F_0$, po pół okresu) o częstotliwości 1 Hz. Czy wpadnie w rezonans? A przy 1,5 Hz?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

☰ METODA DLA DRGAŃ

1. Znajdź równowagę i zapisz siłę (lub moment siły) dla małego wychylenia od niej.
2. Sprowadź do postaci $a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F(t)$; odczytaj $\omega_0 = \sqrt{c/a}$, $\gamma = b/a$, $Q = \omega_0/\gamma$.
3. Drgania swobodne: rodzaj ruchu z porównania γ i $2\omega_0$; stałe z warunków początkowych.
4. Wymuszenie sinusoidalne: zapis zespolony, $\hat{x} = \frac{F_0/a}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$; amplituda to moduł, faza to argument.
5. Wymuszenie dowolne: rozłóż na sinusoidy (Fourier) i dodaj odpowiedzi.
6. Sprawdzenie: granice $\omega \rightarrow 0$ (odpowiedź statyczna F_0/c) i $\omega \rightarrow \infty$ (bezwładność, $F_0/(a\omega^2)$), jednostki.

Przykład 6.1

Pionowa sprężyna i ciężar

Ciężarek 0,4 kg zawieszono na sprężynie o sztywności 40 N/m. Odciągnięto go 5 cm poniżej położenia równowagi i puszczono. Opisz ruch.

- 1 Równowaga: wydłużenie $mg/k \approx 9,8$ cm. Od tego położenia mierzymy x .
- 2 $m\ddot{x} = -k(x + 0,098) + mg = -kx$: ten sam oscylator. $\omega_0 = 10$ rad/s, $T \approx 0,63$ s.
- 3 $x = 0,05 \cos 10t$ m (w dół dodatnio); $v_{\max} = 0,5$ m/s.

Wynik: drgania o amplitudzie 5 cm i okresie 0,63 s wokół punktu 9,8 cm poniżej końca nienaciągniętej sprężyny.

Sprawdzenie: sprężyna jest cały czas rozciągnięta (od 4,8 do 14,8 cm), więc model liniowy obowiązuje ✓.

Przykład 6.2

Zawieszenie samochodu

Na koło przypada 300 kg, sprężyna ma sztywność 30 kN/m. Jaki amortyzator daje tłumienie 30% krytycznego ($\zeta = \gamma/2\omega_0 = 0,3$)? Jak samochód wraca po najechaniu na garb?

- 1 $\omega_0 = \sqrt{30\,000/300} = 10 \text{ rad/s}$, $f \approx 1,6 \text{ Hz}$.
- 2 $b = 2\zeta\sqrt{km} = 1800 \text{ N}\cdot\text{s/m}$; $Q = 1/(2\zeta) \approx 1,7$.
- 3 $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \approx 9,5 \text{ rad/s}$. Pierwszy przelot (po pół okresu): $e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 0,37$; w każdym pełnym okresie amplituda maleje o czynnik $e^{-2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 0,14$ (przybliżenie $e^{-\pi/Q}$ dałoby 0,15; przy tak silnym tłumieniu jest już niedokładne).

Wynik: $b \approx 1800 \text{ N}\cdot\text{s/m}$. Po garbie nadwozie przelatuje raz przez położenie równowagi (o ok. 37% wychylenia), potem jeszcze o ok. 14% i 5%, więc po dwóch wahaniciach praktycznie się uspokaja.

Sprawdzenie: przy $\zeta = 1$ nie byłoby przelotu, ale zawieszenie twardo przenosiłoby nierówności; przy $\zeta \rightarrow 0$ samochód kołysałby się jak łódka. Kompromis 0,2–0,4 jest typowy ✓.

Przykład 6.3

Kieliszek i śpiewak

Kieliszek ma częstotliwość własną 900 Hz i dobroć 1000. Śpiewak trafia dokładnie w tę częstotliwość. Ile razy amplituda drgań ścianki przekroczy wychylenie, jakie wywołałoby stałe ciśnienie o tej samej wartości? Jak długo trzeba śpiewać?

- 1 W rezonansie amplituda jest $Q = 1000$ razy większa od statycznej.
- 2 Amplituda narasta do stanu ustalonego jak $1 - e^{-\gamma t/2}$; stała czasowa $2/\gamma = 2Q/\omega_0 \approx 0,35 \text{ s}$.
- 3 Po ok. 1 s (trzy stałe czasowe) amplituda osiąga 95% wartości ustalonej.

Wynik: wzmocnienie ok. 1000 razy; trzeba trzymać czysty dźwięk ok. sekundy, z odchyleniem częstotliwości nie większym niż ok. $\pm f_0/2Q \approx \pm 0,5 \text{ Hz}$.

Sprawdzenie: w praktyce udaje się to tylko z kryształowym kieliszkiem i bardzo głośnym, czystym tonem (często ze wzmacniaczem). Dźwięk o 5 Hz za wysoki dałby ok. 11 razy mniejszą amplitudę ✓.

Przykład 6.4

Wybór stacji radiowej

Obwód strojenia ma cewkę $200\ \mu\text{H}$ o oporze $5\ \Omega$. Jaką pojemność trzeba ustawić dla stacji $600\ \text{kHz}$? Jaka jest szerokość pasma i czy sąsiednia stacja, oddległa o $9\ \text{kHz}$, będzie słyszalna?

- 1 $C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} \approx 352\ \text{pF}$.
- 2 $Q = \frac{1}{R} \sqrt{L/C} \approx 151$; $\Delta f = f_0/Q \approx 4\ \text{kHz}$.
- 3 Dla stacji oddległej o $9\ \text{kHz}$: $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0 \Delta\omega$, a $|\hat{x}|$ maleje względem szczytu ok. $\sqrt{1 + (2Q\Delta f/f_0)^2} = \sqrt{1 + 4,5^2} \approx 4,6$ razy.

Wynik: $C \approx 350\ \text{pF}$, pasmo ok. $4\ \text{kHz}$; sąsiednia stacja jest stłumiona ok. $4,6$ razy w amplitudzie (ok. 21 razy w mocy).

Sprawdzenie: to za mało dla dobrego odbioru, dlatego odbiorniki używają kilku obwodów rezonansowych (w superheterodynie: stałe filtry pośredniej częstotliwości) ✓.

Przykład 6.5

Wahadła, które wymieniają się energią

Dwa wahadła o długości $1\ \text{m}$ połączone sprężyną tak, że $k/m = 0,5\ \text{s}^{-2}$. Lewe odchyłono o 10° , prawe stoi. Opisz ruch.

- 1 Mody: $\theta_1 = \theta_2$ z $\omega_1 \approx 3,132$; $\theta_1 = -\theta_2$ z $\omega_2 \approx 3,288\ \text{rad/s}$.
- 2 Warunek początkowy to połowa sumy i połowa różnicy modów: $\theta_L = 5^\circ(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$, $\theta_P = 5^\circ(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$.
- 3 Wzory na sumę cosinusów: $\theta_L = 10^\circ \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \bar{\omega} t$, $\theta_P = 10^\circ \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \sin \bar{\omega} t$.

Wynik: po ok. $20\ \text{s}$ lewe wahadło stoi, a prawe waha się z amplitudą 10° ; po $40\ \text{s}$ odwrotnie.

Sprawdzenie: suma energii jest stała, bo $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ✓ (przy słabym sprzężeniu, gdy energia sprężyny jest mała).

Przykład 6.6

Tłumik masowy

Kładka ma dobroć 50 w drganiach bocznych. Dodajemy tłumik o masie 2% masy drgającej kładki. Według wzorów Den Hartoga optymalne strojenie to $f_t/f_0 = 1/(1 + \mu)$, a optymalne tłumienie $\zeta_t = \sqrt{3\mu/(8(1 + \mu)^3)}$. Oblicz je i oszacuj, ile razy zmaleje największa amplituda.

- 1 $\mu = 0,02$: $f_t/f_0 \approx 0,980$, $\zeta_t \approx 0,084$.
- 2 Szczyt odpowiedzi z optymalnym tłumikiem: ok. $\sqrt{1 + 2/\mu} \approx 10$ razy wychylenie statyczne.
- 3 Bez tłumika: $Q = 50$ razy wychylenie statyczne.

Wynik: tłumik o masie 2% zmniejsza największą amplitudę ok. pięciokrotnie (z tłumieniem własnym konstrukcji prawie sześciokrotnie).

Sprawdzenie: numeryczne rozwiązanie układu dwóch równań bez tłumienia własnego konstrukcji daje szczyt 10,07 ✓; z tłumieniem własnym ($Q = 50$) szczyt spada do ok. 8,7, czyli prawie 6 razy poniżej 50 (symulacja 4). Kładkę Millennium wyposażono w kilkadziesiąt tłumików różnego typu i ponownie otwarto w 2002 r.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Większa amplituda to dłuższy okres.”

Nie dla oscylatora harmonicznego: okres nie zależy od amplitudy. Wahadło odchyła się od tej reguły dopiero przy dużych kątach.

× „W rezonansie amplituda rośnie do nieskończoności.”

Tylko bez tłumienia. Każdy prawdziwy układ ma skończone Q , a amplituda w rezonansie to Q razy odpowiedź statyczna.

× „Oscylator wymuszony drga ze swoją częstotliwością.”

Po zgaśnięciu stanu przejściowego drga z częstotliwością siły. Częstota własna decyduje tylko o tym, jak silnie odpowiada.

× „Mocniejsze tłumienie zawsze szybciej uspokaja układ.”

Powyżej tłumienia krytycznego powrót do równowagi jest coraz wolniejszy.

× „Mikrofalówka grzeje, bo trafia w rezonans cząsteczek wody.”

2,45 GHz nie jest częstotliwością rezonansową wody (zadanie feynmanowskie 7).

× „Żołnierze maszerują po moście nie w nogę, bo most by się zawalił od rezonansu.”

To rozsądna ostrożność, ale nie dlatego, że każdy marsz w nogę jest groźny. Zagrożenie powstaje tylko przy częstotliwości kroku bliskiej częstotliwości własnej i małym tłumieniu, jak w przypadku mostu w Broughton (1831).

8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

- 1 **Zegar w górach.** Dokładny zegar wahadłowy przeniesiono z poziomu morza na wysokość 3000 m. O ile spóźni się w ciągu doby?
- 2 **Wahadło w windzie.** Jak zmieni się okres wahadła w windzie przyspieszającej w górę z przyspieszeniem a ? A w swobodnie spadającej? Jak zachowa się ciężarek na sprężynie?
- 3 **Huśtawka bez popychania.** Dziecko na huśtawce rozkołysuje się samo, kucając i wstając. Z jaką częstotliwością powinno to robić? Dlaczego nie da się w ten sposób zacząć z pozycji spoczynku?
- 4 **Kieliszek a tłumienie palcem.** Kieliszek dzwoni czysto, gdy uderzysz go łyżeczką. Gdy dotkniesz brzegu palcem, dźwięk natychmiast gaśnie. Oszacuj, jak palec zmienia dobroć, i wyjaśnij, dlaczego dotykając kieliszka trudno go rozbić śpiewem.
- 5 **Szerokość linii widmowej.** Atom sodu pozostaje w stanie wzbudzonym średnio ok. 16 ns, zanim wyśle foton (linia 589 nm). Traktując atom jak tłumiony oscylator, oszacuj szerokość linii w hercach i jej dobroć.
- 6 **Odpowiedź na pchnięcie.** Oscylator (ω_0 , małe tłumienie) spoczywa. Uderzamy go krótkim impulsem o popędzie J . Opisz ruch. Co się stanie, gdy uderzymy go drugi raz po pół okresie, a co po pełnym okresie?

- 7 **Mikrofalówka.** Kuchenka mikrofalowa działa na 2,45 GHz. Czy to częstotliwość rezonansowa cząsteczek wody? Dlaczego nie wybrano częstotliwości, przy której woda pochłania najsilniej?
- 8 **Ile razy zadzwoni dzwon.** Dzwon kościelny o tonie 300 Hz słyhać przez ok. 30 s po uderzeniu, zanim natężenie dźwięku spadnie o 60 dB (milion razy). Oszacuj jego dobroć.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Od czego zależy okres ciężarka na sprężynie, a od czego nie?**

Od masy i sztywności; nie od amplitudy ani od g .

- 2 **Co oznacza dobroć $Q = 100$?**

Energia maleje e razy po ok. $100/2\pi \approx 16$ okresach; w rezonansie amplituda jest 100 razy większa od statycznej, a krzywa rezonansowa ma szerokość 1% częstotliwości.

- 3 **Jaka jest faza wychylenia w rezonansie?**

-90° względem siły: siła jest w fazie z prędkością.

- 4 **Które tłumienie najszybciej przywraca równowagę bez przelotu?**

Krytyczne, $\gamma = 2\omega_0$.

- 5 **Co odpowiada masie w obwodzie RLC?**

Indukcyjność L .

- 6 **Dlaczego wolno dodawać odpowiedzi na różne siły?**

Bo równanie jest liniowe (zasada superpozycji).

7 Co to jest mod własny?

Ruch, w którym wszystkie części drgają z tą samą częstością i stałym stosunkiem amplitud.

8 Dlaczego tłumik masowy działa najlepiej, gdy jest dostrojony?

W pobliżu rezonansu konstrukcji drga silnie, ok. ćwierć okresu za nią, i przez swoją sprężynę i tłumik odbiera jej energię; poza strojeniem ledwie się porusza.

DRGANIA SWOBODNE

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \gamma = b/m$$

$$\text{wahadło: } \omega_0 = \sqrt{g/l}; \quad \text{LC: } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$x = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t + \varphi), \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

$$Q = \omega_0/\gamma; \text{ amplituda na okres } \propto e^{-\pi/Q};$$

$$\text{krytyczne: } \gamma = 2\omega_0$$

$$\text{energia: } \frac{1}{2}kA^2, \text{ maleje jak } e^{-\gamma t}$$

WYMUSZENIE I UKŁADY

$$\hat{x} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\text{w rezonansie: } |\hat{x}| = QF_0/k, \text{ faza } -90^\circ; \\ \Delta\omega \approx \gamma$$

$$\text{RLC: } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{dwa sprzężone wahadła: } \omega_1 = \sqrt{g/l}, \quad \omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$$

$$\text{tłumik: } f_t/f_0 = \frac{1}{1+\mu}, \text{ szczyt } \approx \sqrt{1+2/\mu}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 21 (oscylator harmoniczny), 23 (rezonans), 24 (stany przejściowe).
- **Dla chętnych:** rozdz. 22 (algebra, w tym $e^{i\theta}$), 25 (układy liniowe i analogie elektryczne), 49 (mody drgań).

Następny dział: **Układy odniesienia i szczególna teoria względności**. Wahadło w windzie pokazało, że to, co mierzymy, zależy od układu odniesienia. Einstein poszedł dalej: zażądał, by prawa fizyki, w tym prędkość światła, były takie same w każdym układzie inercyjnym. Konsekwencje dla czasu, długości i energii okazały się zaskakujące.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$, $f \approx 3,18 \text{ Hz}$, $T \approx 0,314 \text{ s}$.
2. $k\Delta x = mg$, więc $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/\Delta x} \approx 14,1 \text{ rad/s}$, $T \approx 0,44 \text{ s}$. Masy nie trzeba.
3. $v_{\max} = A\omega_0 = 0,6 \text{ m/s}$ w położeniu równowagi; $a_{\max} = A\omega_0^2 = 12 \text{ m/s}^2$ w punktach zwrotnych.
4. $x(0) = A \cos \varphi = 0,02$, $\dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin \varphi = 0,3$. $A = \sqrt{0,02^2 + (0,3/20)^2} = 2,5 \text{ cm}$, $\tan \varphi = -0,75$, $\varphi \approx -36,9^\circ$.
5. $l = g(T/2\pi)^2 \approx 0,994 \text{ m}$. Na Księżycu $T = 2\pi\sqrt{l/1,62} \approx 4,9 \text{ s}$. Sprężyna z prologu drgałaby tak samo jak na Ziemi.

Zadania • część 2

1. $A = 3 \text{ cm}$, $\omega = 5 \text{ rad/s}$, $\varphi = \pi/3$; $x(0) = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 1,5 \text{ cm}$.
2. $\hat{A} = 3 - 4i$, $|\hat{A}| = 5$, $\delta = \arctg \frac{4}{3} \approx 53,1^\circ$; $5 \cos(\omega t - 53,1^\circ)$.
3. $\dot{x} = i\omega_0 e^{i\omega_0 t}$, $\ddot{x} = (i\omega_0)^2 e^{i\omega_0 t} = -\omega_0^2 x \checkmark$.
4. $s^2 + \gamma s + \omega_0^2 = 0$, $s = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$. Dla $\gamma < 2\omega_0$: $s = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_d$, drgania gasnące jak $e^{-\gamma t/2}$. Dla $\gamma \geq 2\omega_0$: s rzeczywiste ujemne, powrót bez drgań (część 3).
5. $\hat{v} = i\omega \hat{A} = \omega \hat{A} e^{i\pi/2}$: fazor obrócony o 90° do przodu. $\hat{a} = -\omega^2 \hat{A} = \omega^2 \hat{A} e^{i\pi}$: obrócony o 180° .

Zadania • część 3

1. $e^{-\gamma \cdot 10T/2} = \frac{1}{2}$, więc $\gamma = \frac{2 \ln 2}{10T}$ i $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{2\pi \cdot 10}{2 \ln 2} \approx 45$.
2. $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$, $f \approx 1,6 \text{ Hz}$. Krytyczne: $\gamma = 2\omega_0$, $b = 2\sqrt{km} = 5000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$. W praktyce stosuje się ok. 30% tej wartości (przykład 6.2).
3. $\tau_E = 1/\gamma = Q/\omega_0 \approx 1,8 \text{ s}$; liczba drgań $Q/2\pi \approx 800$.
4. Drzwi nie trzaskają, ale zamykają się bardzo długo: przy silnym tłumieniu czas powrotu rośnie jak γ/ω_0^2 . Najszybszy powrót bez przelotu daje tłumienie krytyczne $\gamma = 2\omega_0$.
5. $e^{-\pi/Q} = 0,99$, $Q = \pi/(-\ln 0,99) \approx 310$.

Zadania • część 4

1. $|\hat{x}| = \frac{F_0/m}{\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{F_0}{k} Q$.
2. $\Delta f = f_0/Q = 20 \text{ Hz}$.
3. $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, $C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} \approx 101 \text{ pF}$.
4. 0: ciało podąża za siłą jak przy rozciąganiu sprężyny. -90° : siła w fazie z prędkością, maksymalne pompowanie energii. -180° : ciało porusza się przeciwnie do siły, a amplituda maleje jak $F_0/(m\omega^2)$, bo przeszkadza bezwładność.

5. Pionowo: 2 Hz (każdy krok). Bocznie: 1 Hz, bo środek ciężkości przesuwa się raz w lewo, raz w prawo w ciągu dwóch kroków. Kładka miała boczną częstotliwość własną bliską 1 Hz, a ludzie synchronizowali krok z jej ruchem, więc wymuszenie było rezonansowe i coraz bardziej zgodne w fazie.

Zadania • część 5

1. $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1000 \text{ rad/s}$, $f \approx 159 \text{ Hz}$.
2. $Q = \frac{1}{R} \sqrt{L/C} = \frac{1}{10} \sqrt{10^4} = 10$.
3. $\omega_1 = \sqrt{9,81} \approx 3,13$, $\omega_2 = \sqrt{10,81} \approx 3,29 \text{ rad/s}$. Pełne przekazanie po $\pi/(\omega_2 - \omega_1) \approx 20 \text{ s}$.
4. Siła $-mg \sin \theta$ nie jest proporcjonalna do θ : suma dwóch rozwiązań nie jest rozwiązaniem. Okres zależy wtedy od amplitudy (rośnie: przy 90° o ok. 18%, dział 2).
5. Przy 1 Hz tak: trzecia harmoniczna ma 3 Hz (z amplitudą $1/3$ podstawowej). Przy 1,5 Hz nie: harmoniczne to 1,5; 4,5; 7,5 Hz, a 3 Hz byłoby parzystą harmoniczną, której fala prostokątna nie zawiera. Inaczej jest z krótkimi popchnięciami: ciąg wąskich impulsów zawiera wszystkie harmoniczne, dlatego huśtawkę można rozkołysać, popychając ją co drugi czy co trzeci raz.

Zadania feynmanowskie

1. $T \propto 1/\sqrt{g}$, a $g \propto 1/r^2$, więc $T \propto r$: $\Delta T/T = h/R \approx 4,7 \cdot 10^{-4}$.
2. Zegar spóźnia się ok. 41 s na dobę. W XVII w. Richer zauważył podobny efekt (zegar spóźniał się w Gujanie), co było jedną z pierwszych wskazówek, że Ziemia jest spłaszczona.
1. Wahadło czuje efektywne $g + a$: okres $2\pi\sqrt{l/(g+a)}$, krótszy.
2. W swobodnym spadku $g_{\text{ef}} = 0$: wahadło nie wraca, okres nieskończony.
3. Sprężyna: okres $2\pi\sqrt{m/k}$ bez zmian w obu przypadkach, zmienia się tylko położenie równowagi.
1. Wstawanie w najniższym punkcie (gdzie prędkość i siła naciągu są największe) i kucanie w skrajnych dodaje energię: dwa razy na okres. To rezonans parametryczny: zmienia się parametr (długość wahadła), a nie działa siła zewnętrzna.
2. Z pozycji spoczynku zmiana długości nie wytwarza wychylenia: amplituda rośnie proporcjonalnie do już istniejącej. Potrzebne jest choćby małe zaburzenie.
1. Bez palca dźwięk trwa ok. sekundy przy 900 Hz: $Q \sim 1000$. Z palcem gaśnie w kilkanaście milisekund: $Q \sim 10$.
2. Amplituda w rezonansie jest proporcjonalna do Q , więc palec zmniejsza ją ok. 100 razy. Tłumienie to najskuteczniejsza ochrona przed rezonansem.
1. Energia maleje jak $e^{-t/\tau}$, więc $\gamma = 1/\tau$ i $\Delta f = \gamma/2\pi \approx 10 \text{ MHz}$.
2. $f_0 = c/\lambda \approx 5,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, więc $Q \approx 5 \cdot 10^7$. Kamerton (10^3) i kryształ kwarcu (10^5 – 10^6) mają dobroci o kilka rzędów wielkości mniejsze.
3. Związek $\Delta\omega \cdot \tau = 1$ to w mechanice kwantowej zasada nieoznaczoności energii i czasu (dział 17 „Amplitudy prawdopodobieństwa”).
1. Impuls daje prędkość J/m przy $x = 0$: $x = \frac{J}{m\omega_0} \sin \omega_0 t$ (z dowolnym zanikiem).
2. Po pół okresie ciało porusza się w przeciwną stronę; drugi impuls je zatrzymuje i ruch ustaje.
3. Po pełnym okresie impulsy się sumują: amplituda dwukrotnie większa. Powtarzane co okres dają rezonans; to samo w wersji ciągłej opisuje wzór z części 4.

7. 1. Nie. Cząsteczki wody w cieczy obracają się w polu, ale tłumione zderzeniami nie mają ostrego rezonansu w tym zakresie: straty dielektryczne rosną płynnie z częstotliwością i są największe w okolicach 20 GHz (w temperaturze pokojowej). Obrót cząsteczek wody to układ silnie przetłumiony, jak w części 3.
2. Przy najsilniejszym pochłanianiu mikrofałe ogrzewałyby tylko cienką warstwę na powierzchni. 2,45 GHz wnika na centymetry, a do tego to pasmo ISM, przeznaczone dla urządzeń przemysłowych, naukowych i medycznych.
8. 1. Energia maleje 10^6 razy w 30 s: $e^{-\gamma \cdot 30} = 10^{-6}$, $\gamma = \frac{\ln 10^6}{30} \approx 0,46 \text{ s}^{-1}$.
2. $Q = \omega_0 / \gamma = 2\pi \cdot 300 / 0,46 \approx 4100$. Dzwon wykonuje ok. 9000 drgań, zanim ucichnie.

Fizyka · Dział 6: Drgania, rezonans i układy liniowe · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 21–25. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.