

Grawitacja: jedno prawo dla jabłka i Księżyca

Kepler opisał ruch planet trzema prawami, nie wiedząc, skąd się biorą. Newton pokazał, że wszystkie trzy wynikają z jednego prawa: każde dwa ciała przyciągają się siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości. To samo prawo trzyma Księżyc na orbicie, ściąga jabłko z drzewa, podnosi przy pływy i pozwala zważyć Ziemię, Słońce i Galaktykę. Ten dział prowadzi od praw Keplera do orbit satelitów i do miejsca, w którym prawo Newtona przestaje wystarczać.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, rozdz. 7, 13-4, 9-
7

W TYM DZIALE

- 0 Prolog: Księżyc spada
- 1 Prawa Keplera
- 2 Prawo powszechnego ciążenia
- 3 Pole grawitacyjne dużych ciał
- 4 Orbity i energia
- 5 Pływy i ważenie Wszechświata
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

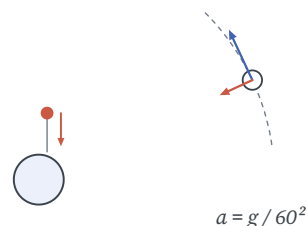
Prolog: Księżyc spada

Księżyc krąży wokół Ziemi po prawie kołowej orbicie o promieniu 384 400 km w ciągu 27,3 doby. Ruch po okręgu wymaga przyspieszenia skierowanego do środka (dział 1 „Ruch i jego przyczyny”): $a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \approx 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. Księżyc nieustannie spada w stronę Ziemi, tylko porusza się jednocześnie w bok tak szybko, że ciągle „chybia”. W ciągu każdej sekundy odchyła się od prostej o ok. 1,4 mm.

Newton porównał to z jabłkiem. Przy powierzchni Ziemi przyspieszenie wynosi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Księżyc jest ok. 60 razy dalej od środka Ziemi niż jabłko. Jeśli siła maleje jak kwadrat odległości, Księżyc powinien przyspieszać z $g/60^2 = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. Dokładnie tyle wychodzi z jego orbity.

FLP I-7-4 Ta sama siła, która ściąga jabłko, trzyma Księżyc.

Pytanie na start. Astronauci na stacji kosmicznej na wysokości 400 km unoszą się w kabinie. Czy grawitacja Ziemi jest tam słaba? Jaki ułamek g działa na nich? Odpowiedź w zadaniu 3.1.



1 Prawa Keplera

Na początku XVII wieku Johannes Kepler przez lata dopasowywał krzywe do najdokładniejszych przedteleskopowych pomiarów położenia Marsa, wykonanych przez Tychona Brahe. Z danych o Marsie wyprowadził dwa pierwsze prawa (1609), a trzecie (1619) z porównania okresów i odległości wszystkich znanych planet. FLP I-7-2

🔊 PRAWA · KEPLERA

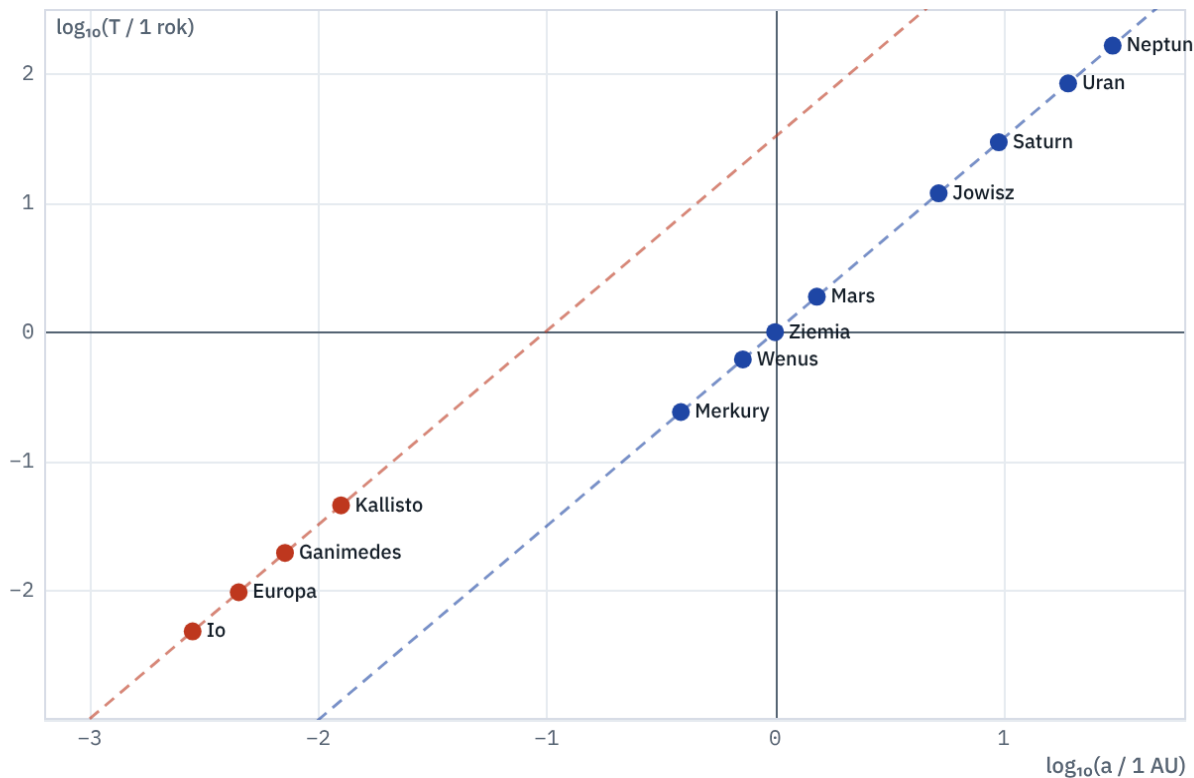
1. Planety poruszają się po elipsach, w których jednym z ognisk jest Słońce (lekcja 0.4 Geometria analityczna i krzywe stożkowe).
2. Promień wodzący planety zakreśla równe pola w równych odstępach czasu.
3. Kwadraty okresów obiegu są proporcjonalne do sześciątów wielkich półosi: $T^2 \propto a^3$.

Drugie prawo poznaliśmy już w dziale 4 „Ruch obrotowy i bryła sztywna”: wynika z zachowania momentu pędu, a więc z tego, że siła jest skierowana do Słońca. Nie mówi nic o tym, jak siła zależy od odległości. Pierwsze i trzecie prawo mówią więcej: oba wymagają prawa $1/r^2$.

Trzecie prawo Keplera dla planet (a w jednostkach astronomicznych, T w latach)

planeta	a [AU]	T [lata]	T^2/a^3
Merkury	0,387	0,241	1,00
Ziemia	1,000	1,000	1,00
Mars	1,524	1,881	1,00
Jowisz	5,203	11,86	1,00
Saturn	9,537	29,46	1,00

SYMULACJA 1 Trzecie prawo Keplera w skali logarytmicznej. Punkty planet układają się na prostej o nachyleniu $3/2$. Przełącz na księżycy Jowisza: też leżą na prostej o tym nachyleniu, ale przesuniętej, bo krążą wokół innej masy. Z przesunięcia odczytujemy stosunek mas Jowisza i Słońca.



— planety (wokół Słońca) — księżycy Jowisza - - prosta o nachyleniu $3/2$

nachylenie (planety) 1,4997

nachylenie (księżycy) 1,5001

$M_{\text{Jowisza}} / M_{\text{Słońca}}$ 1 / 1047

Dwie równoległe proste: ten sam wykładnik $3/2$, inne przesunięcie. Przesunięcie w pionie o Δ oznacza stosunek mas $10^{(-2\Delta)}$: Jowisz ma ok. $1/1047$ masy Słońca.

Stan na rysunku: planety i księżycy Jowisza; nachylenia 1,4997 i 1,5001; masa Jowisza ok. $1/1047$ masy Słońca.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 35 min

1 Wielka półoś orbity Marsa wynosi 1,524 AU. Oblicz z trzeciego prawa okres obiegu Marsa.

2 Kometę Halleya wraca co 76 lat, a w peryhelium zbliża się do Słońca na 0,586 AU. Oblicz wielką półoś, odległość w aphelium i mimośród orbity.

- 3 Ile razy szybciej porusza się kometa Halleya w peryhelium niż w aphelium?
- 4 Sprawdź trzecie prawo dla Jowisza: $a = 5,203$ AU, $T = 11,86$ roku.
- 5 Mimośród orbity Ziemi to 0,0167, a peryhelium przypada na początek stycznia. Oszacuj, o ile dni półrocze od równonocy wiosennej do jesiennej jest dłuższe od drugiego półrocza.

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Prawo powszechnego ciążenia

2.1 Z trzeciego prawa Keplera

Dla orbity kołowej siła potrzebna do ruchu po okręgu to $m \frac{4\pi^2 r}{T^2}$. Jeśli $T^2 = kr^3$, ta siła wynosi $\frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$: jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości i proporcjonalna do masy planety. Trzecia zasada dynamiki mówi, że Słońce jest przyciągane tak samo silnie, więc siła musi też być proporcjonalna do masy Słońca. Newton uogólnił to na każde dwa ciała. (FLP I-7-4, I-7-5)

⚙️ PRAWO · POWSZECHNEGO CIAŻENIA

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Siła działa wzdłuż prostej łączącej środki ciał. Dla orbity kołowej daje $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$; dla eliptycznej r zastępujemy wielką półosią a (część 4).

Newton wykazał też odwrotnie: z prawa $1/r^2$ wynikają wszystkie trzy prawa Keplera, w tym eliptyczny kształt orbit. Dowód geometryczny jest trudny; Feynman poświęcił mu osobny „zagubiony wykład”. My zobaczymy to w części 4 przez energię i moment pędu, a w dziale 1 (część 6.3) widzieliśmy, jak elipsa wychodzi z rachunku krok po kroku.

2.2 Cavendish waży Ziemię

Z ruchu planet znamy tylko iloczyn GM . Żeby poznać masy, trzeba zmierzyć G w laboratorium. Zrobił to Henry Cavendish w 1798 r. wagą skręceń zaprojektowaną przez Johna Michella: dwie małe ołowiane kule na końcach pręta zawieszonego na cienkim drucie przyciągały się z dwiema dużymi kulami. Siła była rzędu 10^{-7} N, czyli ok. dwudziestu miliardowych ($2 \cdot 10^{-8}$) ciężaru małej kuli, ale skręcenie drutu dało się zmierzyć. (FLP I-7-6) Cavendish podał wynik jako średnią

gęstość Ziemi ($5,48 \text{ g/cm}^3$), a G wyliczono z jego danych później. Feynman nazywa to doświadczenie ważeniem Ziemi: z $g = GM/R^2$ wynika $M = gR^2/G$.

SKĄD TO WIEMY?

Prawo $1/r^2$ sprawdzono na wiele sposobów. Ruchy planet zgadzają się z nim z dokładnością do milionowych części (ostatnią rozbieżność, ruch peryhelium Merkurego, wyjaśniła dopiero ogólna teoria względności). W 1846 r. z zaburzeń orbity Urana Le Verrier obliczył położenie nieznanej planety i Neptuna znaleziono w odległości ok. 1° od przewidywanego miejsca. Pomiary laboratoryjne sprawdzają prawo $1/r^2$ aż do odległości poniżej milimetra. G jest jednak najslabiej znaną stałą podstawową: znamy ją z dokładnością do ok. $2 \cdot 10^{-5}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Powtórz rachunek Newtona: oblicz przyspieszenie Księżyca z promienia orbity (384 400 km) i okresu (27,32 doby), i porównaj z $g/60^2$. Ile razy dalej od środka Ziemi niż jabłko jest Księżyc (promień Ziemi 6371 km)?
- 2 Z jaką siłą przyciągają się dwie osoby po 70 kg stojące metr od siebie (traktuj je jak punkty)? Porównaj z ciężarem komara (ok. 2 mg).
- 3 Zważ Ziemię: oblicz jej masę z g , promienia i G . Jaka jest średnia gęstość? Skały na powierzchni mają gęstość ok. 2700 kg/m^3 . Co z tego wynika?
- 4 Zważ Słońce z ruchu Ziemi ($a = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $T = 1 \text{ rok}$).
- 5 W wadze skręceń podobnej do Cavendisha duża kula ma 158 kg, mała 0,73 kg, a odległość ich środków 23 cm. Jaka jest siła przyciągania? Jaki to ułamek ciężaru małej kuli?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

3.1 Kula przyciąga jak punkt

Prawo Newtona dotyczy punktów. Dlaczego wolno było liczyć Ziemię jak punkt w jej środku, skoro jabłko jest tuż przy jej powierzchni? Newton wykazał, a Feynman pokazuje to całą (lekcja 3.3 Całki podwójne i potrójne), że jednorodna powłoka kulista przyciąga ciało na zewnątrz tak, jakby cała jej masa była w środku, a wewnątrz nie przyciąga wcale. FLP I-13-4 Kula to zbiór powłok, więc przyciąga na zewnątrz jak punkt.

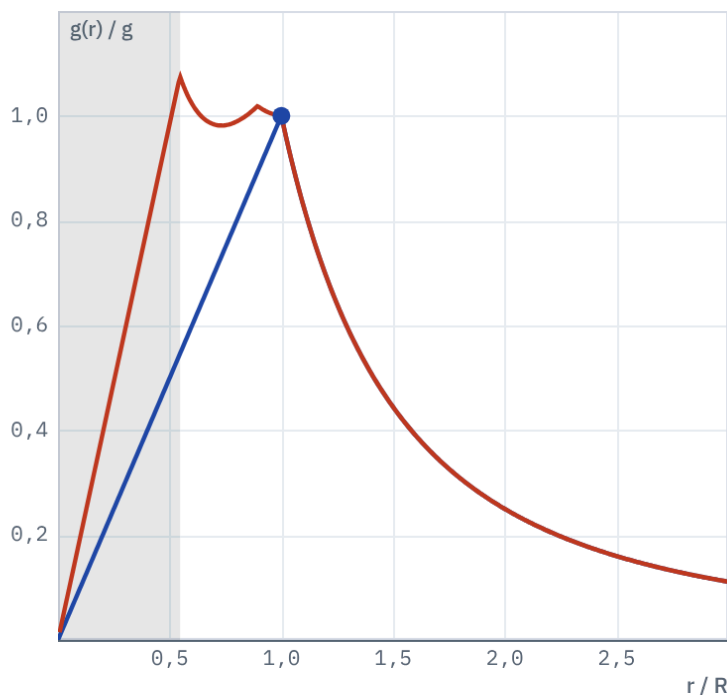
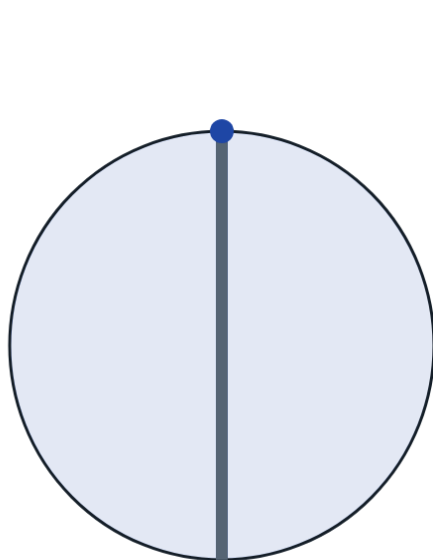
TWIERDZENIE · O POWŁOCE

Na zewnątrz kulistego rozkładu masy: $g(r) = \frac{GM}{r^2}$. Wewnątrz, w odległości r od środka, działa tylko masa $M(r)$ leżąca głębiej: $g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$. Dla jednorodnej kuli $M(r) = M \frac{r^3}{R^3}$, więc $g(r) = g \frac{r}{R}$.

Obie części twierdzenia zachodzą jednocześnie tylko dla prawa $1/r^2$ (samo „na zewnątrz jak punkt” zachodzi jeszcze dla siły rosnącej liniowo z odległością), i to jest jeden z powodów, dla których to prawo jest wyjątkowe. W dziale 13 „Pole elektryczne i prawo Gaussa” zobaczymy, że dla siły elektrycznej, która też maleje jak $1/r^2$, ten sam wynik daje prawo Gaussa (lekcja 3.6 Twierdzenia Greena, Stokesa i Gaussa).

SYMULACJA 2

Pole grawitacyjne Ziemi w funkcji odległości od środka: model jednorodny i model z gęstym jądrem. Uruchom kulę spadającą przez tunel wywiercony przez środek Ziemi (bez oporu): w modelu jednorodnym drga harmonicznym z okresem ok. 84 min, takim samym jak okres satelity tuż nad powierzchnią. W modelu z gęstym jądrem przełot trwa ok. 38,5 min; dokładny model Ziemi (PREM) daje ok. 38 min.



— model jednorodny — model z gęstym jądrem — jądro ($r < 0,55 R$)

czas przełotu (jednorodny) 42,2 min

czas przełotu (z jądrem) 38,5 min

czas od startu 0,0 min

prędkość kuli 0,00 km/s

W jednorodnej Ziemi g maleje liniowo do zera w środku i kula drga harmonicznym: przełot trwa 42,2 min, tyle co pół okrążenia satelity tuż nad powierzchnią.

Stan na rysunku: model jednorodny, 0,0 min od startu; przełot: jednorodny 42,2 min, z jądrem 38,5 min.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

- Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne na wysokości 400 km (stacja kosmiczna)?
Dlaczego astronauta się unosi?

- Pokaż, że wewnątrz jednorodnej kuli $g(r) = g r/R$, i narysuj wykres $g(r)$ od środka do $3R$.

- 3 Przez środek jednorodnej Ziemi wywiercono tunel bez powietrza. Pokaż, że kula wrzucona do tunelu wykonuje drgania harmoniczne. Ile trwa przelot na drugą stronę Ziemi?
- 4 Oblicz g na powierzchni Księżyca (masa $7,34 \cdot 10^{22}$ kg, promień 1737 km).
- 5 Prędkość ucieczki z powierzchni ciała o masie M i promieniu R to $\sqrt{2GM/R}$ (dział 2). Oblicz ją dla Ziemi i Księżyca. Średnia kwadratowa prędkość cząsteczek azotu w 300 K to ok. 520 m/s, a wodoru ok. 1930 m/s. Dlaczego Księżyc nie ma atmosfery, a Ziemia nie ma w niej wodoru?

□□ podstawowe ▤▤ średnie ▨▨▨ feynmanowskie

4 Orbity i energia

4.1 Orbita kołowa

Na orbicie kołowej siła ciężenia jest siłą dośrodkową: $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, więc $v = \sqrt{GM/r}$. Energia kinetyczna to $\frac{GMm}{2r}$, a potencjalna $-\frac{GMm}{r}$ (dział 2 „Energia”). Energia całkowita $E = -\frac{GMm}{2r}$ jest ujemna: satelita jest związany. Paradoks z działu 2: żeby wejść na wyższą orbitę, trzeba dodać energię, a satelita na wyższej orbicie porusza się wolniej.

4.2 Orbity eliptyczne: energia wyznacza pólóś

Dla dowolnej orbity zachowane są energia E i moment pędu L . Rachunek, który tu pomijamy, pokazuje, że tor jest stożkową z ogniskiem w środku przyciągania (lekcja 0.4 Geometria analityczna i krzywe stożkowe): elipsą dla $E < 0$, parabolą dla $E = 0$, hiperbolą dla $E > 0$. Energia wyznacza wielką pólóś, a przy danej energii moment pędu wyznacza kształt (mimośród).

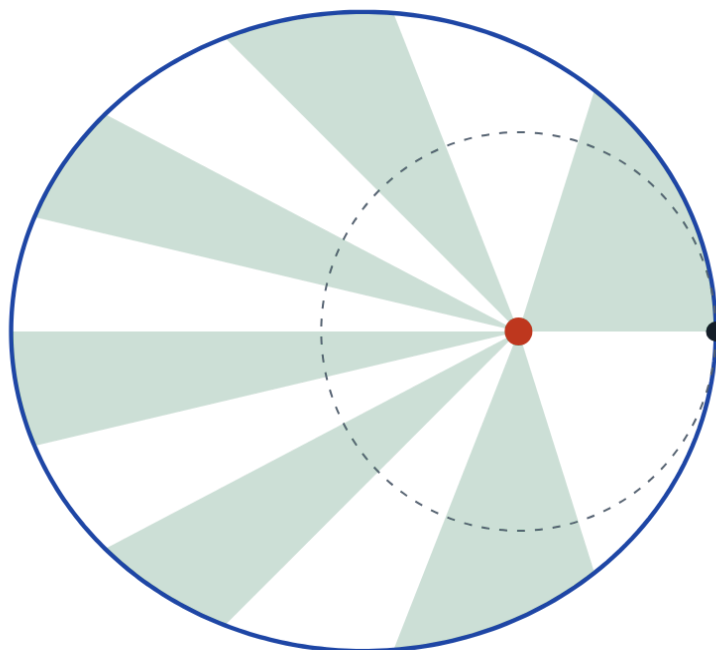
WYNIK · ENERGIA ORBITY I RÓWNANIE VIS-VIVA

$$E = -\frac{GMm}{2a}, \quad v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3.$$

Równanie vis-viva podaje prędkość w każdym punkcie orbity z samej odległości od środka. Dla $a \rightarrow \infty$ daje prędkość ucieczki $\sqrt{2GM/r}$.

SYMULACJA 3

Orbita z warunków początkowych. Satelita startuje w odległości r_0 z prędkością prostopadłą do promienia; zmienia ją w stosunku do prędkości kołowej. Zaciemnione wycinki pokazują pola zakreślane w równych odstępach czasu (II prawo Keplera). Odczyt podaje wielką półoś, mimośród, okres i energię; przy $v \geq \sqrt{2} v_{\text{koł}}$ orbita przestaje być zamknięta.



— orbita — wycinki zakreślane w równych czasach - - - okrąg ($v = v_{\text{koł}}$)

mimośród e 0,440

wielka półoś a / r_0 1,786

okres / okres kołowy 2,386

energia $E / (GMm/r_0)$ -0,280

Szybciej niż kołowa: start w perycentrum, orbita sięga do $2,57 r_0$. Blisko środka satelita leci szybko, daleko wolno, a wycinki i tak mają równe pola.

Stan na rysunku: $v = 1,20 v_{\text{koł}}$; $e = 0,440$, $a = 1,786 r_0$, $E = -0,280 GMm/r_0$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 45 min

- Oblicz prędkość i okres stacji kosmicznej na orbicie kołowej 400 km nad Ziemią ($GM = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$).

- 2  Satelita geostacjonarny okrąży Ziemię raz na dobę gwiazdową (86 164 s) nad równikiem. Oblicz promień i wysokość jego orbity.
- 3  O ile trzeba zwiększyć energię każdego kilograma, żeby przenieść satelitę z orbity kołowej 400 km na geostacjonarną? Ile z tego to przyrost energii potencjalnej?
- 4  Prędkość Ziemi na orbicie to 29,8 km/s. Jaką prędkość względem Słońca musi mieć ciało w odległości 1 AU, żeby uciec z Układu Słonecznego? Kometę przelatującą przez orbitę Ziemi z prędkością 42 km/s. Co można powiedzieć o jej orbicie?
- 5  Sonda leci z Ziemi na Marsa po orbicie transferowej Hohmanna: elipsie stycznej do orbity Ziemi (1 AU) w peryhelium i do orbity Marsa (1,524 AU) w aphelium. Oblicz potrzebny przyrost prędkości przy starcie (względem prędkości Ziemi) i czas lotu.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5 Pływy i ważenie Wszechświata

5.1 Dlaczego dwa przyptywy na dobę

Księżyc przyciąga bliższą stronę Ziemi mocniej niż jej środek, a środek mocniej niż stronę daleką. W układzie spadającym razem ze środkiem Ziemi (bo cała Ziemia „spada” w stronę Księżycy, obiegając wspólny środek masy) zostaje różnica: woda po bliższej stronie jest ciągnięta do Księżycy, a po dalszej od niego. Stąd dwa wybrzuszenia oceanu i dwa przyptywy na dobę.

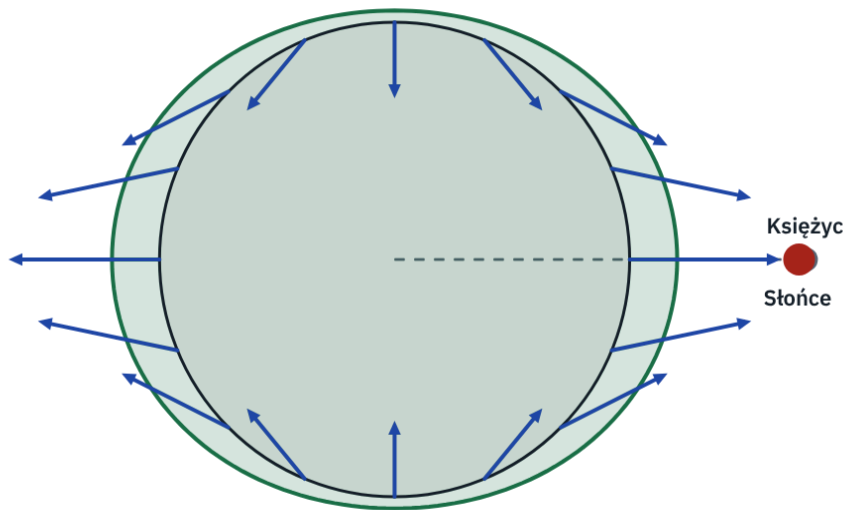
FLP I-7-5

WYNIK · PRZYSPIESZENIE PŁYWOWE

$$\Delta g \approx \frac{2GM_K R}{d^3}.$$

Pływy maleją jak $1/d^3$, a nie $1/d^2$, bo zależą od różnicy pola na średnicy Ziemi. Dlatego Słońce, choć przyciąga Ziemię 180 razy silniej niż Księżyc, daje pływy ponad dwa razy słabsze. Gdy Słońce i Księżyc są w jednej linii (nów, pełnia), pływy się sumują: pływy syzygijne.

SYMULACJA 4 Siły pływowe na powierzchni Ziemi: różnica przyciągania Księżyca (i Słońca) w danym punkcie i w środku Ziemi. Strzałki są mocno powiększone. Obracaj kierunek do Słońca: gdy Słońce i Księżyc są w linii, wybrzuszenia się dodają, gdy pod kątem prostym, częściowo znoszą (pływy kwadraturowe).



— przyspieszenie pływowe (powiększone) — kształt oceanu (przesadzony)
 - - kierunek do Księżyca / Słońca

amplituda pływu (Księżyc = 1) 1,46

pływ słoneczny / księżycowy 0,46

syzygijny / kwadraturowy 2,70

Nów lub pełnia: Słońce i Księżyc w jednej linii, pływy się dodają (pływy syzygijne).

Stan na rysunku: Księżyc i Słońce, kąt 0° ; amplituda 1,46 pływu księżycowego.

5.2 Ważenie planet, gwiazd i galaktyk

Trzecie prawo Keplera $GM = 4\pi^2 a^3 / T^2$ waży ciało centralne, jeśli coś wokół niego krąży: Jowisza z ruchu jego księżyców, układy gwiazd podwójnych, czarną dziurę w centrum Galaktyki z ruchu pobliskich gwiazd. Dla gwiazd krążących wokół centrum galaktyki ten sam rachunek daje masę zawartą wewnątrz orbity. W latach 70. XX w. Vera Rubin i inni zmierzili, że prędkości gwiazd i gazu daleko od centrum galaktyk nie maleją, jak przewiduje prawo Newtona dla widocznej masy,

lecz pozostają prawie stałe. Albo w galaktykach jest dużo niewidocznej materii (ciemna materia), albo prawo grawitacji wymaga zmiany na takich skalach. Dziś większość danych przemawia za pierwszą możliwością, ale natura tej materii pozostaje nieznana.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Oblicz przyspieszenie pływowe od Księżyca ($M = 7,34 \cdot 10^{22}$ kg, $d = 384\,400$ km) i od Słońca ($M = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, $d = 1$ AU) na powierzchni Ziemi. Jaki jest ich stosunek?

- 2 Io krąży wokół Jowisza w odległości 421 700 km z okresem 1,769 doby. Oblicz masę Jowisza.

- 3 Dwie gwiazdy układu podwójnego okrążają wspólny środek masy w odległości 10 AU od siebie z okresem 10 lat. Jaka jest ich łączna masa w masach Słońca?

- 4 Słońce okrąża centrum Galaktyki w odległości ok. 8 kpc ($1 \text{ pc} = 3,09 \cdot 10^{16}$ m) z prędkością ok. 220 km/s. Oszacuj masę Galaktyki wewnątrz orbity Słońca. Gdyby prędkość była taka sama w odległości 16 kpc, ile masy byłoby wewnątrz tej większej orbity?

- 5 W pobliżu Księżyca jego przyciąganie przeważa nad pływowym działaniem Ziemi. Oszacuj promień tego obszaru (sfery Hilla) z warunku, że przyspieszenie od Księżyca GM_K/r^2 równa się różnicy przyspieszeń od Ziemi w układzie obracającym się z Księżycem: $2GM_Zr/d^3$ z różnicy przyciągania plus GM_Zr/d^3 od siły odśrodkowej, razem $3GM_Zr/d^3$.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA GRAWITACYJNA

1. Oszacuj wynik (rzędy wielkości G , mas i odległości bywają zaskakujące).
2. Iloczyn GM zamiast osobno G i M : dla Ziemi $GM = gR^2 = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$.
3. Orbita kołowa: siła ciężenia = siła dośrodkowa; $v = \sqrt{GM/r}$, $T = 2\pi\sqrt{r^3/GM}$.
4. Orbita eliptyczna: energia daje pólś ($E = -GMm/2a$), moment pędu łączy prędkości w perycentrum i apocentrum ($v_p r_p = v_a r_a$), vis-viva daje prędkość w dowolnym punkcie.
5. Wążenie: $GM = 4\pi^2 a^3 / T^2$.
6. Pływy: różnica pola na rozmiarze ciała, $\Delta g \approx 2GMR/d^3$.
7. Sprawdzenie: jednostki, porównanie ze znanymi orbitami (stacja kosmiczna 92 min, Księżyc 27 dni, rok).

Przykład 5.1

Satelity GPS

Satelity GPS okrążają Ziemię dwa razy na dobę gwiazdową. Na jakiej wysokości krążą i z jaką prędkością?

- 1 Oszacowanie: okres 12 h leży między stacją (1,5 h) a satelitą geostacjonarnym (24 h), więc promień też między nimi.
- 2 $T = 43\,082 \text{ s}$; $r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 26\,560 \text{ km}$.
- 3 Wysokość: $26\,560 - 6371 \approx 20\,190 \text{ km}$; prędkość $\sqrt{GM/r} \approx 3,87 \text{ km/s}$.

Wynik: ok. 20 200 km nad Ziemią, 3,9 km/s.

Sprawdzenie: z trzeciego prawa $r_{\text{GPS}} = r_{\text{GEO}}/2^{2/3} = 42\,160/1,587 \approx 26\,560 \text{ km} \checkmark$.

Przykład 5.2

Ważenie Ziemi, krok po kroku

W wadze skręceń mała kula (0,73 kg) w odległości 23 cm od dużej (158 kg) przesuwa się, a ze skręcenia drutu wyznaczono siłę $1,455 \cdot 10^{-7}$ N. Wyznacz G , a z niego masę Ziemi.

- 1 $G = \frac{Fr^2}{Mm} = \frac{1,455 \cdot 10^{-7} \cdot 0,0529}{158 \cdot 0,73} \approx 6,67 \cdot 10^{-11}.$
- 2 $M_Z = \frac{gR^2}{G} = \frac{9,81 \cdot (6,371 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \approx 5,97 \cdot 10^{24}$ kg.

Wynik: $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg², $M_Z \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg.

Sprawdzenie: średnia gęstość 5500 kg/m³, rozsądna dla skał i żelaza ✓.

Przykład 5.3

Kiedy światło nie ucieknie

Oblicz, do jakiego promienia trzeba by ścisnąć Słońce i Ziemię, żeby prędkość ucieczki z powierzchni zrównała się z prędkością światła.

- 1 $\sqrt{2GM/R} = c$, więc $R = 2GM/c^2.$
- 2 Słońce: $R \approx 2,95$ km; Ziemia: $R \approx 8,9$ mm.

Wynik: Słońce o promieniu 3 km, Ziemia wielkości wisienki.

Sprawdzenie: rachunek newtonowski przypadkowo daje dokładnie promień Schwarzschilda z ogólnej teorii względności (sam rachunek newtonowski przeprowadził John Michell w 1783 r.). Interpretacja jest jednak inna: zgodny z doświadczeniem opis czarnych dziur daje dopiero teoria Einsteina ✓.

Przykład 5.4

Orbita transferowa do geostacjonarnej

Rakieta zostawia satelitę na elipsie z perygeum 300 km i apogeum 35 786 km nad Ziemią. Oblicz półoś, mimośród, prędkości w perygeum i apogeum oraz okres. Ile trzeba dodać w apogeum, żeby orbita stała się kołowa?

- 1 $r_p = 6671 \text{ km}$, $r_a = 42\,157 \text{ km}$; $a = 24\,414 \text{ km}$, $e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \approx 0,727$.
- 2 Vis-viva: $v_p \approx 10,16 \text{ km/s}$, $v_a \approx 1,61 \text{ km/s}$; okres $2\pi\sqrt{a^3/GM} \approx 10,5 \text{ h}$.
- 3 Prędkość kołowa na wysokości GEO: $3,07 \text{ km/s}$; w apogeum trzeba dodać $\approx 1,47 \text{ km/s}$.



Wynik: $a \approx 24\,400 \text{ km}$, $e \approx 0,73$, $v_p \approx 10,2 \text{ km/s}$, $v_a \approx 1,6 \text{ km/s}$, $T \approx 10,5 \text{ h}$; manewr w apogeum ok. $1,5 \text{ km/s}$.

Sprawdzenie: moment pędu: $v_p r_p = 10,16 \cdot 6671 \approx 67\,800$, $v_a r_a = 1,61 \cdot 42\,157 \approx 67\,800 \text{ km}^2/\text{s} \checkmark$.

Przykład 5.5

Dwa wybrzuszenia

Oblicz różnicę przyspieszenia od Księżyca między środkiem Ziemi a punktami po bliższej i dalszej stronie. Porównaj z g .

- 1 W środku Ziemi: $GM_K/d^2 \approx 3,32 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$.
- 2 Bliższa strona: $\frac{GM_K}{(d-R)^2} - \frac{GM_K}{d^2} \approx 1,13 \cdot 10^{-6}$; dalsza: $\frac{GM_K}{d^2} - \frac{GM_K}{(d+R)^2} \approx 1,07 \cdot 10^{-6}$.
- 3 Przybliżenie $2GM_K R/d^3 \approx 1,10 \cdot 10^{-6}$ to ich średnia; w stosunku do g : ok. $1,1 \cdot 10^{-7}$.

Wynik: po obu stronach Ziemi efekt jest prawie taki sam (różni się o 5%), skierowany od środka Ziemi: dwa wybrzuszenia.

Sprawdzenie: powierzchnia oceanu układu się wzdłuż powierzchni stałego potencjału: odchylenie rzędu $\Delta g/g \approx 10^{-7}$ na drodze rzędu R daje ok. 0,5 m ✓. Lokalnie pływy są dużo większe (do kilkunastu metrów) z powodu rezonansów w zatokach.

Przykład 5.6

Czy Galileusz mógł zważyć Jowisza?

Ganimedes krąży wokół Jowisza w odległości 1 070 400 km z okresem 7,155 doby. Oblicz masę Jowisza i porównaj z wynikiem z ruchu Io (zadanie 5.2).

- 1 $M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (1,0704 \cdot 10^9)^3}{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot (6,182 \cdot 10^5)^2} \approx 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$.
- 2 Io: $1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$. Zgodność do trzech cyfr.

Wynik: $1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ z obu księżyców.

Sprawdzenie: T^2/a^3 dla Io i Ganimedesa jest taki sam (trzecie prawo dla układu Jowisza) ✓. Galileusz znał okresy księżyców od 1610 r., a ich odległości od Jowisza mierzył kątowno. Do stosunku mas $M_J/M_S = (a/a_J)^3 (T_J/T)^2$ nie potrzeba ani G , ani odległości w metrach, tylko stosunków odległości znanych z geometrii Kopernika. Brakowało mu prawa ciążenia: ten rachunek wykonał dopiero Newton w *Principiach*.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „W kosmosie nie ma grawitacji.”

Na wysokości stacji kosmicznej jest 89% ziemskiej. Nieważkość to swobodny spadek, a nie brak przyciągania.

× „Żeby dogonić statek na tej samej orbicie, trzeba przyspieszyć.”

Przyspieszenie podnosi orbitę i wydłuża okres, więc statek zostaje w tyle. Trzeba zwolnić, zejść niżej, okrążyć szybciej i wrócić (zadanie feynmanowskie 6).

× „Grawitacja Księżyca podnosi wodę tylko po jego stronie.”

Wybrzuszenia są dwa, bo liczy się różnica przyciągania, a nie samo przyciąganie.

× „Cięższe planety krążą szybciej.”

Masa planety się skraca (dopóki jest dużo mniejsza od masy Słońca). Okres zależy tylko od pólasi.

× „W środku Ziemi grawitacja jest największa.”

W środku jest zerowa: masa przyciąga ze wszystkich stron jednakowo.

× „Czarna dziura wciąga wszystko jak odkurzacz.”

Z daleka przyciąga dokładnie tak, jak gwiazda o tej samej masie. Gdyby Słońce stało się czarną dziurą, orbita Ziemi by się nie zmieniła.

Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

- 1 **Armata Newtona i tunel.** Z jaką prędkością trzeba wystrzelić kulę poziomo tuż nad powierzchnią Ziemi (bez powietrza), żeby okrążyła Ziemię? Porównaj okres tego lotu z czasem drgań kuli w tunelu przez środek Ziemi (zadanie 3.3). Dlaczego są równe?

- 2 **Spadająca winda.** Jesteś w windzie, której lina pękła. Czy możesz w jakikolwiek sposób stwierdzić, że spadasz, a nie unosisz się w kosmosie daleko od wszystkiego? A gdyby winda była bardzo duża?
- 3 **Księżyc spada o milimetr.** O ile Księżyc odchyła się od lotu po prostej w ciągu jednej sekundy? Porównaj z jabłkiem spadającym przez sekundę z drzewa.
- 4 **Skok z planetoidy.** Na Ziemi podskakujesz z prędkością ok. 3 m/s. Jak mała musi być kulista planetoida o gęstości 2000 kg/m^3 , żebyś mógł z niej wyskoczyć w kosmos?
- 5 **Grawitacja w kopalni.** W prawdziwej Ziemi gęstość rośnie ku środkowi. Czy w głębokiej kopalni g jest mniejsze, czy większe niż na powierzchni?
- 6 **Śmieci wyrzucone do tyłu.** Astronauta wyrzuca worek ze stacji (orbita kołowa 400 km) do tyłu z prędkością 1 m/s względem stacji. Gdzie będzie worek po jednym okrążeniu: za stacją czy przed nią?
- 7 **Słońce jako czarna dziura.** Gdyby Słońce w jednej chwili zapadło się w czarną dziurę o tej samej masie, co stałoby się z orbitą Ziemi? Po jakim czasie zauważylibyśmy zmianę?
- 8 **Dlaczego doba się wydłuża.** Wybrzuszenia pływowe są przez obrót Ziemi przesunięte nieco przed linię Ziemia–Księżyc. Jaki jest skutek dla obrotu Ziemi i dla orbity Księżyca? Wykorzystaj zasadę zachowania momentu pędu z działu 4.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Ile razy słabsze jest przyciąganie Ziemi na odległości dwóch jej promieni od środka?

Cztery razy.

- 2 Czy okres satelity zależy od jego masy?

Nie (dopóki jest dużo mniejsza od masy Ziemi).

- 3 Dlaczego satelita na wyższej orbicie porusza się wolniej, choć ma większą energię?

Energia potencjalna rośnie dwa razy szybciej niż maleje kinetyczna: $E = -GMm/2r$.

- 4 Co mówi drugie prawo Keplera i z czego wynika?

Równe pola w równych czasach; z zachowania momentu pędu przy sile centralnej.

- 5 Czym różni się orbita o energii ujemnej od orbity o energii dodatniej?

Ujemna: elipsa (związana); dodatnia: hiperbola (ciało odlatuje); zero: parabola.

- 6 Dlaczego Słońce wywołuje słabsze pływy niż Księżyc?

Pływy zależą od M/d^3 : Słońce jest 27 mln razy masywniejsze, ale 390 razy dalej, a $390^3 \approx 59$ mln.

- 7 Jak zważyć planetę?

Zmierzyć okres i póló orbitę jej księżycy: $M = 4\pi^2 a^3 / (GT^2)$.

- 8 Gdzie działa najsilniej grawitacja wewnątrz jednorodnej kuli?

Na powierzchni; wewnątrz maleje liniowo do zera w środku.

PRAWO CIĄŻENIA I POLE

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

$$g = \frac{GM}{R^2}; \text{ Ziemia: } GM = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$\text{wewnątrz jednorodnej kuli: } g(r) = g r/R$$

$$U = -\frac{GMm}{r}; \quad v_{\text{ucieczki}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$\text{pływy: } \Delta g \approx \frac{2GMR}{d^3}$$

ORBITY

$$\text{kołowa: } v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad E = -\frac{GMm}{2r}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \text{ (dwa ciała: } G(M_1 + M_2))$$

$$E = -\frac{GMm}{2a}; \quad v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$$v_p r_p = v_a r_a; \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

$$\text{II prawo: } \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 7 (teoria grawitacji, całość), 13-4 (pole dużych ciał).
- **Dla chętnych:** 9-7 (orbita planety liczona krok po kroku), D. L. Goodstein, J. R. Goodstein, *Feynman's Lost Lecture* (geometryczny dowód eliptyczności orbit).

Następny dział: **Drgania, rezonans i układy liniowe**. Kula w tunelu przez Ziemię i ciężarek na sprężynie spełniają to samo równanie. Okaże się, że to samo równanie, z tłumieniem i siłą wymuszającą, opisuje obwody elektryczne, mosty, atomy pochłaniające światło i zawieszenie samochodu.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $T = a^{3/2} = 1,524^{1,5} \approx 1,88$ roku.
2. $a = 76^{2/3} \approx 17,9$ AU; $Q = 2a - q \approx 35,3$ AU (za orbitą Neptuna); $e \approx 0,967$.
3. Z drugiego prawa (zachowanie momentu pędu) w punktach, w których prędkość jest prostopadła do promienia: $v_p q = v_a Q$, więc $Q/q \approx 60$ razy.
4. $T^2 = 140,7$, $a^3 = 140,9$; stosunek 0,999.
5. Różnica pól to ok. $4abe$, a całe pole πab . Czas jest proporcjonalny do pola, więc różnica półroczy wynosi ok. $\frac{4e}{\pi} T \approx 7,8$ dnia. Rzeczywiście: od 20 marca do 22 września jest 186 dni, a od 22 września do 20 marca 179.

Zadania · część 2

1. $a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \approx 2,723 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$; $g/3600 \approx 2,725 \cdot 10^{-3}$. Stosunek odległości: 60,3.
2. $F = G \cdot 70^2/1^2 \approx 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ N}$. Komar waży $2 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81 \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ N}$, ok. 60 razy więcej.
3. $M = gR^2/G \approx 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $\bar{\rho} \approx 5500 \text{ kg/m}^3$, dwa razy więcej niż skały powierzchniowe. Wnętrze musi być znacznie gęstsze: Ziemia ma żelazne jądro (zgodnie z momentem bezwładności z działu 4).
4. $M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \approx 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, ok. 333 000 mas Ziemi.
5. $F \approx 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ N}$, ok. $2 \cdot 10^{-8}$ ciężaru małej kuli. Dlatego potrzebna była waga skręceń, w której nawet tak mała siła daje mierzalny obrót, oraz osłona przed prądami powietrza.

Zadania · część 3

1. $g' = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \approx 8,7 \text{ m/s}^2$, ok. 89% g . Astronauci i stacja spadają razem z tym samym przyspieszeniem (swobodny spadek), więc względem siebie nic nie ważą.
2. $M(r) = M(r/R)^3$, więc $g(r) = \frac{GMr^3/R^3}{r^2} = \frac{GM}{R^2} \frac{r}{R}$. Wykres: prosta od zera do g przy $r = R$, potem $g(R/r)^2$: $g/4$ przy $2R$, $g/9$ przy $3R$.
3. Siła $-mgx/R$ jest proporcjonalna do wychylenia. Okres $2\pi\sqrt{R/g} \approx 84$ min, przelot (pół okresu) ok. 42 min. Kula przelatuje przez środek z prędkością $\sqrt{gR} \approx 7,9 \text{ km/s}$.
4. $g_K \approx 1,62 \text{ m/s}^2$, ok. 1/6 ziemskiego.
5. Ziemia: 11,2 km/s; Księżyc: 2,4 km/s. Gaz ucieka, gdy prędkość ucieczki jest mniej niż ok. 6 razy większa od średniej kwadratowej prędkości cząsteczek (szybsze cząsteczki z ogona rozkładu uciekają przez miliardy lat). Dla Księżyca i azotu stosunek to 4,6, dla Ziemi i wodoru 5,8 (a w gorącej górnej atmosferze mniej): oba gazy z czasem uciekły. Dla Ziemi i azotu stosunek to 22.

Zadania · część 4

1. $r = 6771 \text{ km}$; $v = \sqrt{GM/r} \approx 7,67 \text{ km/s}$; $T = 2\pi r/v \approx 92$ min: ok. 16 okrążeń na dobę.
2. $r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42\,160 \text{ km}$, wysokość ok. 35 790 km, prędkość 3,07 km/s.

3. $\Delta E = \frac{GM}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx 24,7 \text{ MJ/kg}$. Energia potencjalna rośnie o dwa razy tyle, 49,4 MJ/kg, a kinetyczna maleje o 24,7 MJ/kg.
4. Ucieczka: $\sqrt{2} \cdot 29,8 \approx 42,1 \text{ km/s}$. Komety ma energię bliską zera, a orbita jest prawie paraboliczna. Przy dokładnie 42,0 km/s byłaby jeszcze związana ($a \approx 87 \text{ AU}$, aphelium ok. 170 AU), ale wynik jest bardzo czuły: przy 42,1 km/s $a \approx 490 \text{ AU}$. Komety z obłoku Oorta (tysiące AU) mają na orbicie Ziemi prędkość prawie równą prędkości ucieczki.
5. $a = 1,262 \text{ AU}$. $v_p = \sqrt{GM_S(2/r_1 - 1/a)} \approx 32,7 \text{ km/s}$, więc $\Delta v_1 \approx 2,9 \text{ km/s}$ ponad prędkość Ziemi. Czas: $\frac{1}{2}a^{3/2} \text{ lat} \approx 259 \text{ dni}$. Przy Marsie sonda ma 21,5 km/s, a Mars 24,1 km/s: bez kolejnego $\Delta v \approx 2,7 \text{ km/s}$ nie zostanie na jego orbicie. Więcej w gałęzi Astronautyka.

Zadania · część 5

1. Księżyc: $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$ (ok. $10^{-7}g$); Słońce: $5,1 \cdot 10^{-7}$; stosunek Słońce/Księżyc $\approx 0,46$.
2. $M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \approx 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$, ok. 318 mas Ziemi i 1/1050 masy Słońca.
3. $10^3/10^2 = 10$ mas Słońca.
4. $M = v^2 r / G \approx 1,8 \cdot 10^{41} \text{ kg} \approx 9 \cdot 10^{10}$ mas Słońca. Przy stałej prędkości $M \propto r$: w 16 kpc dwa razy więcej, choć gwiazd i gazu przybywa tam niewiele. To jeden z argumentów za ciemną materią.
5. $r = d \left(\frac{M_K}{3M_Z} \right)^{1/3} \approx 61\,500 \text{ km}$. Statki lecące na Księżyc wchodzą w obszar jego przewagi grawitacyjnej dopiero w ostatniej szóstej części drogi.

Zadania feynmanowskie

1. 1. $v = \sqrt{gR} \approx 7,9 \text{ km/s}$; okres $2\pi\sqrt{R/g} \approx 84 \text{ min}$.
 2. Tunel w jednorodnej Ziemi: ten sam okres. Ruch po okręgu to złożenie dwóch drgań harmonicznym w prostokątnych kierunkach. Rzut kuli krążącej po orbicie na średnicę porusza się tak, jak kula w tunelu: składowa przyspieszenia wzdłuż średnicy to $g x/R$.
 3. To samo dotyczy tunelu wzdłuż dowolnej cięciwy: każdy prosty tunel przez jednorodną Ziemię przebywa się w ok. 42 min („pociąg grawitacyjny”).
2. 1. W małej windzie nie: wszystko spada z tym samym przyspieszeniem, więc względem windy nic się nie dzieje (zasada równoważności Einsteina).
 2. W bardzo dużej windzie tak: przedmioty po bokach zbliżają się do siebie (siły są skierowane do środka Ziemi), a górne i dolne oddalają (pole słabnie z wysokością). To siły pływowe: jedyny lokalny ślad grawitacji, którego nie da się usunąć zmianą układu odniesienia.
3. 1. $\frac{1}{2}at^2$ z $a = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$: ok. 1,36 mm.
 2. Jabłko: $\frac{1}{2}g \cdot 1^2 \approx 4,9 \text{ m}$, ok. 3600 razy więcej, czyli 60^2 . Tak Newton sprawdzał prawo $1/r^2$.
4. 1. $v = R\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho}$, więc $R = 3/\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho} \approx 2,8 \text{ km}$.
 2. Planetoida o średnicy poniżej ok. 6 km. Na takich ciałach (np. Ryugu, ok. 0,9 km, po którym japońskie łaziki MINERVA poruszały się skokami) trzeba uważać na każdy ruch.
5. 1. Zbliżenie do środka zwiększa g o ok. $2gh/R$. Ubyła powłoka zmniejsza je o $4\pi G\rho_s h$.
 2. g rośnie, gdy $\rho_s < \frac{2}{3}\bar{\rho} \approx 3700 \text{ kg/m}^3$. Skorupa ma ok. 2700, więc w kopalniach g lekko rośnie (zmierzono to w XIX w.). Małeć zaczyna dopiero w jądrze.

6.
 1. Worek ma mniejszą prędkość, więc jego orbita ma mniejszą półoś: o ok. 1,8 km.
 2. Najpierw worek zostaje w tyle i opada (do ok. 3,5 km niżej), potem wyprzedza stację. Mniejsza półoś to krótszy okres: o ok. 2,2 s. Worek wraca w punkt wyrzucenia wcześniej niż stacja, więc jest *przed* nią, ok. 17 km.
 3. Rzucony do tyłu ląduje z przodu. Tak samo statek, który chce dogonić stację, musi najpierw zwolnić.
7.
 1. Orbita by się nie zmieniła: na zewnątrz kulistego rozkładu masy pole zależy tylko od masy (twierdzenie o powłoce).
 2. Zauważylibyśmy po ok. 8 min 20 s, bo tyle leci światło. Potem zrobiłoby się ciemno i zimno, ale grawitacyjnie nic by się nie stało.
8.
 1. Księżyc przyciąga bliższe wybrzuszenie, wysunięte do przodu, i hamuje obrót Ziemi: doba wydłuża się o ok. 2 ms na stulecie.
 2. Wybrzuszenie przyciąga Księżyc do przodu i dodaje mu momentu pędu: Księżyc oddala się o ok. 3,8 cm rocznie (zmierzono to laserem odbijanym od luster pozostawionych przez misję Apollo).
 3. Moment pędu układu Ziemia–Księżyc jest zachowany, a energia przechodzi w ciepło tarcia wody. Obrót Księżyca został w ten sam sposób dawno temu spowolniony, aż okres obrotu zrównał się z okresem obiegu (synchronizacja pływowa): dlatego zawsze widzimy tę samą stronę.

Fizyka · Dział 5: Grawitacja i orbity · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 7, 9-7, 13-4. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.