

Obrót: drugi rodzaj ruchu

Środek masy rzuconego młotka leci po paraboli, a sam młotek wokół niego koziołkuje. Ruch każdej bryły to ruch środka masy plus obrót. Ten dział buduje dla obrotu ten sam zestaw narzędzi, który znamy z ruchu postępowego: kąt zamiast położenia, moment siły zamiast siły, moment bezwładności zamiast masy i moment pędu zamiast pędu. Na końcu czeka trzecia wielkość zachowana i żyroskop, który zamiast się przewrócić, krąży.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, rozdz. 18, 19-3,
19-4, 20 (w tym
20-4)

W TYM DZIALE

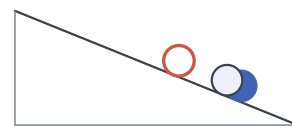
- 0 Prolog: wyścig puszek
- 1 Kąt, prędkość kątowna, przyspieszenie kątowne
- 2 Moment siły i moment pędu
- 3 Moment bezwładności
- 4 Dynamika bryły: obrót i toczenie
- 5 Zasada zachowania momentu pędu i żyroskop
- 6 Metoda i przykłady rozwiązywane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: wyścig puszek

Na pochylonej desce stawiamy obok siebie trzy przedmioty o tym samym promieniu: pełną puszkę konserwy, pustą rurkę (obrzecz) i kulkę. Puszczamy je jednocześnie. Spadające swobodnie ciała przyspieszają jednakowo (dział 1 „Ruch i jego przyczyny”), a klocek zsuwający się bez tarcia przyspieszałby z $g \sin \alpha$ niezależnie od masy. Tymczasem toczące się ciała docierają do mety w ustalonej kolejności: najpierw kulka, potem pełna puszka, a obręcz na końcu. Wynik nie zależy ani od masy, ani od promienia, tylko od kształtu.

Zasada zachowania energii z działu 2 „Energia” podpowiada wyjaśnienie: energia potencjalna zamienia się w ruch postępowy i w obrót. Ciało, które musi „opłacić” więcej obrotu, ma mniej na ruch do przodu. Ile dokładnie, zależy od tego, jak daleko od osi leży jego masa. Żeby to policzyć, potrzebujemy pojęcia momentu bezwładności.

Pytanie na start. Puszka z gęstym pasztetem i puszka z zamrożoną zupą o tej samej masie i wymiarach (w obu zawartość obraca się razem z puszką) staczają się z tej samej równi. Czy przyjadą razem? A puszka z płynną zupą? Wróć do tego po części 4 (i zadaniu feynmanowskim 2).



obrzecz · walec · kula

Kąt, prędkość kątowa, przyspieszenie kątowe

Bryła sztywna to ciało, którego punkty zachowują stałe wzajemne odległości. Obrót wokół ustalonej osi opisuje jedna liczba: kąt θ , o jaki obróciła się bryła, mierzony w radianach (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne). Każdy punkt w odległości r od osi zakreśla łuk $s = r\theta$.

FLP I-18-2

DEFINICJA · RUCH OBROTOWY WOKÓŁ STAŁEJ OSI

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad v = \omega r, \quad a_{\text{st}} = \varepsilon r, \quad a_{\text{dośr}} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

ω (rad/s) to prędkość kątowa, ε (rad/s²) przyspieszenie kątowe. Jeden obrót na sekundę to 2π rad/s.

Wszystkie wzory ruchu jednostajnie zmiennego z działu 1 przenoszą się wprost: $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$. Kąt pełni rolę położenia, ω prędkości, a ε przyspieszenia. Tę analogię będziemy rozwijać przez cały dział.

Prędkość kątowa ma też kierunek: wektor $\vec{\omega}$ leży na osi obrotu, a jego zwrot wyznacza reguła prawej dłoni (palec wzdłuż ruchu, kciuk wzdłuż $\vec{\omega}$). Prędkość punktu to wtedy $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (iloczyn wektorowy, lekcja 1.1 Wektory).

⚠️ PUŁAPKA · STOPNIE I OBROTY NA MINUTĘ

Wzory $v = \omega r$ i $a = \omega^2 r$ działają tylko dla ω w radianach na sekundę. Silnik kręcący się z prędkością 3000 obr/min ma $\omega = 3000 \cdot 2\pi/60 \approx 314$ rad/s, a nie 3000 ani 50. Tę samą pułapkę spotkasz przy pochodnych funkcji trygonometrycznych.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Płyta winylowa obraca się z prędkością $33\frac{1}{3}$ obr/min. Oblicz ω oraz prędkość i przyspieszenie punktu odległego o 15 cm od środka.
- 2 Ziemia obraca się raz na dobę gwiazdową (86 164 s). Z jaką prędkością porusza się punkt na równiku, a z jaką w Warszawie (szerokość $52,2^\circ$)? Jakie jest przyspieszenie dośrodkowe na równiku?
- 3 Wirówka laboratoryjna obraca się z prędkością 10 000 obr/min. Ile „g” działa na próbkę 10 cm od osi?
- 4 Rower jedzie z prędkością 10 m/s, a koło o promieniu 0,35 m toczy się bez poślizgu. Jaka jest prędkość kątowna koła? Jak szybko poruszają się względem drogi punkt styku z ziemią i najwyższy punkt obręczy?
- 5 Koło szlifierki obraca się z prędkością 600 obr/min i po wyłączeniu zatrzymuje się równomiernie w ciągu 10 s. Oblicz przyspieszenie kątowe i liczbę obrotów do zatrzymania.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ feynmanowskie

2 Moment siły i moment pędu

2.1 Dźwignia: co obraca ciało

Drzwi łatwo otworzyć, pchając przy klamce, i bardzo trudno, pchając przy zawiasach. O obrocie decyduje nie sama siła, tylko siła razy ramię: odległość osi od prostej, wzdłuż której działa siła. Feynman wyprowadza to z zasady prac przygotowanych (dział 2): obracając ciało o mały kąt $\Delta\theta$, siła przyłożona w odległości r wykonuje pracę $F_{\perp} r \Delta\theta$. Wielkość $F_{\perp} r$ gra w obrocie rolę siły.

FLP I-18-2

DEFINICJA · MOMENT SIŁY

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad |\vec{\tau}| = rF \sin \varphi = F \cdot (\text{ramię}).$$

Praca momentu siły przy obrocie o kąt $d\theta$: $dW = \tau d\theta$. Jednostka: N·m (ale nie dżul, choć wymiar ten sam).

Bryła jest w równowadze, gdy suma sił i suma momentów sił (względem dowolnego punktu) są zerowe. Drugi warunek to prawo dźwigni Archimedes: $F_1 r_1 = F_2 r_2$.

2.2 Moment pędu

Dla punktu materialnego definiujemy moment pędu względem wybranego punktu O . Pochodna iloczynu wektorowego daje $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$, a pierwszy składnik znika, bo wektor pomnożony wektorowo przez siebie daje zero. FLP I-18-3, I-20-1

PRAWO · MOMENT PĘDU I MOMENT SIŁY

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}.$$

Dla układu punktów momenty sił wewnętrznych znoszą się parami (gdy siły wzajemnie działają wzdłuż prostej łączącej punkty), więc $\frac{d\vec{L}_{\text{całk}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{zewn}}$. To obrotowy odpowiednik $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ z działu 3 „Pęd, zderzenia i środek masy”.

Moment pędu ma nawet ciało poruszające się po prostej, jeśli prosta nie przechodzi przez O : $L = mv \cdot d$, gdzie d to odległość O od toru. W ruchu bez sił L jest stałe, bo stałe są v i d . To załączek drugiego prawa Keplera (część 5).

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Kluczem o długości 25 cm dokręcasz śrubę, działając siłą 200 N na końcu klucza. Jaki moment siły uzyskasz, ciągnąc prostopadłe do klucza, a jaki pod kątem 60° do niego?
- 2 Dziecko o masie 30 kg siedzi na huśtawce-ważce 1,5 m od osi. Gdzie musi usiąść rodzic o masie 75 kg, żeby huśtawka była w równowadze?
- 3 Jednorodna belka o długości 4 m i masie 50 kg leży na dwóch podporach na końcach. 1 m od lewego końca stoi skrzynia 80 kg. Jakie siły działają na belkę w podporach?

- 4 Porównaj moment pędu Ziemi w ruchu wokół Słońca ($v = 29,8 \text{ km/s}$, $r = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$) z momentem pędu jej obrotu wokół osi ($I = 0,331MR^2$, $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R = 6371 \text{ km}$).
- 5 Pokaż, że jeśli siła działająca na punkt jest zawsze skierowana do ustalonego punktu O (siła centralna), to moment pędu względem O jest stały. Jakie siły w przyrodzie są centralne?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Moment bezwładności

3.1 Energia i moment pędu bryły

Punkt bryły w odległości r_i od osi ma prędkość ωr_i . Energia kinetyczna obrotu i moment pędu wzdłuż osi to więc sumy (całki), w których występuje ta sama wielkość: masa ważona kwadratem odległości od osi. (FLP I-19-3, I-19-4)

🔧 DEFINICJA · MOMENT BEZWŁADNOŚCI

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm; \quad E_{\text{obr}} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad L = I \omega.$$

I gra w obrocie rolę masy: $E_k = \frac{1}{2} m v^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} I \omega^2$, $p = m v \leftrightarrow L = I \omega$. Ale w odróżnieniu od masy zależy od wyboru osi.

Uwaga: dla bryły niesymetrycznej wektor $\vec{L}$ nie musi być równoległy do $\vec{\omega}$. W ogólności $\vec{L} = \hat{I} \vec{\omega}$, gdzie $\hat{I}$ to symetryczna macierz (tensor) momentu bezwładności (lekcja 2.3 Wartości i wektory własne). Wzdłuż trzech prostopadłych osi głównych $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. Niewyważone koło samochodu „bije”, bo jego $\vec{L}$ obraca się razem z kołem, a to wymaga zmiennego momentu siły od łożysk.

(FLP I-20-4)

3.2 Momenty bezwładności prostych brył

Dla obręczy o masie M i promieniu R cała masa jest w odległości R : $I = MR^2$. Dla pełnego walca (krążka) sumujemy pierścienie o promieniu r i masie $dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$: $I = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r dr = \frac{1}{2} MR^2$. Mniej masy daleko od osi, mniejszy moment bezwładności.

Momenty bezwładności (oś przez środek masy, chyba że podano inaczej)

bryła	oś	I
obręcz, cienka rura	oś symetrii	MR^2
walec pełny, krążek	oś symetrii	$\frac{1}{2}MR^2$
kula pełna	średnica	$\frac{2}{5}MR^2$
sfera (cienka powłoka)	średnica	$\frac{2}{3}MR^2$
pręt o długości L	prostopadła, przez środek	$\frac{1}{12}ML^2$
pręt o długości L	prostopadła, przez koniec	$\frac{1}{3}ML^2$

TWIERDZENIE · STEINERA (O OSIACH RÓWNOLEGLYCH)

$$I = I_{\text{śm}} + Md^2,$$

gdzie $I_{\text{śm}}$ to moment bezwładności względem równoległej osi przez środek masy, a d to odległość między osiami. Przykład: pręt względem końca: $\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$.

Dowód jest krótki: $\int (\vec{d} + \vec{\rho})^2 dm = Md^2 + 2\vec{d} \cdot \int \vec{\rho} dm + \int \rho^2 dm$, gdzie $\vec{d}$ i $\vec{\rho}$ to rzuty (na płaszczyznę prostopadłą do osi) położenia środka masy względem osi i położenia dm względem środka masy; środkowa całka jest zerowa z definicji środka masy (dział 3 „Pęd, zderzenia i środek masy”).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

- 1 Pręt o długości 1 m i masie 2 kg. Oblicz moment bezwładności względem osi przez środek i przez koniec. Sprawdź twierdzeniem Steinera.
- 2 Wyprowadź całką moment bezwładności pręta względem osi przez jego koniec.
- 3 Koło zamachowe to stalowy krążek o masie 100 kg i promieniu 0,5 m, obracający się z prędkością 3000 obr/min. Ile energii magazynuje? Wyraż ją w kWh.
- 4 Wyprowadź $I = \frac{2}{5}MR^2$ dla kuli, składając ją z cienkich krążków prostopadłych do osi.

- 5 Zmierzony moment bezwładności Ziemi to $0,331MR^2$. Co to mówi o jej budowie? Ile energii kinetycznej ma obrót Ziemi?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

4 Dynamika bryły: obrót i toczenie

4.1 Druga zasada dla obrotu

Dla bryły obracającej się wokół stałej osi $L = I\omega$, więc z $dL/dt = \tau$:

🔑 PRAWO · DYNAMIKA OBROTU WOKÓŁ STAŁEJ OSI

$$\tau = I\varepsilon.$$

Ruch bryły swobodnej: środek masy porusza się zgodnie z $M\vec{a}_{\text{śm}} = \vec{F}_{\text{zewn}}$ (dział 3), a obrót wokół środka masy zgodnie z $\tau_{\text{śm}} = I_{\text{śm}}\varepsilon$ (w ruchu płaskim), nawet gdy środek masy przyspiesza.

4.2 Toczenie bez poślizgu

Toczenie bez poślizgu wiąże oba ruchy: punkt styku chwilowo stoi, więc $v_{\text{śm}} = \omega R$ i $a_{\text{śm}} = \varepsilon R$. Energia kinetyczna toczącego się ciała to suma ruchu postępowego środka masy i obrotu wokół niego:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{śm}}\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2\left(1 + \frac{I_{\text{śm}}}{MR^2}\right).$$

Oznaczmy $k = I_{\text{śm}}/(MR^2)$: obręcz $k = 1$, walec $\frac{1}{2}$, kula $\frac{2}{5}$. Na równi o wysokości h zasada zachowania energii (tarcie przy toczeniu bez poślizgu nie wykonuje pracy, bo punkt styku stoi) daje

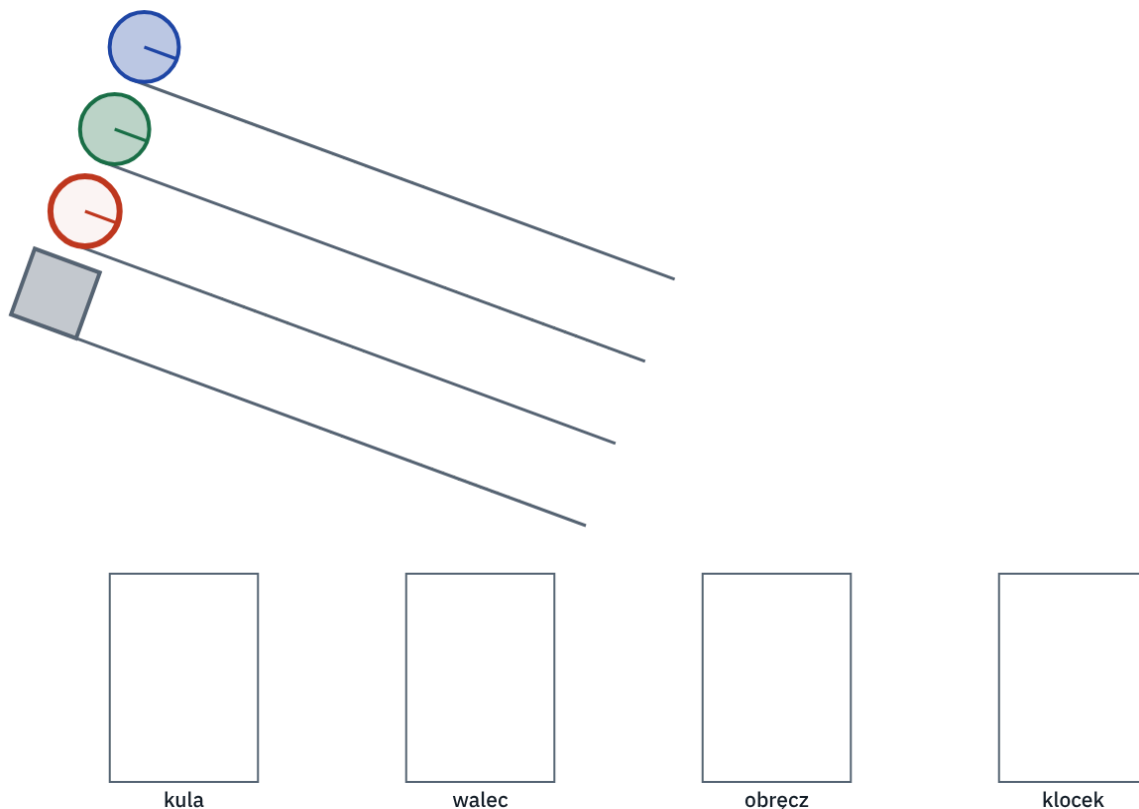
🔑 WYNIK · TOCZENIE PO RÓWNI

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}, \quad a = \frac{g \sin \alpha}{1+k}.$$

Masa i promień się skracają. Kolejność w wyścigu z prologu: kula ($k = 0,4$), walec ($0,5$), obręcz (1).

SYMULACJA 1

Wyścig na równi: kula, walec, obręcz i klocek zsuwający się bez tarcia. Ustaw kąt nachylenia i uruchom wyścig. Słupki pokazują, jak energia każdego ciała dzieli się na ruch postępowy i obrót. Zmiana kąta zmienia czasy, ale nie kolejność.



— kula — walec — obręcz — klocek (bez tarcia)

— słupki: ciemna część to ruch postępowy, jasna to obrót

kula: czas 1,29 s

walec: czas 1,34 s

obroż: czas 1,54 s

klocek: czas 1,09 s

kula: prędkość na dole 3,10 m/s

Uruchom wyścig. Kolejność: klocek bez tarcia, kula, walec, obręcz, niezależnie od kąta, masy i promienia.

Stan na rysunku: $\alpha = 20^\circ$, $t = 0,00$ s; czasy zjazdu 2 m: kula 1,29 s, walec 1,34 s, obręcz 1,54 s, klocek 1,09 s.

⚠️ PUŁAPKA · TARCIE, KTÓRE NIE HAMUJE

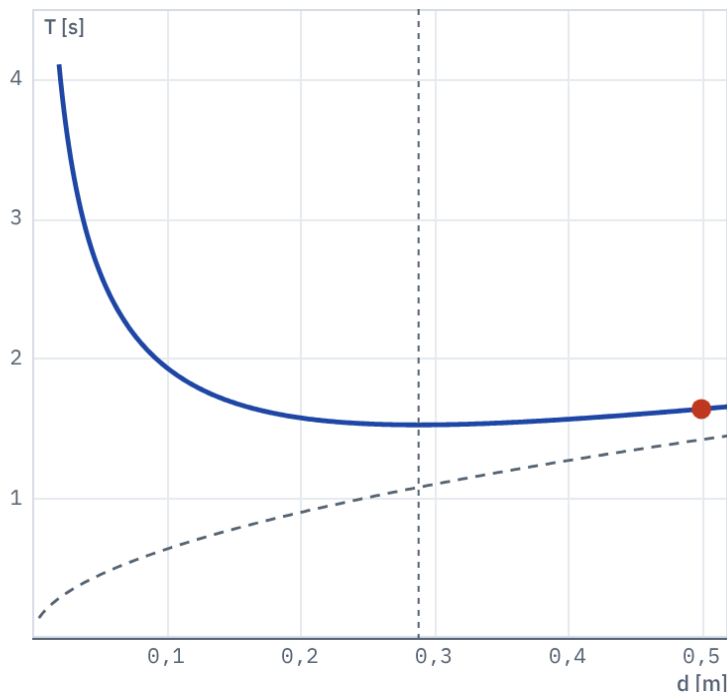
Toczenie po równi wymaga tarcia: to ono daje moment siły, który rozkręca kulę. A jednak nie zabiera energii, bo działa w punkcie, który chwilowo stoi (praca to siła razy przesunięcie *punktu przyłożenia*). Energię zabiera dopiero poślizg albo odkształcenie podłoża (opór toczenia).

- 1 Na krążek o masie 2 kg i promieniu 10 cm, obracający się bez tarcia na poziomej osi, nawinięto linkę z ciężarkiem 1 kg. Z jakim przyspieszeniem opada ciężarek i jaki jest naciąg linki?
- 2 Oblicz przyspieszenia obręczy, walca, kuli i klocka (bez tarcia) na równi o nachyleniu 30° .
- 3 Jo-jo to krążek o promieniu 3 cm z osią o promieniu 0,5 cm, na której nawinięto sznurek (pomiń masę osi). Z jakim przyspieszeniem opada jo-jo, gdy trzymamy koniec sznurka nieruchomo? Jaki jest naciąg sznurka w stosunku do ciężaru?
- 4 Kulę bilardową o promieniu R uderzamy kijem poziomo, na wysokości h nad stołem. Na jakiej wysokości trzeba uderzyć, żeby kula od razu toczyła się bez poślizgu (bez udziału tarcia o stół)?
- 5 Pręt o długości 1 m wisi na osi przechodzącej przez jego koniec i waha się z małą amplitudą (wahadło fizyczne). Oblicz okres. Jak długie musiałyby być wahadło matematyczne o tym samym okresie?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

SYMULACJA 2

Wahadło fizyczne: pręt o długości 1 m zawieszony w odległości d od środka. Przesuwaj punkt zawieszenia i obserwuj okres. Przy zawieszeniu w środku pręt się nie waha, przy końcu waha się wolniej niż wahadło matematyczne o długości $L/2$, a najkrótszy okres wypada dla $d = L/\sqrt{12}$.



— okres $T(d)$ - - wahadło matematyczne o długości d (dla porównania) — bieżące d

okres T 1,638 s

długość zredukowana 0,667 m

moment bezwładności ($m = 1$ kg) 0,333 kg·m²

minimum T przy $d = L/\sqrt{12}$ 0,289 m, 1,524 s

Zawieszenie na końcu: pręt waha się jak wahadło matematyczne o długości $2L/3$, czyli wolniej niż kulka na nici o długości $L/2$ (przerwana krzywa).

Stan na rysunku: pręt 1 m, oś 0,50 m od środka; okres 1,638 s, długość zredukowana 0,667 m.

5

Zasada zachowania momentu pędu i żyroskop

5.1 Piruet

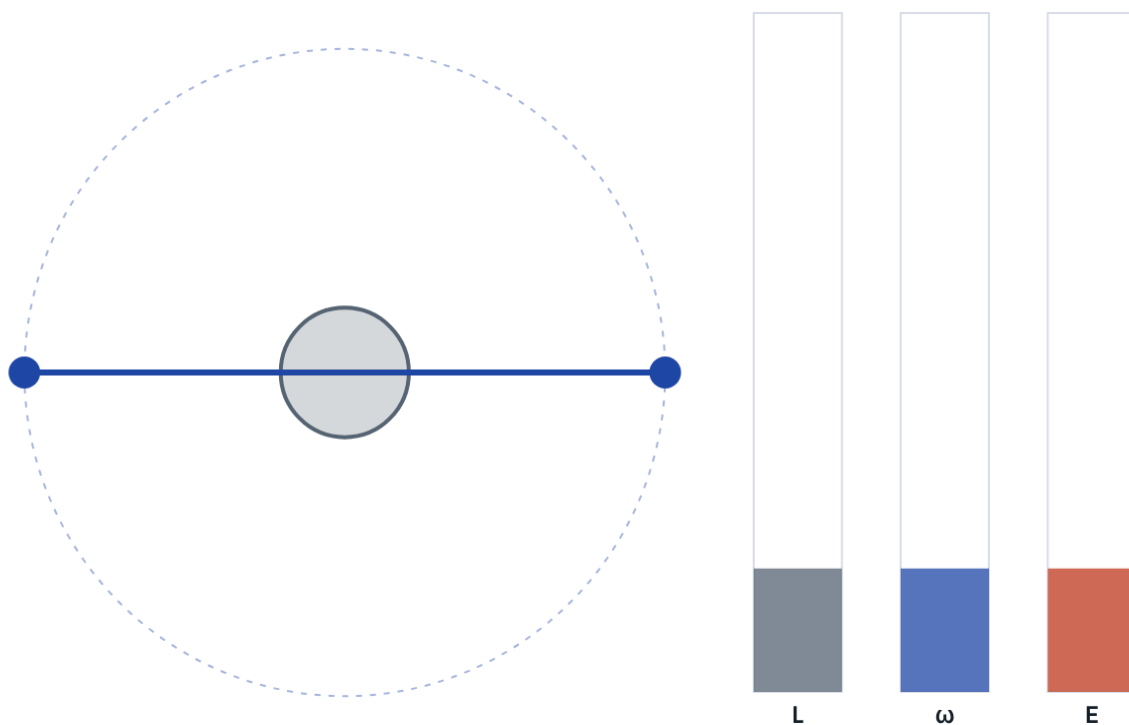
Jeśli zewnętrzny moment siły jest zerowy, moment pędu układu jest stały, nawet gdy układ zmienia kształt. FLP I-18-4 Łyżwiarka kręcąca się z rozłożonymi rękami przyciąga je do ciała: jej moment bezwładności maleje, więc prędkość kątowa rośnie tak, by $I\omega$ się nie zmieniło. Feynman demonstrował to na obrotowym stołku z ciężarkami w dłoniach.

PRAWO · ZASADA ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU

$$\vec{\tau}_{\text{zewn}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}; \quad \text{dla jednej osi: } I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

Energia obrotu $E = \frac{L^2}{2I}$ przy stałym L *rośnie*, gdy I maleje. Skąd ta energia? Z pracy mięśni. W układzie inercjalnym: ręce ciągną ciężarki do osi, a ciężarki przesuwają się w kierunku tej siły, więc siła wykonuje pracę. W obracającym się układzie łyżwiarki mówimy, że pokonuje ona „siłę odśrodkową”. Wyciągając ręce z powrotem, odzyskuje tę pracę. FLP I-19-4

SYMULACJA 3 Piruet z widoku z góry. Łyżwiarkę modelujemy jako walec (tułów) i dwa ciężarki (ręce) w odległości r od osi. Przesuwaj r : moment pędu się nie zmienia, prędkość kątowa i energia kinetyczna rosną, gdy ręce się zbliżają. Odczyt podaje pracę wykonaną przez ręce.



— tułów ($I_0 = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$) — ręce z ciężarkami ($2 \times 3 \text{ kg}$)

moment bezwładności I 5,86 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$

prędkość kątowa 1,00 obr/s

moment pędu L 36,8 $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ (stały)

energia obrotu 115,7 J

praca rąk od startu 0,0 J

Ręce rozłożone: duży moment bezwładności, powolny obrót (1 obr/s). Przesuń ciężarki do środka.

Stan na rysunku: $r = 0,90 \text{ m}$; $I = 5,86 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 1,00 obr/s, energia 115,7 J (na starcie 115,7 J).

5.2 Drugie prawo Keplera

Planetę przyciąga Słońce siłą centralną, więc jej moment pędu względem Słońca jest stały (zadanie 2.5). W czasie dt promień wodzący zakreśla trójkąt o polu $dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v} dt|$, więc $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const}$: promień wodzący zakreśla równe pola w równych czasach. Kepler odkrył to z obserwacji w 1609 r.; Newton pokazał, że wynika z centralności siły. Więcej w dziale 5 „Grawitacja i orbity”.

5.3 Żyroskop: dlaczego bąk się nie przewraca

Szybko wirujący bąk ma duży moment pędu $\vec{L}$ wzdłuż swojej osi. Ciężar przyłożony w środku masy, w odległości d od punktu podparcia, daje moment siły $\vec{\tau}$ prostopadły do $\vec{L}$ i poziomy. Zgodnie z $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$ wektor $\vec{L}$ zmienia się w kierunku $\vec{\tau}$, czyli *w bok*, a nie *w dół*. Oś bąka zatacza stożek, a jej koniec poziome koło: to **precesja**. FLP I-20-3

WYNIK · PRĘDKOŚĆ PRECESJI (SZYBKİ BĄK)

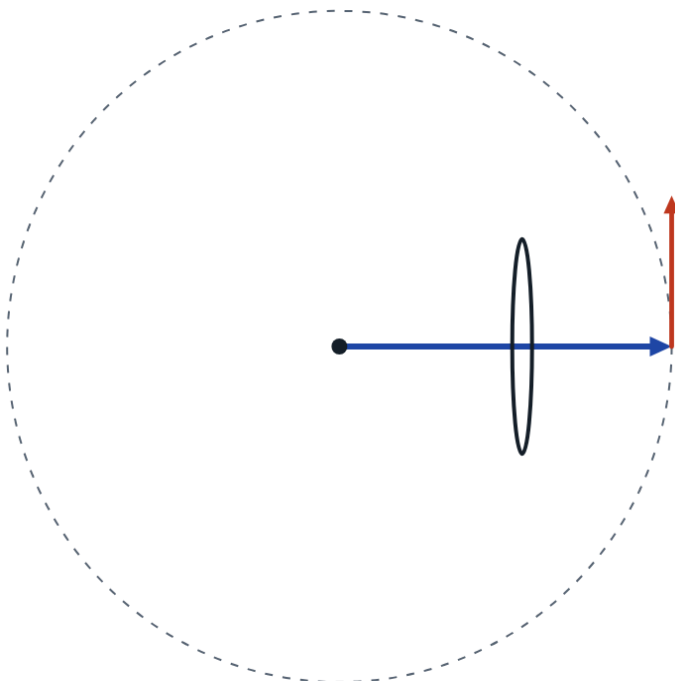
$$\Omega = \frac{\tau}{L} = \frac{mgd}{I\omega}.$$

Im szybciej bąk wiruje, tym wolniej precesuje. Gdy zwalnia, precesja przyspiesza, oś zaczyna się chwiać, a w końcu bąk się przewraca.

SYMULACJA 4

Precesja żyroskopu w rzucie z góry. Wektor $\vec{L}$ (wzdłuż osi) obraca się wokół pionu z prędkością $\Omega = mgd/(I\omega)$. Zmieniaj prędkość wirowania i odległość środka masy od podparcia. Odczyt porównuje moment pędu wirowania z momentem pędu samej precesji: wzór jest dobry, gdy ten drugi jest dużo mniejszy.

widok z góry; podparcie w środku



— moment pędu L (wzdłuż osi bąka) — moment siły $\tau = r \times mg$ - - - tor końca osi

Ω (precesja) 4,34 rad/s

okres precesji 1,45 s

L wirowania $9,05 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

L precesji / L wirowania $8,75 \cdot 10^{-2}$

Szybki bąk: τ obraca wektor L w bok, nie w dół. Dwa razy szybsze wirowanie dałoby dwa razy wolniejszą precesję.

Stan na rysunku: krążek 100 g, promień 3 cm, $d = 4,0$ cm, 32 obr/s; $\Omega = 4,34$ rad/s, okres precesji 1,45 s.

SKĄD TO WIEMY?

Zasadę zachowania momentu pędu sprawdzamy na każdej skali: od piruetów i skoków do wody, przez stałość położenia osi Ziemi w przestrzeni (w skali stuleci oś wskazuje prawie ten sam punkt nieba, dziś w pobliżu Gwiazdy Polarnej, a powoli zatacza stożek z okresem ok. 26 000 lat pod wpływem momentu sił Słońca i Księżyca działających na spłaszczoną Ziemię), po żyroskopy nawigacyjne i koła reakcyjne satelitów. W fizyce atomowej moment pędu jest skwantowany i zachowany w każdym procesie, a jego zasada zachowania wiąże się z izotropią przestrzeni: prawa fizyki nie zależą od kierunku.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 40 min

- 1  Łyżwiarka z rozłożonymi rękami ma moment bezwładności $3,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ i obraca się raz na sekundę. Przyciąga ręce i jej moment bezwładności spada do $1,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Jak szybko się obraca? Ile razy wzrosła energia kinetyczna?
- 2  Karuzela (krążek 200 kg , promień 2 m) obraca się z prędkością kątową $0,5 \text{ rad/s}$. Dziecko o masie 30 kg wskakuje na jej brzeg, biegnąc wzdłuż promienia (bez prędkości stycznej). Jak zmieni się prędkość kątowa?
- 3  Gwiazda o promieniu $700\,000 \text{ km}$ obraca się raz na 25 dni. Zapada się w gwiazdę neutronową o promieniu 10 km . Zakładając, że zachowuje moment pędu i kształt rozkładu masy, oblicz nowy okres obrotu.
- 4  Mimośród orbity Ziemi wynosi $0,0167$. Ile razy szybciej porusza się Ziemia w peryhelium niż w aphelium?
- 5  Koło rowerowe (obwód 2 kg , promień $0,35 \text{ m}$) wiruje z prędkością 30 rad/s . Jego oś jest podparta na jednym końcu, $0,2 \text{ m}$ od środka koła, i ustawiona poziomo. Oblicz prędkość i okres precesji.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

METODA DLA BRYŁ

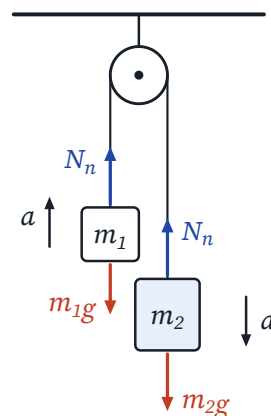
1. Oszacuj wynik.
2. **Rozdziel ruchy.** Dla każdej bryły zapisz ruch środka masy ($Ma = \sum F$) i obrót ($I\varepsilon = \sum \tau$) względem osi przez środek masy albo względem nieruchomej osi.
3. **Wybierz punkt odniesienia momentów** tak, by przechodziły przez niego nieznane siły, których nie potrzebujesz (zawias, punkt podparcia).
4. **Więzy:** toczenie bez poślizgu $a = \varepsilon R$; nierozciągliwa linka na bloczku $a = \varepsilon R$; równowaga: suma sił i momentów zero.
5. **Energia** jest często najkrótszą drogą: $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ plus energia potencjalna.
6. **Moment pędu:** gdy zewnętrzny moment siły jest zerowy albo działa krótko (uderzenie), $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$.
7. **Sprawdzenie:** przypadki graniczne ($I \rightarrow 0$ daje wyniki dla punktu, $I \rightarrow \infty$ unieruchamia obrót) i jednostki.

Przykład 4.1

Maszyna Atwooda z ciężkim bloczkiem

Na krążku o masie 2 kg i promieniu 10 cm wisi linka z ciężarkami 3 kg i 2 kg. Linka nie ślizga się po krążku. Oblicz przyspieszenie i naciągi po obu stronach.

- 1 Oszacowanie: bez bloczka $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g = 1,96 \text{ m/s}^2$; ciężki bloczek trochę to zmniejszy.
- 2 Ciężarki: $m_1g - T_1 = m_1a$, $T_2 - m_2g = m_2a$. Bloczek: $(T_1 - T_2)R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R}$, czyli $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma$.
- 3 Dodając: $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)a$, więc $a = \frac{9,81}{6} \approx 1,64 \text{ m/s}^2$.
- 4 $T_1 = 3(9,81 - 1,64) \approx 24,5 \text{ N}$, $T_2 = 2(9,81 + 1,64) \approx 22,9 \text{ N}$.



Maszyna Atwooda z bloczkiem o masie M

Wynik: $a \approx 1,64 \text{ m/s}^2$; naciągi 24,5 N i 22,9 N. Są różne: ta różnica obraca bloczek.

Sprawdzenie: $T_1 - T_2 = 1,64 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,64 \checkmark$. Bloczek „waży” w bilansie jak masa $M/2$ dołożona do ciężarków $\checkmark$.

Przykład 4.2

Wyścig z równi

Kula, walec i obręcz staczają się bez poślizgu z wysokości 2 m. Oblicz ich prędkości na dole i porównaj z klockiem bez tarcia.

- $v = \sqrt{2gh/(1+k)}, 2gh = 39,24 \text{ m}^2/\text{s}^2$.
- Kula: 5,29 m/s; walec: 5,11 m/s; obręcz: 4,43 m/s; klocek: 6,26 m/s.
- Udział obrotu w energii: $\frac{k}{1+k}$: kula 29%, walec 33%, obręcz 50%.

Wynik: kula 5,29 m/s, walec 5,11 m/s, obręcz 4,43 m/s; obręcz połowę energii zużywa na obrót.

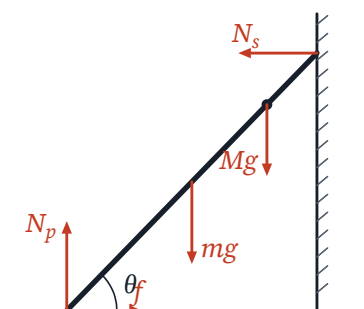
Sprawdzenie: obręcz: $\frac{1}{2}Mv^2 \cdot 2 = Mgh$, więc $v = \sqrt{gh} = 4,43 \checkmark$.

Przykład 4.3

Drabina pod ścianą

Jednorodna drabina (20 kg) opiera się o gładką ścianę. Współczynnik tarcia o podłogę to 0,4. Przy jakim najmniejszym kącie z podłogą drabina nie ześlizgnie się, gdy stoi pusta, a przy jakim, gdy człowiek (80 kg) stoi na 80% jej długości?

- Siły: ciężary, reakcja ściany N_s (pozioma, ściana gładka), reakcja podłogi N_p i tarcie f . Równowaga sił: $N_p = (m + M)g$, $f = N_s$.
- Momenty względem podstawy (znikają N_p i f):
 $N_s L \sin \theta = mg \frac{L}{2} \cos \theta + Mg \cdot 0,8L \cos \theta$.
- Warunek $f \leq \mu N_p$ daje $\tan \theta \geq \frac{m/2 + 0,8M}{\mu(m+M)}$.
- Pusta ($M = 0$): $\tan \theta \geq \frac{1}{2\mu} = 1,25$, $\theta \geq 51,3^\circ$. Z człowiekiem: $\tan \theta \geq \frac{10+64}{40} = 1,85$, $\theta \geq 61,6^\circ$.



Drabina: ciężar, reakcja ściany, reakcja i tarcie podłogi

Wynik: pusta drabina stoi powyżej 51° , z człowiekiem wysoko na niej dopiero powyżej 62° .

Sprawdzenie: im wyżej wejdzie człowiek, tym większy moment jego ciężaru i tym bardziej stromo trzeba ustawić drabinę; dlatego zalecany kąt to ok. $75^\circ \checkmark$.

Przykład 4.4

Pocisk w drzwiach

Pocisk o masie 10 g leci z prędkością 400 m/s prostopadle do zamkniętych drzwi (szerokość 1 m, masa 15 kg) i wbija się w nie 0,9 m od zawiasów. Z jaką prędkością kątową otworzą się drzwi? Ile energii zostanie w ruchu?

- 1 W czasie uderzenia zawias działa siłą, ale jej moment względem osi zawiasu jest zerowy: moment pędu względem tej osi jest zachowany (pęd nie jest!).
- 2 Przed: $L = mvr = 0,01 \cdot 400 \cdot 0,9 = 3,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.
- 3 Po: $I = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 1^2 + 0,01 \cdot 0,9^2 \approx 5,008$, $\omega = L/I \approx 0,72 \text{ rad/s}$.
- 4 Energia: przed 800 J, po $\frac{1}{2}I\omega^2 \approx 1,3 \text{ J}$.

Wynik: $\omega \approx 0,72 \text{ rad/s}$, drzwi otworzą się o 90° w ok. 2 s; w ruchu zostaje 0,16% energii.

Sprawdzenie: pęd drzwi po uderzeniu ($Mv_{\text{śm}} = 15 \cdot 0,36 = 5,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$) jest większy niż pęd pocisku ($4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$): różnicę dał popęd siły zawiasu ✓. Dlatego tu liczy się moment pędu, a nie pęd.

Przykład 4.5

Autobus na kole zamachowym

W latach 50. XX w. w Szwajcarii i Belgii jeździły żyrobusy: zamiast akumulatora miały koło zamachowe rozpędzane na przystankach. Przyjmij: stalowy krążek 1500 kg, średnica 1,6 m, 3000 obr/min. Ile energii magazynuje? Jak długo wystarczy przy średniej mocy 20 kW?

- 1 $I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot 0,8^2 = 480 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
- 2 $\omega \approx 314 \text{ rad/s}$, $E = \frac{1}{2}I\omega^2 \approx 23,7 \text{ MJ} \approx 6,6 \text{ kWh}$.
- 3 Czas: $23,7 \cdot 10^6 \text{ J} / (2 \cdot 10^4 \text{ W}) \approx 1180 \text{ s} \approx 20 \text{ min}$.

Wynik: ok. 6,6 kWh, czyli ok. 20 minut jazdy, kilka kilometrów miejskiej trasy.

Sprawdzenie: obwód krążka porusza się z prędkością $\omega R \approx 250 \text{ m/s}$; większe prędkości grożą rozerwaniem stali. Ograniczeniem kół zamachowych jest więc wytrzymałość materiału, a nie sama fizyka obrotu ✓.

Przykład 4.6

Bąk

Bąk to krążek o masie 100 g i promieniu 3 cm na nóżce; środek masy leży na osi 4 cm od czubka. Wiruje 20 razy na sekundę. Oblicz okres precesji.

- 1 $I = \frac{1}{2}mR^2 = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $\omega = 2\pi \cdot 20 \approx 126 \text{ rad/s}$; $L \approx 5,65 \cdot 10^{-3}$.
- 2 $\tau = mgd = 0,1 \cdot 9,81 \cdot 0,04 \approx 0,039 \text{ N} \cdot \text{m}$ (dla osi odchylonej o kąt θ od pionu $\tau = mgd \sin \theta$, a pozioma składowa $\vec{L}$ to $L \sin \theta$; sinus się skraca, więc $\Omega = mgd/(I\omega)$ nie zależy od nachylenia).
- 3 $\Omega = \tau/L \approx 6,9 \text{ rad/s}$, okres $2\pi/\Omega \approx 0,9 \text{ s}$.

Wynik: okres precesji ok. 0,9 s.

Sprawdzenie: $\Omega \ll \omega$ (6,9 wobec 126 rad/s), a moment pędu samej precesji (ok. $(md^2 + \frac{1}{4}mR^2)\Omega \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$) to ok. 20% momentu pędu wirowania. Przybliżenie szybkiego bąka jest więc zgrubne, ale rozsądne ✓. Bąk puszczone bez prędkości precesji opada przy tym o kąt rzędu $2 \cdot 0,2 \text{ rad}$ i drży (nutacja). Przy dwa razy wolniejszym wirowaniu ten stosunek rośnie czterokrotnie i opis się załamuje.

7

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Moment bezwładności to masa bryły.”

Zależy od rozkładu masy względem osi. Ten sam pręt ma cztery razy większy moment bezwładności względem końca niż względem środka.

× „Cięższe ciało stoczy się szybciej.”

Masa i promień się skracają; liczy się tylko kształt przez $k = I/(MR^2)$.

× „Żyroskop opiera się grawitacji.”

Grawitacja działa normalnie: zmienia moment pędu, ale w kierunku momentu siły, czyli w bok. Środek masy bąka pozostaje na tej samej wysokości, bo podłoże podpira go siłą równą ciężarowi.

× „Przy stałym momencie pędu energia obrotu też jest stała.”

$E = L^2/(2I)$: łyżwiarka przyciągając ręce zwiększa energię, wykonując pracę.

× „Kot spadający na grzbiet obraca się, odpychając się od powietrza.”

Opór powietrza nie ma tu znaczenia. Moment pędu kota jest zerowy przez cały lot, a mimo to kot obraca się, zmieniając kształt (zadanie feynmanowskie 1).

× „Moment siły i energia to to samo, bo mają tę samą jednostkę.”

$N \cdot m$ momentu siły to iloczyn wektorowy, a dżul pracy to iloczyn skalarny; praca momentu siły to $\tau \Delta\theta$.

8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

- 1 **Kot spada na cztery łapy.** Kot upuszczony grzbietem w dół ląduje na łapach, choć jego moment pędu jest przez cały czas zerowy. Jak to możliwe? Zaproponuj sekwencję ruchów dwóch połówek ciała.
- 2 **Jajko surowe czy gotowane?** Jak rozpoznać jajko ugotowane na twardo, nie rozbijając go? Zakręć oba jajka na stole, a potem na chwilę zatrzymaj je palcem i puść. Co się stanie i dlaczego?
- 3 **Bieg całej ludzkości.** Gdyby 8 miliardów ludzi (średnio 70 kg) stanęło na równiku i jednocześnie pobiegło na wschód z prędkością 3 m/s, o ile zmieniłaby się długość doby?
- 4 **Kula, która przestaje się ślizgać.** Kulę bilardową pchnięto tak, że sunie z prędkością v_0 bez obrotu. Współczynnik tarcia kinetycznego o sukno to μ . Po jakim czasie zacznie się toczyć bez poślizgu i z jaką prędkością?
- 5 **Środek uderzenia.** Trzymasz pręt (kij) za koniec, a piłka uderza w niego prostopadle. W którym miejscu uderzenie nie szarpie ręki?
- 6 **Linijka szybsza od grawitacji.** Linijkę o długości L opartą jednym końcem na stole trzymamy poziomo, na drugim końcu kładziemy monetę i puszczamy ten koniec. Czy moneta spada razem z linijką?

- 7 **Obrót satelity bez paliwa.** Satelita ($I = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) ma koło reakcyjne ($I_k = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$).
Jak szybko musi się kręcić koło, żeby obrócić satelitę o 90° w 10 minut? Co się dzieje z kołem po zakończeniu manewru?

- 8 **Dlaczego rower się nie przewraca?** Popularne wyjaśnienie mówi, że to efekt żyroskopowy kół. Oszacuj moment pędu koła przy 5 m/s (obwód 1,5 kg, promień 0,35 m) i moment siły ciężaru rowerzysty z rowerem (90 kg) przy przechyle 5° (środek masy 1 m nad ziemią). Jak szybko precesowałby rower? Czy to wyjaśnienie wystarcza?

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Czy dwa koła o tej samej masie i promieniu mogą mieć różne momenty bezwładności?

Tak: obręcz z lekkimi szprychami ma prawie MR^2 , pełny krążek $\frac{1}{2}MR^2$.

- 2 Który punkt toczącego się koła porusza się najszybciej, a który stoi?

Najszybciej najwyższy ($2v$), stoi punkt styku z drogą.

- 3 Dlaczego klamka jest daleko od zawiasów?

Większe ramię daje większy moment siły przy tej samej sile.

- 4 Łyżwiarka przyciąga ręce. Co się zmienia: moment pędu, prędkość kątowna, energia?

Moment pędu stały, prędkość kątowna i energia rosną.

- 5 Puszka i kulka o tej samej masie staczają się z równi. Która jest szybsza?

Kulka, bo ma mniejsze $k = I/(MR^2)$: mniej energii idzie w obrót.

- 6 Bąk zwalnia. Co się dzieje z precesją?

Przyspiesza, bo $\Omega = \tau/(I\omega)$.

7 Dlaczego w zderzeniu z drzwiami na zawiasach pęd nie jest zachowany, a moment pędu tak?

Zawias działa siłą zewnętrzną, ale jej moment względem osi zawiasu jest zerowy.

8 Dlaczego helikopter ma śmigło ogonowe?

Silnik działa na wirnik momentem siły, a wirnik na kadłub momentem przeciwnym. Wirnik stale oddaje moment pędu powietrzu, więc silnik musi go stale napędzać, a kadłub byłby stale skręcany w przeciwną stronę. Śmigło ogonowe daje siłę boczną na długim ramieniu, której moment to równoważy (albo stosuje się dwa przeciwbieżne wirniki).

Słownik: ruch postępowy i obrotowy

ruch postępowy	ruch obrotowy	związek
położenie x	kąt θ	$s = r\theta$
prędkość v	prędkość kątowna ω	$v = \omega r$
przyspieszenie a	przyspieszenie kątowe ε	$a_{st} = \varepsilon r$
masa m	moment bezwładności I	$I = \int r^2 dm$
siła F	moment siły τ	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
pęd $p = mv$	moment pędu $L = I\omega$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
$F = dp/dt$	$\tau = dL/dt$	$\tau = I\varepsilon$
$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{obr} = \frac{1}{2}I\omega^2$	$W = \int \tau d\theta$

BRYŁY

obrzec MR^2 ; walec $\frac{1}{2}MR^2$; kula $\frac{2}{5}MR^2$;
sfera $\frac{2}{3}MR^2$

pręt: środek $\frac{1}{12}ML^2$, koniec $\frac{1}{3}ML^2$

Steiner: $I = I_{sm} + Md^2$

toczenie: $v = \omega R$; $v = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}$, $k = \frac{I}{MR^2}$

ZASADY

$\vec{\tau}_{zewn} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$; $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$E = L^2/(2I)$

siła centralna: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ (II prawo Keplera)

precesja: $\Omega = \frac{mgd}{I\omega}$

wahadło fizyczne: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 18 (obróć w dwóch wymiarach), 19-3, 19-4 (moment bezwładności, energia obrotu).
- **Dla chętnych:** rozdz. 20 (obróć w przestrzeni, żyroskop, moment pędu bryły).

Następny dział: **Grawitacja i orbity**. Drugie prawo Keplera już znamy: wynika z centralności siły. Pierwsze i trzecie wymagają wiedzy o tym, jak siła grawitacji zależy od odległości. Newton odgadł to prawo z ruchu Księżyca i z praw Keplera, a Cavendish zmierzył stałą grawitacji w laboratorium. Zobaczmy, dlaczego orbity są elipsami i jak z nich ważyć planety.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

- $\omega \approx 3,49 \text{ rad/s}$; $v = \omega r \approx 0,52 \text{ m/s}$; $a = \omega^2 r \approx 1,83 \text{ m/s}^2$, skierowane do środka.
- $\omega \approx 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$. Równik: 465 m/s ; Warszawa: 285 m/s . Przyspieszenie na równiku $0,034 \text{ m/s}^2$, ok. $0,35\% g$.
- $\omega \approx 1047 \text{ rad/s}$, $a = \omega^2 r \approx 1,1 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2 \approx 11\,000g$.
- $\omega = v/R \approx 28,6 \text{ rad/s}$. Prędkość punktu to prędkość osi plus $\vec{\omega} \times \vec{r}$: na dole $v - \omega R = 0$ (punkt styku chwilowo stoi), na górze $v + \omega R = 20 \text{ m/s}$. Dlatego szprychy u góry koła rozmywają się na zdjęciach, a u dołu są ostre.
- $\omega_0 \approx 62,8 \text{ rad/s}$, $\varepsilon = -6,28 \text{ rad/s}^2$. $\theta = \frac{1}{2}\omega_0 t \approx 314 \text{ rad}$, czyli 50 obrotów.

Zadania • część 2

- $50 \text{ N}\cdot\text{m}$ i $50 \sin 60^\circ \approx 43 \text{ N}\cdot\text{m}$.
- $30 \cdot 1,5 = 75 x$, $x = 0,6 \text{ m}$ po drugiej stronie osi.
- Prawa: $R_P \cdot 4 = (50 \cdot 2 + 80 \cdot 1)g$, $R_P \approx 441 \text{ N}$. Lewa: $130g - R_P \approx 834 \text{ N}$.
- Orbitalny: $Mvr \approx 2,7 \cdot 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. Wirowy: $I\omega \approx 5,8 \cdot 10^{33}$. Orbitalny jest ok. 4,6 miliona razy większy.
- $\vec{F} \parallel \vec{r}$, więc $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ i $d\vec{L}/dt = 0$. Centralne są grawitacja Słońca działająca na planetę i siła kulombowska jądra działająca na elektron (w obrazie klasycznym). Stąd stały moment pędu planet i, w mechanice kwantowej, jego rola w atomie wodoru (dział 19 „Atom wodoru i układ okresowy”).

Zadania • część 3

- $\frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 1 \approx 0,167 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ i $\frac{1}{3} \cdot 2 \approx 0,667$. Steiner: $0,167 + 2 \cdot 0,5^2 = 0,667 \checkmark$.
- $dm = \frac{M}{L} dx$, $I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}ML^2$.
- $I = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,25 = 12,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $\omega \approx 314 \text{ rad/s}$, $E = \frac{1}{2}I\omega^2 \approx 617 \text{ kJ} \approx 0,17 \text{ kWh}$.
- $I = \int_{-R}^R \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2}\rho\pi \cdot \frac{16}{15}R^5 = \frac{8}{15}\rho\pi R^5$. Z $M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$: $I = \frac{2}{5}MR^2$.
- Jednorodna kula miałaby $0,4MR^2$. Mniejsza wartość oznacza, że masa jest skupiona bliżej środka: Ziemia ma gęste żelazne jądro. $E = \frac{1}{2}I\omega^2 \approx 2,1 \cdot 10^{29} \text{ J}$.

Zadania • część 4

- $T = \frac{I}{R^2}a = \frac{1}{2}Ma$, więc $a = \frac{mg}{m+M/2} = \frac{g}{2} \approx 4,9 \text{ m/s}^2$; $T = m(g - a) \approx 4,9 \text{ N}$.
- $g \sin 30^\circ / (1 + k)$: obręcz $2,45$, walec $3,27$, kula $3,50$, klocek $4,91 \text{ m/s}^2$.
- Tu tocznienie odbywa się po sznurku na promieniu osi r : $a = \frac{g}{1+I/(mr^2)}$, a $\frac{I}{mr^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 = 18$. $a = g/19 \approx 0,52 \text{ m/s}^2$; naciąg $\frac{18}{19}mg \approx 0,95mg$. Jo-jo spada powoli, bo prawie cała energia idzie w obrót.

4. $\frac{2}{5}MR^2 \cdot \frac{v}{R} = Mv(h - R)$, więc $h - R = \frac{2}{5}R$, $h = \frac{7}{5}R$. Niżej: kula najpierw się ślizga, a tarcie dopiero ją rozkręca; wyżej: kula „podkręcona” do przodu.
5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{L^2/3}{gL/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \approx 1,64$ s, jak wahadło matematyczne o długości $\frac{2}{3}L \approx 0,67$ m.

Zadania • część 5

- $\omega_2 = 3$ obr/s. $E = L^2/(2I)$ przy stałym L : trzy razy więcej. Różnicę dała praca mięśni rąk.
- $I_1 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 4 = 400$, $I_2 = 400 + 30 \cdot 4 = 520$ kg · m². $\omega_2 = 400 \cdot 0,5/520 \approx 0,38$ rad/s.
- $I \propto R^2$, więc $T \propto R^2$: $T = 25 \cdot 86\,400 \cdot \left(\frac{10}{7 \cdot 10^5}\right)^2 \approx 4,4 \cdot 10^{-4}$ s, ok. 2300 obrotów na sekundę. Przy takim obrocie równik poruszałby się z prędkością ok. połowy prędkości światła i gwiazda by się rozpadła; w rzeczywistości zapada się tylko jądro masywnej gwiazdy, które traci też moment pędu. Obserwowane pulsary obracają się z okresami od milisekund do sekund.
- W peryhelium i aphelium prędkość jest prostopadła do promienia, więc $v_p r_p = v_a r_a$: $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e} \approx 1,034$. Dlatego zimowe półrocze na półkuli północnej jest o kilka dni krótsze od letniego.
- $I = MR^2 = 0,245$ kg · m², $L = I\omega \approx 7,35$; $\tau = mgd \approx 3,92$ N · m; $\Omega = \tau/L \approx 0,53$ rad/s, okres ok. 12 s.

Zadania feynmanowskie

- Zerowy moment pędu nie zabrania zmiany orientacji, tylko wymaga, by części obracały się przeciwnie, z prędkościami w stosunku odwrotnym do momentów bezwładności.
 - Kot przyciąga przednie łapy (mały moment bezwładności przodu) i wyciąga tylne (duży moment tyłu), a potem skręca: przód obraca się o duży kąt, tył o mały w przeciwną stronę.
 - Potem odwrotnie: wyciąga przednie, przyciąga tylne i dokręca tył. Bilans: oba końce obrócone o 180°, a $L = 0$ przez cały czas. To ten sam mechanizm, którym astronauta obracają się w stanie nieważkości.
- Ugotowane obraca się jak bryła sztywna: łatwo się rozkręca i po zatrzymaniu stoi.
 - Surowe ma płynne wnętrze. Przy rozkręcaniu wnętrze nie od razu się obraca, więc jajko kręci się opornie. Po krótkim zatrzymaniu skorupki płynne wnętrze dalej wiruje i jajko po puszczeniu znowu zaczyna się obracać.
 - To odpowiedź na pytanie z prologu. Pasztet i zamrożona zupa to pełne walce ($k \approx \frac{1}{2}$), więc przyjadą razem. Płynna zupa prawie się nie obraca, więc w obrót idzie tylko energia lekkiej blaszanej puszkii: k jest bliskie zera i puszka stacza się prawie jak klocek bez tarcia, wyraźnie szybciej.
- Ludzie zyskują moment pędu $\Delta L = NmvR \approx 8 \cdot 10^9 \cdot 70 \cdot 3 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \approx 1,1 \cdot 10^{19}$; Ziemia traci tyle samo.
 - $\Delta T/T = \Delta L/L$, $L \approx 5,8 \cdot 10^{33}$; $\Delta T \approx 86\,164 \cdot 1,8 \cdot 10^{-15} \approx 1,6 \cdot 10^{-10}$ s. Doba wydłuży się o 0,16 nanosekundy, a po zatrzymaniu się biegaczy wróci do normy.
 - Dla porównania: przyplwy wywołane przez Księżyc wydłużają dobę o ok. 2 ms na stulecie, przenosząc moment pędu na Księżyc, który oddala się o ok. 4 cm rocznie.
- Względem punktu na suknie: $Mv_0R = MvR + \frac{2}{5}MR^2 \cdot \frac{v}{R}$, więc $v = \frac{5}{7}v_0$.
 - Tarcie zwalnia środek masy z opóźnieniem μg : $\frac{5}{7}v_0 = v_0 - \mu g t$, $t = \frac{2v_0}{7\mu g}$.
 - Energia: tracona jest $\frac{2}{7}$ energii początkowej, bez względu na μ . Duże μ skraca tylko czas poślizgu.
- Popęd J w odległości x od końca daje środkowi masy prędkość J/M i obrót $\omega = Jx'/I_{\text{śm}}$, gdzie $x' = x - L/2$.
 - Koniec (ręka) stoi, gdy $J/M = \omega L/2$: $x' = \frac{I_{\text{śm}}}{ML/2} = \frac{L}{6}$, czyli $x = \frac{2}{3}L$.
 - To ten sam punkt, co długość zredukowana wahadła fizycznego z zadania 4.5. To jeden z punktów, które baseballiści nazywają „sweet spot”.

6. 1. Linijka obraca się wokół podpartego końca: $\frac{1}{3}ML^2\varepsilon = Mg\frac{L}{2}$, $\varepsilon = \frac{3g}{2L}$.
 2. Wolny koniec przyspiesza z $\varepsilon L = \frac{3}{2}g$, szybciej niż swobodny spadek. Moneta zostaje z tyłu i na chwilę „wisi” w powietrzu.
 3. Punkty bliżej niż $\frac{2}{3}L$ od podparcia przyspieszają wolniej niż g . Moneta położona w $\frac{2}{3}L$ spadnie na początku dokładnie razem z linijką.
7. 1. Średnia prędkość kątowna satelity: $\frac{\pi/2}{600} \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$ rad/s. Całkowite $L = 0$, więc koło kręci się przeciwnie, 2000 razy szybciej: średnio ok. 5,2 rad/s (50 obr/min), w szczycie ok. dwa razy więcej.
 2. Na koniec koło trzeba zatrzymać, a wtedy zatrzymuje się też satelita, już w nowej orientacji. Paliwo nie jest potrzebne.
 3. Zewnętrzne momenty sił (ciśnienie światła, pole magnetyczne) powoli rozkręcają koło; co jakiś czas trzeba je „rozładować” silnikami lub magnetorquerami.
8. 1. $\omega = 5/0,35 \approx 14,3$ rad/s, $L_{\text{koła}} = 1,5 \cdot 0,35^2 \cdot 14,3 \approx 2,6$, dwa koła ok. 5,3 kg·m²/s.
 2. $\tau = 90 \cdot 9,81 \cdot 1 \cdot \sin 5^\circ \approx 77$ N·m. „Precesja” $\Omega = \tau/L \approx 15$ rad/s: absurdalnie szybko, czyli efekt żyroskopowy jest za słaby, by utrzymać rower.
 3. Rower stabilizuje głównie sterowanie: przechylony rower skręca kierownicę w stronę przechyłu (geometria widelca i wyprzedzenie), koła „wjeżdżają” pod środek masy. Doświadczenia z rowerami z przeciwbieżnymi kołami potwierdzają, że żyroskop nie jest konieczny.

Fizyka · Dział 4: Ruch obrotowy i bryła sztywna · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 18–20. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.