

Pęd: to, co przekazują sobie ciała

Energia mówi, jak szybko ciało może się poruszać, ale nie mówi, w którą stronę. Druga wielkość zachowana, pęd, jest wektorem i zachowuje się zawsze, nawet gdy energia kinetyczna znika w cieple. Dzięki niej policzymy zderzenia, których szczegółów nie znamy, znajdziemy punkt, który porusza się tak, jakby w nim skupiła się cała masa, i zrozumiemy, jak przyspiesza rakietę, która nie ma się od czego odepchnąć.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
4 h zadań

ZADANIA

28 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, rozdz. 9-1, 10,
18-1, 19-1, 19-2

W TYM DZIALE

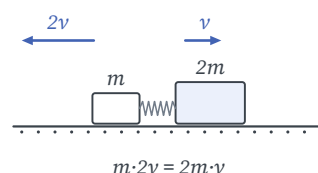
- 0 Prolog: dwa ślizgacze
- 1 Pęd i popęd siły
- 2 Zasada zachowania pędu
- 3 Zderzenia
- 4 Środek masy
- 5 Rakietę: ciało o zmiennej masie
- 6 Pęd, energia i granice zasady
- 7 Metoda i przykłady rozwiązań
- 8 Błędne intuicje
- 9 Zadania feynmanowskie
- 10 Sprawdź się
- 11 Karta wzorów i co dalej

Prolog: dwa ślizgacze

Na torze powietrznym ślizgacze unoszą się na poduszce powietrza i suną prawie bez tarcia. Feynman opisuje kilka prostych doświadczeń z takim torem. FLP I-10-3 Dwa jednakowe ślizgacze z plasteliną na czołach pędzą ku sobie z równymi prędkościami, zderzają się, sklejają i... stają. Cała energia kinetyczna zamieniła się w ciepło i odkształcenie plasteliny. Sama zasada zachowania energii nic by nam tu nie powiedziała: nie wiemy z góry, ile energii pójdzie w ciepło.

Drugie doświadczenie: między dwoma jednakowymi ślizgaczami ściskamy sprężynę i spinamy je nitką. Przepalamy nitkę. Ślizgacze odjeżdżają w przeciwnie strony z *równymi* prędkościami. Trzecie: jeden ze ślizgaczy dociążamy tak, że ma dwa razy większą masę. Po przepaleniu nitki cięższy odjeżdża dwa razy wolniej. Iloczyn masy i prędkości jest po obu stronach taki sam, z przeciwnym znakiem.

Pytanie na start. Ślizgacz o masie m jadący z prędkością v uderza w taki sam stojący ślizgacz i skleja się z nim. Z jaką prędkością pojedzie para? Zanim policzysz, zgadnij. Feynman odpowiada na to pytanie samym rozumowaniem, bez żadnego wzoru (część 2.3).



Pęd i popęd siły

1.1 Druga zasada w postaci Newtona

W dziale 1 „Ruch i jego przyczyny” zapisaliśmy drugą zasadę dynamiki jako $\vec{F} = m\vec{a}$. Newton zapisał ją inaczej: siła jest równa szybkości zmiany **pędu**, czyli iloczynowi masy i prędkości.

FLP I-9-1 Dla stałej masy oba zapisy są równoważne, bo $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$. Zapis przez pęd jest jednak ogólniejszy: pozostaje prawdziwy przy prędkościach bliskich prędkości światła (część 6), a zapisany jako bilans pędu całego układu pozwala policzyć ruch ciał o zmiennej masie, np. rakiety (część 5). Uwaga: dla samej rakiety wzór $F = \frac{d}{dt}(mv)$ nie działa; trzeba liczyć pęd rakiety razem ze spalinami.

DEFINICJA · PĘD I DRUGA ZASADA DYNAMIKI

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Pęd jest wektorem o kierunku prędkości; jednostka to $\text{kg} \cdot \text{m/s} = \text{N} \cdot \text{s}$.

1.2 Popęd: ile pędu daje uderzenie

Podczas uderzenia kija w piłkę siła rośnie od zera do tysięcy niutonów i znika po kilku milisekundach. Nie znamy jej przebiegu, ale całka (lekcja 1.5 Całki) z drugiej zasady mówi, ile pędu piłka dostała:

TWIERDZENIE · POPĘD SIŁY

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p}.$$

Popęd to pole pod wykresem $F(t)$. Siła średnia w czasie Δt wynosi $\vec{F}_{\text{sr}} = \Delta \vec{p} / \Delta t$: ta sama zmiana pędu w dłuższym czasie wymaga mniejszej siły.

Tak działają poduszki powietrzne, kaski, strefy zgniotu i ugięte kolana przy lądowaniu: nie zmniejszają zmiany pędu, która i tak musi nastąpić, ale rozciągają ją w czasie, więc zmniejszają siłę. Ten sam pomysł w języku energii (dział 2 „Energia”) brzmi: energię trzeba zabrać na dłuższej drodze.

PUŁAPKA · ODBICIE TO PODWÓJNA ZMIANA PĘDU

Piłka uderza w ścianę z prędkością v i odbija się z prędkością v . Zmiana pędu to nie zero, tylko $2mv$, bo pęd zmienił kierunek: $\Delta p = mv - (-mv)$. Piłka, która się odbija, dostaje dwa razy większy popęd niż kula plasteliny, która przykleja się do ściany. Ta różnica wróci przy ciśnieniu gazu (dział 8 „Ciepło i teoria kinetyczna”) i przy ciśnieniu światła (część 6).

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Piłkarz kopie leżącą piłkę o masie 0,45 kg, która odlatuje z prędkością 25 m/s. Kontakt trwał 8 ms. Jaki popęd dostała piłka i jaka była średnia siła?
- 2 Piłka bejsbolowa (0,145 kg) leci z prędkością 40 m/s, a po uderzeniu kijem odlatuje w przeciwną stronę z prędkością 50 m/s. Kontakt trwał 1,2 ms. Oblicz średnią siłę.
- 3 Człowiek o masie 70 kg zeskakuje z wysokości 1 m. Przyjmij, że po zetknięciu z ziemią hamuje ze stałym opóźnieniem. Oblicz średnią siłę nacisku podłoża, gdy (a) ląduje na sztywnych nogach i hamuje na drodze 1 cm, (b) ugina kolana i hamuje na 30 cm. Ile trwa hamowanie w każdym przypadku?
- 4 Wąż ogrodowy wyrzuca 0,5 kg wody na sekundę z prędkością 20 m/s prostopadle na ścianę. Woda spływa po ścianie bez odbicia. Z jaką siłą strumień naciska na ścianę? Jak zmieni się wynik, gdyby woda się odbijała?

- 5 Siła działająca na piłeczkę o masie 60 g rośnie liniowo od zera do 2000 N w ciągu 2 ms, a potem liniowo maleje do zera w ciągu następnych 2 ms. Piłeczka początkowo spoczywała. Z jaką prędkością odlatuje?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

2 Zasada zachowania pędu

2.1 Z trzeciej zasady

Dwa ciała działają na siebie siłami $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$. Trzecia zasada dynamiki mówi, że te siły są równe i przeciwnie skierowane w każdej chwili. (FLP I-10-1) Zatem $\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$. Suma pędów się nie zmienia, niezależnie od tego, jak skomplikowane są siły i jak długo działają. Dla wielu ciał siły wewnętrzne znoszą się parami.

🔧 PRAWO · ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \vec{F}_{\text{zewn}}, \quad \vec{F}_{\text{zewn}} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Zasada dotyczy każdej składowej osobno: jeśli siły zewnętrzne nie mają składowej poziomej, zachowana jest pozioma składowa pędu, nawet gdy pionowa się zmienia.

2.2 Odrzut

Układ spoczywa, a potem rozpada się na części: wystrzał, skok z łódki, rozpad jądra. Pęd całkowity był zerowy i zostaje zerowy, więc $m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2$. Lżejsza część odlatuje szybciej. Energie kinetyczne nie są równe: $E_k = p^2/(2m)$ przy tym samym p jest odwrotnie proporcjonalna do masy, więc prawie całą energię zabiera lżejszy fragment (zadanie 2.2).

2.3 Feynman: pęd ze względności ruchu

Feynman pokazuje, że zachowanie pędu można odgadnąć bez trzeciej zasady, z dwóch faktów.

(FLP I-10-3) Pierwszy to symetria: dwa jednakowe ślizgacze rozepchnięte sprężyną odjeżdżają z równymi prędkościami, bo nie ma powodu, by któryś był wyróżniony. Drugi to zasada względności Galileusza (dział 1): prawa fizyki są takie same w układzie, który porusza się ruchem jednostajnym. Odpowiedzmy teraz na pytanie z prologu.

1. W pociągu jadącym z prędkością $v/2$ dwa jednakowe ślizgacze zbliżają się do siebie: jeden z prędkością $+v/2$, drugi $-v/2$. Z symetrii po sklejeniu para stoi (względem pociągu).

2. To samo widziane z peronu: jeden ślizgacz ma prędkość $v/2 + v/2 = v$, drugi $v/2 - v/2 = 0$, czyli stoi. Para po sklejeniu stoi w pociągu, więc względem peronu jedzie z prędkością $v/2$.
3. Wniosek: ślizgacz m z prędkością v uderzający w stojący m daje parę $2m$ z prędkością $v/2$. Iloczyn mv przed zderzeniem równa się $2m \cdot \frac{v}{2}$ po.

W ten sposób, łącząc symetrię i zmianę układu odniesienia, Feynman buduje kolejne przypadki (ślizgacze o masach m i $2m$, m i $3m$) i za każdym razem wychodzi to samo: suma mv się nie zmienia. To nie dowód zasady zachowania pędu w ogólności, ale piękny przykład, jak wiele wynika z samej względności ruchu.

SKĄD TO WIEMY?

Trzecia zasada nie jest prawem, które sprawdza się przez porównywanie sił w każdym przypadku. Sprawdza się ją przez skutek: zachowanie pędu. Pomiary na torach powietrznych, zderzenia cząstek w akceleratorach i rozpady jąder potwierdzają zachowanie pędu z dokładnością, na jaką pozwalają przyrządy. Gdy w latach 20. XX wieku okazało się, że w rozpadzie beta energia się nie bilansuje, Pauli w 1930 r. wolał zaproponować nową, niewidoczną cząstkę (neutrino), niż zrezygnować z zasad zachowania. Później pomiary odrzutu jąder pokazały, że bez neutrino nie bilansuje się też pęd. Neutrino wykryto w 1956 r.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Dwoje łyżwiarzy o masach 80 kg i 50 kg stoi na lodzie i odpycha się od siebie. Lżejszy odjeżdża z prędkością 2 m/s. Z jaką prędkością odjeżdża cięższy?
- 2 Z karabinu o masie 4 kg wylatuje pocisk o masie 10 g z prędkością 800 m/s. Z jaką prędkością karabin uderza w ramię strzelca? Porównaj energie kinetyczne pocisku i karabinu.
- 3 Wózek o masie 100 kg toczy się bez tarcia z prędkością 3 m/s. Z góry, pionowo, wsypujemy do niego 20 kg piasku. Jaka jest nowa prędkość wózka? Czy energia kinetyczna się zachowała?
- 4 Spoczywające jądro uranu-238 rozpada się na cząstkę alfa (masa 4 u) i jądro toru-234 (masa 234 u). Cząstka alfa ma energię kinetyczną 4,20 MeV. Jaka energię kinetyczną ma jądro toru? Ile razy wolniej się porusza?

- 5 Dwa jednakowe ślizgacze jadą ku sobie: jeden w prawo z prędkością 3 m/s, drugi w lewo z prędkością 1 m/s. Sklejają się. Wyznacz prędkość pary rozumowaniem Feynmana z części 2.3, bez wzoru na pęd. Potem sprawdź wynik zasadą zachowania pędu.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Zderzenia

3.1 Co wiemy, nie znając sił

W zderzeniu działają ogromne siły przez krótki czas. Ich szczegółów zwykle nie znamy, ale pęd całkowity jest zachowany, bo siły zderzenia są wewnętrzne, a siły zewnętrzne (ciężar, tarcie) przez kilka milisekund dają znikomy popęd. Z energią jest różnie. W zderzeniu **sprężystym** energia kinetyczna wraca w całości (kule bilardowe, atomy gazu), w **niesprężystym** część zamienia się w ciepło i odkształcenie, a w **doskonale niesprężystym** ciała się sklejają i tracą największą możliwą energię.

3.2 Zderzenie centralne sprężyste

Dwie kule poruszają się wzdłuż jednej prostej. Zachowanie pędu i energii daje dwa równania na dwie niewiadome prędkości. Rozwiązanie najłatwiej odczytać w **układzie środka masy**, który porusza się z prędkością

$$v_{\text{śm}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

W tym układzie pęd całkowity jest zerowy, więc kule zbliżają się z pędami $\pm p$ i odlatują z pędami $\pm p'$. Energia $\frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2}$ zależy tylko od p^2 , więc w zderzeniu sprężystym $|p'| = |p|$: każda kula po prostu odwraca prędkość. Wracając do laboratorium:

🔑 WYNIK · ZDERZENIE CENTRALNE

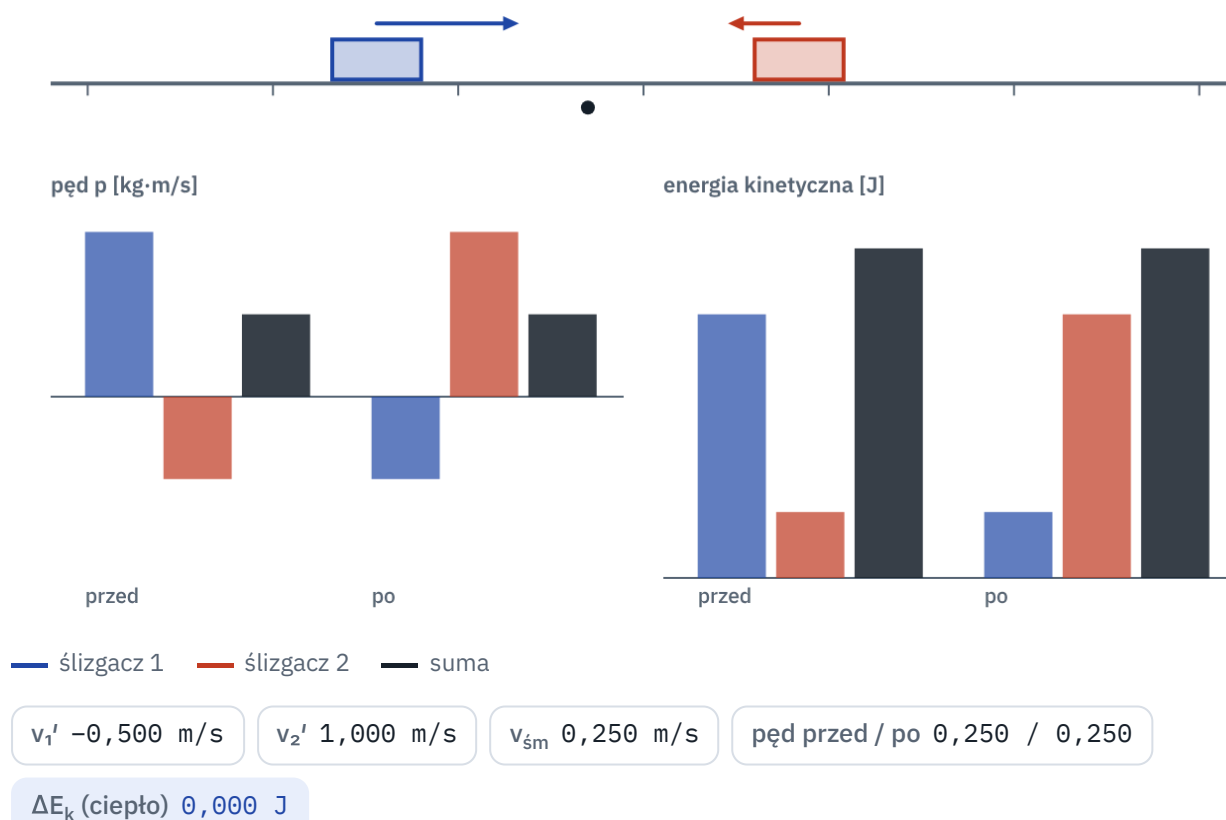
$$v'_1 = v_{\text{śm}} - e(v_1 - v_{\text{śm}}), \quad v'_2 = v_{\text{śm}} - e(v_2 - v_{\text{śm}}).$$

$e = 1$: zderzenie sprężyste; $e = 0$: sklejanie; $0 < e < 1$: częściowo sprężyste (e to **współczynnik restytucji**, stosunek prędkości względnej po zderzeniu do prędkości względnej przed). Utracona energia kinetyczna: $\Delta E = \frac{1}{2} \mu v_{\text{wzgl}}^2 (1 - e^2)$, gdzie $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Trzy przypadki warto pamiętać. Równe masy, druga stoi: w zderzeniu sprężystym pierwsza staje, a druga przejmuje całą prędkość (bilard, kołyska Newtona). Lekka kula uderza w ciężką: odbija

się prawie z tą samą prędkością (piłka od ściany). Ciężka uderza w lekką: jedzie dalej prawie bez zmiany, a lekka odskakuje z prędkością prawie $2v$.

SYMULACJA 1 Tor powietrzny. Ustaw masy i prędkości dwóch ślizgaczy oraz współczynnik restytucji e , a potem uruchom zderzenie. Słupki pokazują pędy (zachowane zawsze) i energie kinetyczne (zachowane tylko przy $e = 1$). Przełącz na układ środka masy: tam ślizgacze po prostu odwracają prędkości, pomnożone przez e .



Zderzenie sprężyste: pęd i energia kinetyczna są zachowane. W układzie środka masy ślizgacze po prostu odwracają prędkości.

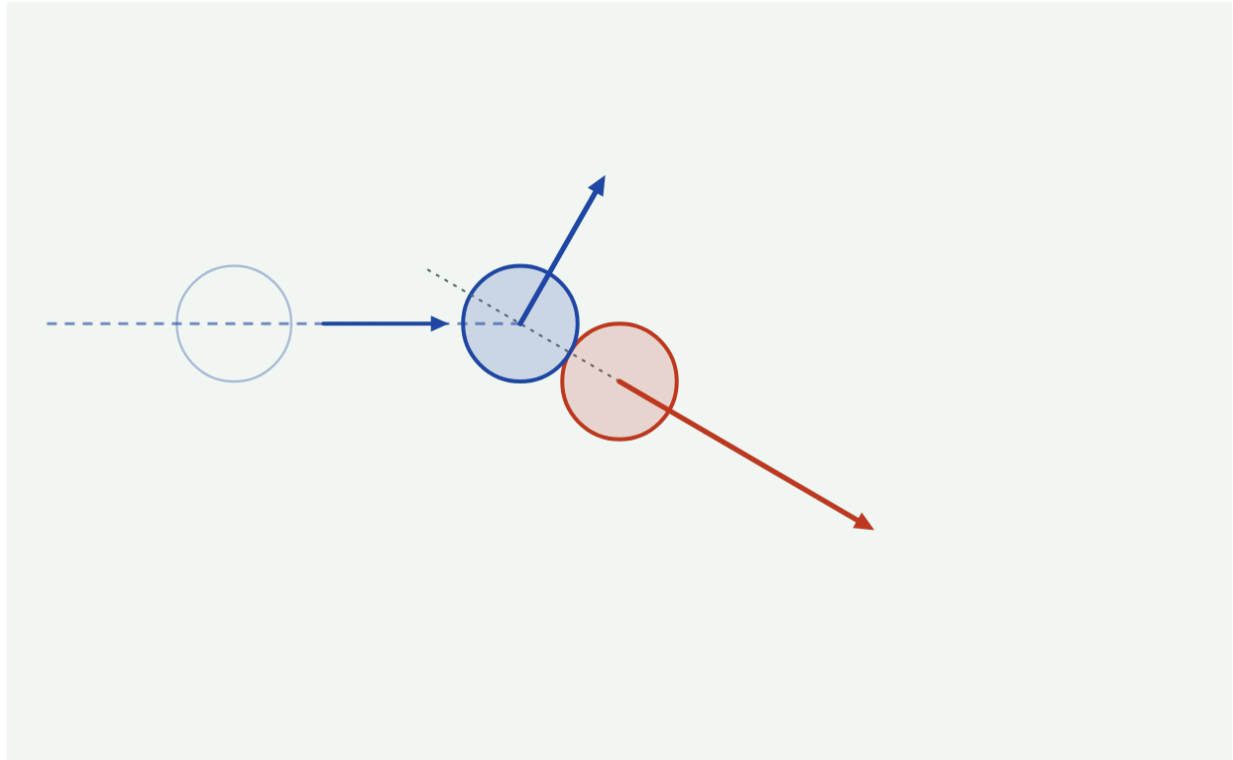
Stan na rysunku: $m_1 = 0,50$ kg, $v_1 = 1,00$ m/s, $m_2 = 0,50$ kg, $v_2 = -0,50$ m/s, $e = 1,00$, układ: laboratorium; po zderzeniu $v_1' = -0,500$ m/s, $v_2' = 1,000$ m/s.

3.3 Zderzenia na płaszczyźnie

Na stole bilardowym kule zderzają się zwykle nie centralnie. Pęd jest wektorem, więc jego zachowanie to dwa równania (na składowe x i y). Szczególnie ładny wynik daje sprężyste zderzenie jednakowych kul, z których jedna stoi: z $\vec{v} = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$ i $v^2 = v_1'^2 + v_2'^2$ wynika $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0$. Kule rozbiegają się pod kątem prostym (zadanie 3.5). Bilardiści wykorzystują to od zawsze, a

fizycy rozpoznawali kąt prosty na zdjęciach z komory Wilsona (cząstki alfa zderzające się z jądrami helu); przy prędkościach bliskich c kąt jest mniejszy niż 90° .

SYMULACJA 2 Zderzenie dwóch krążków na stole. Zmieniaj parametr zderzenia b (jak bardzo „z boku” trafia krążek) i stosunek mas. Dla równych mas i zderzenia sprężystego kąt między torami po zderzeniu wynosi zawsze 90° (o ile zderzenie nie jest centralne). Sprawdź, co się dzieje dla innych mas i dla $e < 1$.



— krążek 1 (nadlatuje) — krążek 2 (stał)

kąt toru 1 $60,0^\circ$

kąt toru 2 $-30,0^\circ$

kąt między torami $90,0^\circ$

v_1' / v $0,500$

v_2' / v $0,866$

E_{po} / E_{przed} $1,000$

Równe masy i zderzenie sprężyste: kąt między torami wynosi $90,0^\circ$, niezależnie od parametru zderzenia.

Stan na rysunku: $b/(2r) = 0,50$, $m_2/m_1 = 1,00$, $e = 1,00$; kąt między torami $90,0^\circ$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 45 min

- 1 Kula o masie 1 kg z prędkością 4 m/s uderza centralnie i sprężysto w stojącą kulę o masie 3 kg. Oblicz prędkości po zderzeniu i sprawdź zachowanie energii.

- 2 W reaktorze jądrowym neutrony trzeba spowolnić. Neutron (1 u) uderza centralnie i sprężysto w stojące jądro węgla (12 u). Jaką część energii kinetycznej traci? Ile takich zderzeń spowodowałoby energię z 2 MeV do 0,025 eV? Dlaczego lepszym moderatorem byłaby woda (wodór, 1 u)?
- 3 Wahadło balistyczne: pocisk o masie 10 g wbija się w drewniany klocek o masie 2 kg wiszący na linkach. Klocek z pociskiem wznosi się o 8 cm. Jaka była prędkość pocisku? Jaka część jego energii zamieniła się w ciepło?
- 4 Na skrzyżowaniu samochód 1200 kg jadący na wschód z prędkością 15 m/s zderza się z samochodem 1800 kg jadącym na północ z prędkością 10 m/s. Samochody się szczepiają. Z jaką prędkością i w jakim kierunku się przesuwają? Ile energii kinetycznej zginęło?
- 5 Pokaż, że w sprężystym zderzeniu jednakowych kul, z których jedna stoi, kule rozbiegają się pod kątem prostym (o ile zderzenie nie jest centralne).

podstawowe średnie feynmanowskie

4 Środek masy

4.1 Punkt, który porusza się prosto

Rzucony młotek wiruje i koziołkuje, a mimo to jeden jego punkt leci po zwykłej paraboli, jak kamień. Ten punkt to **środek masy**. FLP I-18-1, I-19-1 Dla układu punktów materialnych definiujemy

DEFINICJA · ŚRODEK MASY

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}, \quad M = \sum_i m_i; \quad \text{dla ciała ciągłego: } \vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm.$$

Różniczkując dwukrotnie: $M\ddot{\vec{R}} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{P}$ (pęd całkowity), a $M\ddot{\vec{R}} = \sum \vec{F}_i$. W sumie sił wszystkie siły wewnętrzne znoszą się parami (trzecia zasada), więc zostają tylko zewnętrzne.

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{zewn}}, \quad \vec{P} = M \vec{V}_{\text{śm}}.$$

Środek masy porusza się tak, jakby cała masa była w nim skupiona i działały na nią tylko siły zewnętrzne. Siły wewnętrzne, nawet wybuch, nie mogą zmienić jego ruchu.

To prawo wyjaśnia, dlaczego w działach 1 i 2 mogliśmy traktować samochody, piłki i ludzi jak punkty: ich środki masy rzeczywiście poruszają się jak punkty. Tłumaczy też, dlaczego nie da się podnieść samego siebie za włosy i dlaczego łódka odpływa, gdy idziemy po niej w stronę brzegu.

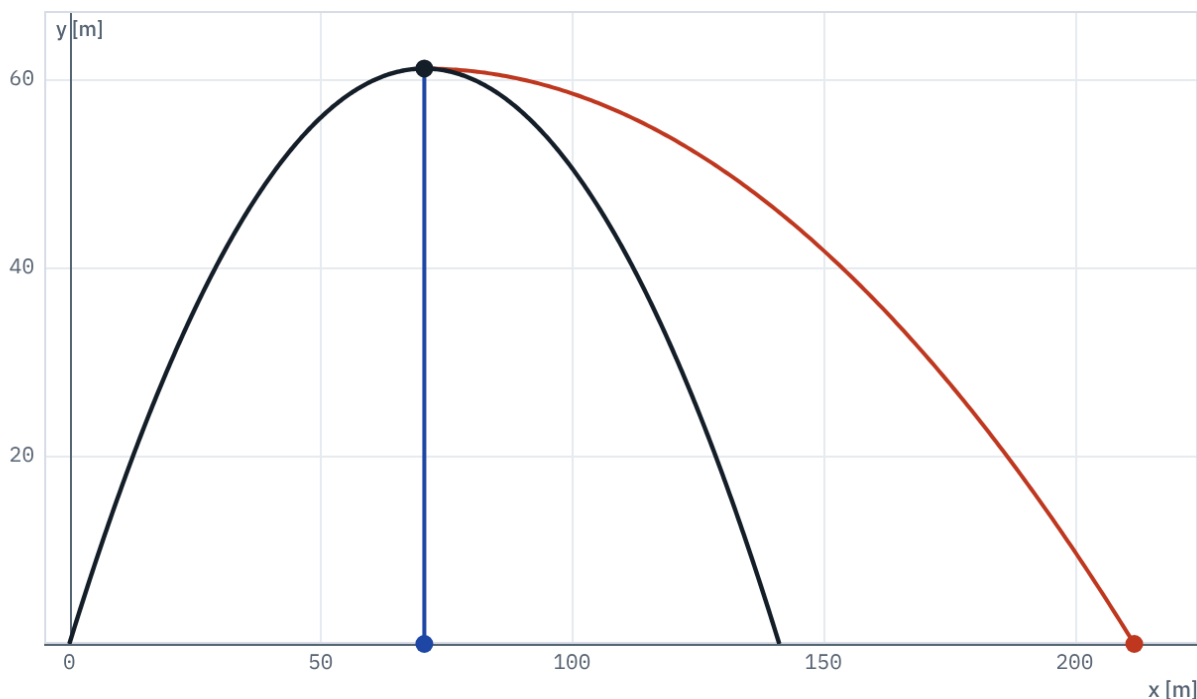
4.2 Jak znaleźć środek masy

Dla ciał symetrycznych środek masy leży na osi lub w środku symetrii. FLP I-19-2 W innych przypadkach liczymy całkę (lekcje 1.5 Całki, 3.3 Całki podwójne i potrójne). Dwa przydatne triki: ciało złożone z części traktujemy jak układ punktów umieszczonych w środkach mas części, a otwór traktujemy jak część o masie ujemnej.

Przykład: półokrąg z drutu o promieniu R . Element łuku o kącie $d\theta$ ma masę $dm = \lambda R d\theta$ i wysokość $y = R \sin \theta$, więc $Y = \frac{1}{\lambda \pi R} \int_0^\pi R \sin \theta \cdot \lambda R d\theta = \frac{2R}{\pi} \approx 0,64R$. Środek masy leży poza drutem, w pustym miejscu. Tak samo jest z obręczą, bumerangiem i skoczkiem wzwyż w stylu Fosbury'ego, którego środek masy przechodzi *pod* poprzeczką.

SYMULACJA 3

Pocisk rozpada się w locie na dwa odłamki. Zmieniaj chwilę wybuchu, stosunek mas i kierunek „kopnięcia” odłamków. Każdy odłamek leci po swojej paraboli, ale ich środek masy (gruba ciągła linia) leci dalej po paraboli pocisku, dopóki żaden odłamek nie uderzy w ziemię. Ustawienia początkowe odtwarzają zadanie 4.4: jeden odłamek spada pionowo.



— odłamek 1 — odłamek 2 — środek masy — — tor bez wybuchu

upadek odłamka 1 70,6 m

upadek odłamka 2 211,9 m

środek masy punktów upadku 141,2 m

zasięg bez wybuchu 141,2 m

czasy spadania 1 / 2 3,53 / 3,53 s

Odłamki spadają jednocześnie, więc środek masy punktów upadku (141,2 m) wypada dokładnie w zasięgu pocisku (141,2 m).

Stan na rysunku: wybuch po 3,53 s, udział masy odłamka 1: 0,50, kierunek 180° , prędkość kopnięcia 20 m/s; upadki w 70,6 m i 211,9 m.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 40 min

- Masa Ziemi to $5,972 \cdot 10^{24}$ kg, Księżycyca $7,342 \cdot 10^{22}$ kg, a odległość ich środków 384 400 km. Gdzie leży środek masy układu? Czy wewnątrz Ziemi (promień 6371 km)?

- 2 Człowiek o masie 60 kg stoi na rufie łódki o masie 120 kg i długości 3 m, która spoczywa na spokojnej wodzie. Przechodzi na dziób. O ile przesunie się łódka względem brzegu? Opór wody pomijamy.
- 3 Oblicz położenie środka masy jednorodnego półkola (płytki) o promieniu R . Porównaj z półokręgiem z drutu.
- 4 Pocisk wystrzelony ukośnie rozpada się w najwyższym punkcie toru na dwie równe części. Jedna spada pionowo w dół (tuż po wybuchu ma prędkość zerową). Gdzie spadnie druga, jeśli bez wybuchu pocisk upadłby w odległości D od działa?
- 5 Raca wystrzelona pionowo w górę z prędkością 30 m/s wybucha po 1,5 s na wiele kawałków lecących we wszystkich kierunkach. Gdzie jest środek masy kawałków 2 s po wystrzale (zanim któryś spadnie)?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

5 Rakieta: ciało o zmiennej masie

Rakieta w próżni nie ma się od czego odepchnąć, a jednak przyspiesza. Odpycha się od własnych spalin: wyrzuca masę do tyłu, a pęd całkowity rakiety i spalin się nie zmienia.

5.1 Równanie Ciołkowskiego

W chwili t rakieta ma masę m i prędkość v . W czasie dt wyrzuca masę dm_s spalin z prędkością u względem siebie (do tyłu), a sama zyskuje dv i ma masę $m - dm_s$. Bilans pędu w układzie poruszającym się z prędkością v , w którym rakieta chwilowo spoczywa, bez sił zewnętrznych:

$$0 = (m - dm_s) dv + dm_s (-u) \Rightarrow m dv = u dm_s = -u dm,$$

bo masa rakiety maleje o dm_s ($dm = -dm_s$). Rozdzielamy zmienne (lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne) i całkujemy od masy startowej m_0 do końcowej m_1 :

PRAWO · RÓWNANIE CIOŁKOWSKIEGO I CIĄG

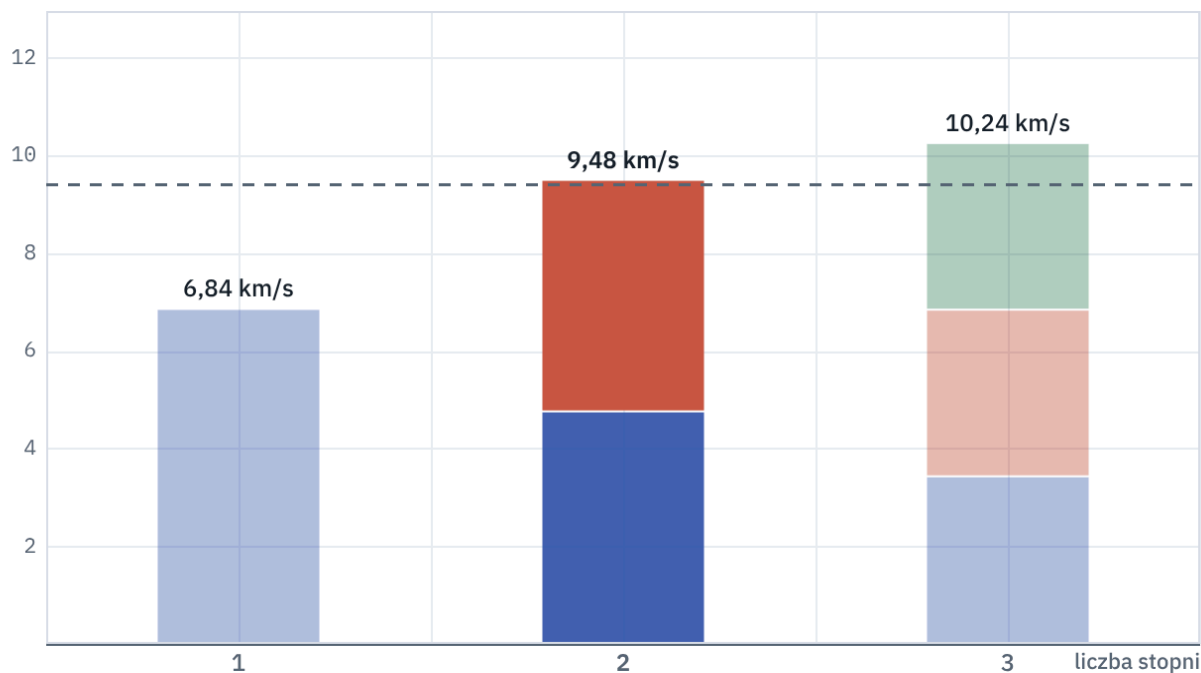
$$\Delta v = u \ln \frac{m_0}{m_1}, \quad F_{\text{ciągu}} = u \dot{m}_s.$$

u to prędkość wylotowa spalin, $\dot{m}_s$ to masa spalin wyrzucana na sekundę, a m_0/m_1 to **stosunek mas** (z paliwem i bez). Przyrost prędkości nie zależy od tego, jak szybko spalamy paliwo (w próżni i bez grawitacji; przy starcie z Ziemi wolne spalanie zwiększa straty grawitacyjne), tylko ile go jest i jak szybko wylatują spaliny.

Logarytm to zła wiadomość dla konstruktorów. Chemiczne silniki dają $u \approx 2,5\text{--}4,5$ km/s, a wejście na niską orbitę wymaga ok. 9,4 km/s (prędkość orbitalna ok. 7,8 km/s plus straty na grawitację i opór). Przy $u = 3$ km/s stosunek mas musi wynosić $e^{9,4/3} \approx 23$: paliwo stanowi 96% masy startowej, a na zbiorniki, silniki i ładunek zostaje 4%. Rozwiązaniem są **stopnie**: puste zbiorniki odrzuca się po drodze, żeby nie rozpędzać martwej masy.

SYMULACJA 4

Rakieta jedno-, dwu- i trzystopniowa. Ustaw prędkość wylotową u , udział konstrukcji w masie każdego stopnia i udział ładunku w masie startowej. Słupki pokazują przyrost prędkości z każdego stopnia; linia przerywana to ok. 9,4 km/s potrzebne do wejścia na orbitę.



— stopień 1 — stopień 2 — stopień 3 — — potrzebne na orbitę $\approx 9,4$ km/s

Δv rakiety 9,48 km/s

Δv jednego stopnia 4,74 km/s

stosunek mas stopnia 4,40

paliwo w masie stopnia 77,3%

granica (masa konstrukcji $\rightarrow 0$) 12,52 km/s

2 stopnie wystarczają: $9,48 \text{ km/s} \geq 9,4 \text{ km/s}$.

Stan na rysunku: 2 st., $u = 3,20 \text{ km/s}$, konstrukcja 10,0%, ładunek 2,0%; $\Delta v = 9,48 \text{ km/s}$ (1/2/3 stopnie: 6,84 / 9,48 / 10,24 km/s).

SKĄD TO WIEMY?

Konstantin Ciołkowski opublikował swoje równanie w 1903 r. w artykule o badaniu przestrzeni kosmicznej za pomocą przyrządów odrzutowych. Później (1929) opisał też rakiety wielostopniowe („pociągi rakietowe”). Równanie wynika wyłącznie z zasady zachowania pędu i jest sprawdzane przy każdym starcie: zmierzone przyrosty prędkości stopni zgadzają się z obliczonymi z u i stosunku mas po uwzględnieniu grawitacji i oporu powietrza.

- 1 Silnik wyrzuca 1000 kg spalin na sekundę z prędkością 3000 m/s. Jaki jest ciąg? Z jakim przyspieszeniem startuje pionowo rakieta o masie 200 t?
- 2 Rakieta ma stosunek mas 5, a spaliny wylatują z prędkością 3 km/s. Jaki przyrost prędkości uzyska w próżni?
- 3 Jaki stosunek mas potrzebuje jednostopniowa rakieta z $u = 3$ km/s, żeby uzyskać 9,4 km/s? A każdy z dwóch stopni, jeśli każdy daje połowę tego przyrostu?
- 4 Student siedzi na deskorolce z gaśnicą CO₂; razem (student, deskorolka, gaśnica) mają 75 kg. Otwiera gaśnicę skierowaną do tyłu. Gaśnica wyrzuca 0,5 kg/s gazu z prędkością 20 m/s przez 10 s. Jaki jest ciąg i o ile wzrośnie prędkość (bez tarcia)?

□ □ □ podstawowe ▣ ▣ ▣ średnie ▤ ▤ ▤ feynmanowskie

6 Pęd, energia i granice zasady

6.1 Pęd zachowany zawsze, energia kinetyczna nie

W prologu dwa ślizgacze stanęły: pęd całkowity był zerowy przed zderzeniem i jest zerowy po. Energia kinetyczna zniknęła, ale energia całkowita nie, bo przeszła w ciepło (dział 2 „Energia”). Asymetria jest głęboka: ciepło to chaotyczny ruch cząsteczek we wszystkich kierunkach. Ich energie kinetyczne są dodatnie i się sumują, a pędy, jako wektory o przypadkowych kierunkach, się znoszą. Dlatego pęd nie może „schować się” w cieple tak jak energia. FLP I-10-4

6.2 Pęd światła i pęd relatywistyczny

Światło nie ma masy, a mimo to niesie pęd: $p = E/c$. Laser świecący na lustro odpycha je, a żagiel słoneczny może napędzać sondę (zadanie 6.2). Przy prędkościach bliskich prędkości światła wzór $p = mv$ przestaje wystarczać. Pęd zachowuje się dalej, ale trzeba go liczyć ze wzoru

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

gdzie m_0 to masa spoczynkowa. Szczegóły w dziale 7 „Układy odniesienia i szczególna teoria względności”. FLP I-10-5

6.3 Czego ten dział nie wyjaśnił

1. **Dlaczego pęd jest zachowany.** Wyprowadziliśmy to z trzeciej zasady, ale trzecia zasada nie obowiązuje dla sił elektromagnetycznych między poruszającymi się ładunkami: siły nie są wtedy równe i przeciwne. Pęd jest zachowany i tak, bo część pędu niesie pole elektromagnetyczne (dział 16 „Indukcja, równania Maxwella i fale elektromagnetyczne”). Głębszy powód to jednorodność przestrzeni: prawa fizyki nie zależą od tego, gdzie robimy doświadczenie (twierdzenie Noether, por. dział 2 i lekcja 6.1 Rachunek wariacyjny).
2. **Obrót.** Środek masy opisuje ruch postępowy, ale nie koziołkowanie młotka. Do obrotu potrzebna jest kolejna wielkość zachowana: moment pędu (dział 4 „Ruch obrotowy i bryła sztywna”).
3. **Czego użyliśmy bez dowodu.** Wzoru na pęd relatywistyczny, pędu światła i tego, że w rozpadzie beta bierze udział neutrino.

ZADANIA · CZĘŚĆ 6

4 zadania · ok. 30 min

- 1  Ślizgacz o masie m i prędkości v zderza się ze stojącym jednakowym ślizgaczem i skleja. Jaka część energii kinetycznej zamienia się w ciepło?
- 2  Laser o mocy 1 W świeci prostopadle na czarną powierzchnię, a potem na lustro. Jaka siła działa w obu przypadkach? Natężenie światła słonecznego przy Ziemi to 1361 W/m^2 . Jakie ciśnienie wywiera ono na idealne lustro?
- 3  Elektron (masa spoczynkowa $0,511 \text{ MeV}/c^2$) porusza się z prędkością $0,99c$. Oblicz jego pęd ze wzoru relatywistycznego i porównaj z m_0v .
- 4  Piłka o masie $0,5 \text{ kg}$ spada na podłogę i odbija się z prędkością 5 m/s (przed uderzeniem też miała 5 m/s). Pęd piłki się zmienił. Dokąd poszedł? Z jaką prędkością odskoczyła Ziemia?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA PĘDOWA

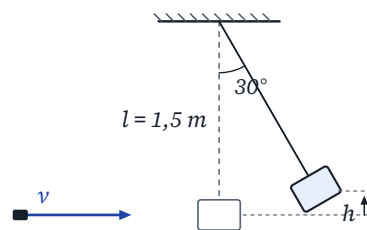
1. **Oszacuj** wynik, zanim zaczniesz liczyć.
2. **Wybierz układ ciał** i sprawdź, czy działają na niego siły zewnętrzne w interesującym kierunku. Jeśli nie, albo działają przez bardzo krótki czas (zderzenie), pęd w tym kierunku jest zachowany.
3. **Wybierz osie i zwroty**; zapisz prędkości ze znakami. Pęd to wektor: każdą składową bilansuj osobno.
4. **Pęd przed = pęd po**. Jeśli niewiadomych jest więcej niż równań, dopisz informację o energii: zderzenie sprężyste ($e = 1$), znany współczynnik restytucji, sklejenie albo dane o ruchu po zderzeniu.
5. **Etapy**. Zderzenie i ruch po zderzeniu to osobne etapy: w zderzeniu zachowany jest pęd, potem często energia (wahadło balistyczne).
6. **Środek masy**. Gdy siły zewnętrzne poziome nie działają, środek masy stoi albo jedzie jednostajnie; to często najszybsza droga (łódka, wybuch).
7. **Sprawdzenie**: jednostki, przypadki graniczne (równe masy, bardzo ciężkie ciało), energia po zderzeniu nie może być większa niż przed (chyba że coś wybuchło).

Przykład 3.1

Wahadło balistyczne

Pocisk o masie 5 g wbija się w klocek o masie 1 kg zawieszony na lince o długości 1,5 m. Klocek odchyła się o 30° . Oblicz prędkość pocisku i sprawdź, ile energii zostało w ruchu.

- 1 Oszacowanie: pociski karabinowe lecą z prędkością kilkuset m/s.
- 2 Wznoszenie (energia): $h = l(1 - \cos 30^\circ) \approx 0,201$ m, więc $V = \sqrt{2gh} \approx 1,99$ m/s.
- 3 Zderzenie (pęd): $mv = (m + M)V$, więc $v = \frac{1,005}{0,005} \cdot 1,99 \approx 399$ m/s.
- 4 Energie: pocisk $\frac{1}{2} \cdot 0,005 \cdot 399^2 \approx 398$ J; klocek z pociskiem tuż po zderzeniu $\frac{1}{2} \cdot 1,005 \cdot 1,99^2 \approx 2$ J.



Wahadło balistyczne: pocisk wbija się w klocek, który odchyła się o 30°

Wynik: $v \approx 400$ m/s; w ruchu zostało 0,5% energii, reszta poszła w ciepło i odkształcenie drewna.

Sprawdzenie: ułamek zachowanej energii to $\frac{m}{m+M} = \frac{0,005}{1,005} \approx 0,5\% \checkmark$. Gdybyśmy policzyli całość z zasady zachowania energii, $\frac{1}{2}mv^2 = (m + M)gh$, wysłoby $v = \sqrt{2gh(m + M)/m} \approx 28$ m/s, czternaście razy za mało.

Przykład 3.2

Ślizgacze z niepełnym odbiciem

Ślizgacz 0,2 kg jedzie w prawo z prędkością 1,5 m/s, ślizgacz 0,3 kg w lewo z prędkością 0,5 m/s. Współczynnik restytucji $e = 0,5$. Oblicz prędkości po zderzeniu i utraconą energię.

- 1 $v_{\text{śm}} = \frac{0,2 \cdot 1,5 + 0,3 \cdot (-0,5)}{0,5} = 0,3 \text{ m/s}$.
- 2 W układzie środka masy: 1,2 i $-0,8 \text{ m/s}$; po zderzeniu odwrócone i zmniejszone o połowę: $-0,6$ i $+0,4 \text{ m/s}$.
- 3 W laboratorium: $v'_1 = 0,3 - 0,6 = -0,3 \text{ m/s}$, $v'_2 = 0,3 + 0,4 = 0,7 \text{ m/s}$.
- 4 Energia: 0,2625 J przed, 0,0825 J po; zginęło 0,18 J.

Wynik: lżejszy wraca z prędkością 0,3 m/s, cięższy odjeżdża w prawo z prędkością 0,7 m/s; 0,18 J zamieniło się w ciepło.

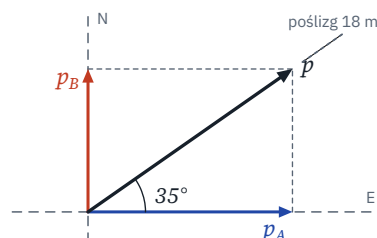
Sprawdzenie: pęd: 0,15 przed, $0,2 \cdot (-0,3) + 0,3 \cdot 0,7 = 0,15 \checkmark$. Wzór $\frac{1}{2} \mu v_{\text{wzgl}}^2 (1 - e^2) = \frac{1}{2} \cdot 0,12 \cdot 4 \cdot 0,75 = 0,18 \text{ J} \checkmark$.

Przykład 3.3

Biegły na skrzyżowaniu

Samochód A (1500 kg) jechał na wschód, samochód B (1000 kg) na północ. Po zderzeniu szczepione wozy przesunęły się po asfalcie o 18 m w kierunku 35° na północ od wschodu (współczynnik tarcia 0,7). Kierowca A twierdzi, że jechał przepisowe 50 km/h. Czy to możliwe?

- 1 Poślizg (energia): $V = \sqrt{2\mu_k g s} = \sqrt{2 \cdot 0,7 \cdot 9,81 \cdot 18} \approx 15,7 \text{ m/s}$.
- 2 Pęd tuż po zderzeniu: $2500 \cdot 15,7 \approx 39\,300 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ pod kątem 35° .
- 3 Składowa wschodnia pochodzi tylko od A: $1500 v_A = 39\,300 \cos 35^\circ$, $v_A \approx 21,5 \text{ m/s} \approx 77 \text{ km/h}$.
- 4 Składowa północna tylko od B: $1000 v_B = 39\,300 \sin 35^\circ$, $v_B \approx 22,5 \text{ m/s} \approx 81 \text{ km/h}$.



Skrzyżowanie: pędy przed zderzeniem i kierunek poślizgu

Wynik: A jechał ok. 77 km/h, B ok. 81 km/h. Twierdzenie kierowcy A jest fałszywe.

Sprawdzenie: energia kinetyczna przed zderzeniem $\approx 600 \text{ kJ}$, tuż po $\approx 309 \text{ kJ}$; ubyło, jak musi przy szczepieniu ✓. Właśnie tak biegli rekonstruuja wypadki: pomiar śladów hamowania i bilans pędu.

Przykład 3.4

Spacer po łódce

Łódka o masie 160 kg i długości 4,5 m stoi dziobem do pomostu, 1 m od niego. Wędkarz o masie 80 kg przechodzi z rufy na dziób, żeby wyjść na pomost. Czy dosięgnie go, stojąc na dziobie?

- 1 Środek masy układu stoi (brak poziomych sił zewnętrznych, opór wody pomijamy).
- 2 Wędkarz przesunął się względem łódki o 4,5 m w stronę pomostu. Łódka cofa się o x : $80(4,5 - x) = 160x$, $x = 1,5 \text{ m}$.
- 3 Dziób odsunie się od pomostu o 1,5 m, czyli będzie 2,5 m od niego.

Wynik: nie dosięgnie: zamiast 1 m do pomostu będzie miał 2,5 m.

Sprawdzenie: wędkarz przesunął się względem brzegu o $4,5 - 1,5 = 3 \text{ m}$, łódka o 1,5 m w przeciwną stronę: $80 \cdot 3 = 160 \cdot 1,5$ ✓.

Przykład 3.5

Po co stopnie?

Ładunek stanowi 2% masy startowej rakiety. Konstrukcja (zbiorniki, silniki) to 10% masy każdego stopnia bez ładunku. Spaliny wylatują z prędkością 3,2 km/s. Jaki przyrost prędkości da rakietę jedno-, dwu- i trzystopniowa ze stopniami podobnymi do siebie?

- 1 Jeden stopień: masa końcowa to ładunek plus konstrukcja: $0,02 + 0,1 \cdot 0,98 = 0,118$ masy startowej. $\Delta v = 3,2 \ln \frac{1}{0,118} \approx 6,8$ km/s. Za mało na orbitę.
- 2 Dwa stopnie: każdy stopień jest „ładunkiem” poprzedniego, a ułamek ładunku każdego stopnia wynosi $\lambda = \sqrt{0,02} \approx 0,141$. Stosunek mas stopnia: $\frac{1}{0,1(1-\lambda)+\lambda} \approx 4,40$. $\Delta v = 2 \cdot 3,2 \ln 4,40 \approx 9,5$ km/s.
- 3 Trzy stopnie: $\lambda = 0,02^{1/3} \approx 0,271$, stosunek mas 2,90, $\Delta v = 3 \cdot 3,2 \ln 2,90 \approx 10,2$ km/s.

Wynik: 6,8, 9,5 i 10,2 km/s. Dwa stopnie ledwo wystarczają (9,48 km/s); trzeci dodaje już tylko ok. 0,75 km/s.

Sprawdzenie: przy zerowej masie konstrukcji podział na stopnie nic by nie dawał: $\Delta v = 3,2 \ln 50 \approx 12,5$ km/s niezależnie od liczby stopni ✓. Zysk ze stopni bierze się wyłącznie z wyrzucania pustych zbiorników.

Przykład 3.6

Pocisk, który się rozpadł

Pocisk o masie 3 kg wystrzelono z prędkością 50 m/s pod kątem 45° . W najwyższym punkcie toru rozpadł się na odłamek 1 kg, który tuż po wybuchu miał prędkość zerową, i odłamek 2 kg. Gdzie spadnie większy odłamek?

- 1 Bez wybuchu zasięg $D = v_0^2 \sin 90^\circ / g \approx 254,8$ m; wierzchołek w $x = 127,4$ m, prędkość pozioma $v_x = 35,4$ m/s.
- 2 Pęd poziomy w wybuchu: $3 \cdot 35,4 = 1 \cdot 0 + 2 v_2$, $v_2 \approx 53,0$ m/s.
- 3 Oba odłamki spadają z wierzchołka w czasie $v_0 \sin 45^\circ / g \approx 3,60$ s. Większy przeleci $53,0 \cdot 3,60 \approx 191$ m i spadnie w $x \approx 318,6$ m.

Wynik: ok. 319 m od działa.

Sprawdzenie: środek masy w chwili lądowania: $\frac{1 \cdot 127,4 + 2 \cdot 318,6}{3} = 254,8$ m, dokładnie zasięg pocisku bez wybuchu ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „W zderzeniu zachowuje się energia kinetyczna.”

Tylko w sprężystym. Zachowuje się zawsze pęd. Energia całkowita też, ale jej część przechodzi w ciepło, którego w bilansie mechanicznym nie widać.

× „Siła i popęd to to samo.”

Popęd to siła razy czas. Ta sama zmiana pędu może wymagać ogromnej siły w krótkim czasie albo małej w długim; na tym polega działanie poduszki powietrznej.

× „Rakieta odpycha się od powietrza.”

Odpycha się od własnych spalin. W próżni działa lepiej niż w atmosferze, bo nie ma oporu, a spaliny swobodnie się rozprężają.

× „Środek masy to punkt, w którym jest najwięcej masy.”

To średnia ważona położeń. Może leżeć poza ciałem: w środku obręczy albo pod poprzeczką, nad którą przelatuje skoczek.

× „Ciężkie ciało ma zawsze większy pęd.”

Pęd zależy też od prędkości. Pocisk 10 g z prędkością 800 m/s ma taki sam pęd jak karabin 4 kg z prędkością 2 m/s.

× „Wybuch zmienia ruch pocisku.”

Zmienia ruch odłamków, ale nie ruch ich środka masy. Siły wybuchu są wewnętrzne.

Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia. Do każdego da się dojść samymi zasadami zachowania i rozsądnymi przybliżeniami.

- 1 **Książki nad przepaścią.** Układasz jednakowe książki o długości L w stos na brzegu stołu, każdą wysuniętą nad poprzednią. Jak daleko może wystawać górna książka poza brzeg stołu przy 4 książkach? Czy da się wysunąć ją o więcej niż całą długość książki? Ile książek trzeba na nawis $2L$?
- 2 **Kołyska Newtona.** Pięć stalowych kul wisi w rzędzie, stykając się. Odchylasz dwie kule z jednego końca i puszczasz. Dlaczego po drugiej stronie odskakują dokładnie dwie kule, a nie jedna z prędkością $\sqrt{2}$ razy większą (co też zachowuje energię)?
- 3 **Piłka na piłce.** Na piłce do koszykówki kładziesz piłeczkę tenisową i upuszczasz obie z wysokości h . Na jaką wysokość podskoczy piłeczka? Przyjmij, że zderzenia są sprężyste, a piłeczka jest dużo lżejsza od piłki.
- 4 **Proca grawitacyjna.** Sonda leci z prędkością 10 km/s (względem Słońca) prosto na Jowisza, który porusza się jej naprzeciw z prędkością 13 km/s . Sonda okrąża planetę i wylatuje w kierunku, z którego przyleciała. Z jaką prędkością (względem Słońca)? Skąd się wzięła energia?
- 5 **Astronauta bez liny.** Astronauta o masie 100 kg (ze skafandrem) dryfuje nieruchomo 20 m od stacji. Ma przy sobie klucz o masie 1 kg . Jak może wrócić i ile mu to zajmie, jeśli rzuci klucz z prędkością 10 m/s ?
- 6 **Wózek w deszczu.** Otwarty wózek toczy się bez tarcia po poziomym torze w ulewie; krople spadają pionowo. (a) Jak zmienia się jego prędkość? (b) A jeśli w dnie jest dziura i woda wycieka tak samo szybko, jak napływa? (c) Czy wózek z dziurą przyspieszy, gdy deszcz ustanie, a woda wciąż wycieka?
- 7 **Łańcuch na wadze.** Trzymasz łańcuch o długości L i masie M pionowo tak, że dolny koniec dotyka szalki wagi. Puszczasz go. Co pokazuje waga, gdy na szalce leży już kawałek długości x ?
- 8 **Skok, który przesuwa Ziemię.** Człowiek o masie 70 kg podskakuje na wysokość $0,5 \text{ m}$. Z jaką prędkością odskakuje Ziemia i o ile się przesuwa, zanim człowiek wróci? Czy ma to jakiegokolwiek znaczenie?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Czy układ może mieć energię kinetyczną, a zerowy pęd? A pęd bez energii kinetycznej?

Pierwsze tak: dwa ślizgacze jadące ku sobie z równymi prędkościami. Drugie nie: jeśli któreś ciało ma niezerowy pęd, ma też niezerową energię kinetyczną.

- 2 Na łódce stoi wentylator dmuchający w żagiel tej samej łódki. Czy łódka popłynie?

Jeśli powietrze wytraca na żaglu prędkość i splywa na boki, łódka nie popłynie: wentylator pcha łódkę do tyłu dokładnie tak mocno, jak powietrze pcha żagiel do przodu. Jeśli powietrze odbija się od żagla do tyłu, żagiel dostaje więcej pędu (jak przy odbiciu w części 1.2) i łódka może ruszyć do przodu. Ale wentylator obrócony do tyłu, bez żagla, daje co najmniej tyle samo.

- 3 Pocisk i karabin mają po strzale pędy o tej samej wartości. Dlaczego pocisk jest groźny, a odrzut nie?

Energia $p^2/2m$ jest odwrotnie proporcjonalna do masy: pocisk ma jej 400 razy więcej. Do tego karabin opiera się o ramię, które rozkłada popęd w czasie.

- 4 Upuszczona piłka przyspiesza. Czy jej pęd jest zachowany?

Nie, bo działa na nią siła zewnętrzna (ciężar). Zachowany jest pęd układu piłka + Ziemia.

- 5 Gdzie jest środek masy obwarzanka?

W środku dziury, gdzie nie ma ani okruszka.

- 6 Czy rakietę przyspiesza w próżni szybciej, czy wolniej niż w powietrzu?

Szybciej: ciąg zależy od spalin, a nie od powietrza, a w powietrzu dochodzi opór i ciśnienie zewnętrzne zmniejszające ciąg.

- 7 Dwie jednakowe kule bilardowe (jedna z nich przed zderzeniem stała) rozbiegły się pod kątem 60° . Co z tego wynika?

Że zderzenie nie było sprężyste: dla sprężystego kąt wynosiłby 90° . Część energii przeszła w ciepło i obrót kul.

8 Dlaczego przy skoku z wysokości uginamy kolana?

Ta sama zmiana pędu rozłożona na dłuższy czas wymaga mniejszej siły.

11 Karta wzorów i co dalej

PĘD I ZDERZENIA

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\text{popęd: } \vec{J} = \int \vec{F} dt = \Delta\vec{p}; \quad F_{\text{sr}} = \Delta p / \Delta t$$

$$\vec{F}_{\text{zewn}} = 0 \Rightarrow \sum m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

$$v_{\text{śm}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad v' = v_{\text{śm}} - e(v - v_{\text{śm}})$$

$$\text{strata energii: } \frac{1}{2} \mu v_{\text{wzgl}}^2 (1 - e^2), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

równe masy, sprężyste, jedna stoi: kąt 90°

ŚRODEK MASY I RAKIETA

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{\text{zewn}}, \quad \vec{P} = M\vec{V}_{\text{śm}}$$

$$\text{półokrąg: } 2R/\pi; \quad \text{półkole: } 4R/(3\pi)$$

$$\text{Ciołkowski: } \Delta v = u \ln \frac{m_0}{m_1}; \quad \text{ciąg: } F = u\dot{m}_s$$

$$\text{światło: } p = E/c; \quad \text{relatywistycznie: } p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 9-1 (pęd i siła), rozdz. 10 (całość), 18-1 (środek masy).
- **Dla chętnych:** 19-1, 19-2 (ruch i położenie środka masy), 10-5 (pęd relatywistyczny), 39-2 (ciśnienie gazu z pędu cząsteczek).

Następny dział: **Ruch obrotowy i bryła sztywna**. Środek masy rzuconego młotka leci po paraboli, ale sam młotek wokół niego koziółkuje. Okaże się, że obrót ma własną „bezwładność” (moment bezwładności), własny „pęd” (moment pędu) i własną zasadę zachowania, dzięki której tyżwiarka przyspiesza piruet, przyciągając ręce.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $J = 0,45 \cdot 25 = 11,25 \text{ N}\cdot\text{s}$; $F_{\text{sr}} = 11,25/0,008 \approx 1400 \text{ N}$, ok. 320 razy więcej niż ciężar piłki.
2. $\Delta p = 0,145 \cdot (50 - (-40)) = 13,05 \text{ N}\cdot\text{s}$; $F_{\text{sr}} = 13,05/0,0012 \approx 10\,900 \text{ N}$, ok. 7600 razy więcej niż ciężar piłki.
3. $v \approx 4,43 \text{ m/s}$. (a) $a \approx 981 \text{ m/s}^2 = 100g$, $N \approx 69\,000 \text{ N}$, czas 4,5 ms. (b) $a \approx 32,7 \text{ m/s}^2 = 3,3g$, $N \approx 3000 \text{ N}$, czas 0,14 s. Zmiana pędu ta sama, siła 23 razy mniejsza.
4. W każdej sekundzie ściana zabiera wodzie pęd $0,5 \cdot 20 = 10 \text{ N}\cdot\text{s}$, więc $F = 10 \text{ N}$. Przy sprężystym odbiciu: 20 N (pułapka w części 1.2).
5. Popęd to pole trójkąta: $\frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 0,004 = 4 \text{ N}\cdot\text{s}$; $v = 4/0,06 \approx 67 \text{ m/s}$.

Zadania • część 2

1. $80 v = 50 \cdot 2$, $v = 1,25 \text{ m/s}$ w przeciwną stronę.
2. $v = 0,01 \cdot 800/4 = 2 \text{ m/s}$. Energie: pocisk 3200 J, karabin 8 J. Te same pędy, energie w stosunku odwrotnym do mas (400 : 1).
3. Pozioma składowa pędu: $100 \cdot 3 = 120 v$, $v = 2,5 \text{ m/s}$. Energia: 450 J przed, 375 J po. Brakujące 75 J poszło w ciepło przy „zderzeniu” piasku z wózkiem: piasek musiał zostać rozpędzony w poziomie przez tarcie.
4. Pędy równe, więc $E_{\text{Th}} = E_{\alpha} \cdot \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}} = 4,20 \cdot \frac{4}{234} \approx 0,072 \text{ MeV}$. Prędkość $234/4 = 58,5$ razy mniejsza.
5. W pociągu jadącym w prawo z prędkością 1 m/s ślizgacze mają +2 i -2 m/s; z symetrii para po sklejeniu stoi w pociągu, czyli względem toru jazdy w prawo z prędkością 1 m/s. Sprawdzenie: $m \cdot 3 + m \cdot (-1) = 2m \cdot 1 \checkmark$.

Zadania • część 3

1. $v_{\text{śm}} = 1 \text{ m/s}$. $v'_1 = 1 - (4 - 1) = -2 \text{ m/s}$ (odbija się), $v'_2 = 1 - (0 - 1) = 2 \text{ m/s}$. Energia: 8 J przed, $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 8 \text{ J}$ po $\checkmark$.
2. $v' = -\frac{11}{13}v$, zachowuje $(11/13)^2 \approx 0,716$ energii, traci $\frac{48}{169} \approx 28\%$. Liczba zderzeń czołowych: $\ln(8 \cdot 10^7)/\ln(1/0,716) \approx 55$. Zderzenia nie są zwykle czołowe, więc naprawdę potrzeba ok. 115. Wodór ma masę neutronu: zderzenie czołowe zabiera całą energię, a średnio połowę; średni logarytmiczny dekrement wynosi $\xi = 1$, więc wystarczy ok. $\ln(8 \cdot 10^7) \approx 18$ zderzeń.
3. Wznoszenie: $V = \sqrt{2gh} \approx 1,25 \text{ m/s}$. Zderzenie: $v = V \frac{m+M}{m} \approx 252 \text{ m/s}$. Ciepło: $1 - \frac{m}{m+M} \approx 99,5\%$ energii.
4. Pęd: $(18\,000; 18\,000) \text{ kg}\cdot\text{m/s}$, więc $v = \frac{18\,000\sqrt{2}}{3000} \approx 8,5 \text{ m/s}$ na północny wschód (45° od kierunku wschodniego). Energia: 225 kJ przed, 108 kJ po; zginęło 117 kJ (52%).
5. Pęd: $\vec{v} = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$; podnosimy do kwadratu (iloczyn skalarny, lekcja 1.1 Wektory): $v^2 = v'^2_1 + v'^2_2 + 2\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2$. Energia: $v^2 = v'^2_1 + v'^2_2$. Odejmując: $\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0$. Jeśli żadna prędkość nie jest zerowa (zderzenie niecentralne), są prostopadłe.

Zadania · część 4

1. $d \cdot \frac{m_K}{m_Z + m_K} \approx 4670$ km od środka Ziemi, czyli wewnątrz, ok. 1700 km pod powierzchnią. Ziemia „chybocze się” wokół tego punktu raz w miesiącu.
2. Łódka przesuwa się o x do tyłu, człowiek o $3 - x$ do przodu: $60(3 - x) = 120x$, $x = 1$ m.
3. $Y = \frac{1}{\sigma \pi R^2/2} \int_0^\pi \int_0^R r \sin \theta \cdot \sigma r dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,42R$. Niżej niż dla drutu ($0,64R$), bo w płytce więcej masy jest blisko średnicy.
4. Obie części startują z tej samej wysokości z zerową prędkością pionową, więc spadają jednocześnie. W chwili lądowania środek masy jest w D . Pierwsza część jest w $D/2$, więc druga w $\frac{3}{2}D$.
5. Tam, gdzie byłaby raca bez wybuchu: $30 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 4 \approx 40,4$ m nad ziemią. Opór powietrza pomijamy, a on dla drobnych kawałków bywa ważny.

Zadania · część 5

1. $F = 3 \cdot 10^6$ N. Na starcie $a = F/m - g = 15 - 9,81 \approx 5,2$ m/s². W miarę spalania paliwa masa maleje, a przyspieszenie rośnie.
2. $\Delta v = 3 \ln 5 \approx 4,8$ km/s.
3. Jeden stopień: $e^{9,4/3} \approx 23$ (96% paliwa). Dwa stopnie: każdy $e^{4,7/3} \approx 4,8$ (79% paliwa w każdym stopniu). Taki stosunek da się zbudować, 23 praktycznie nie.
4. $F = 0,5 \cdot 20 = 10$ N. Masa spada z 75 do 70 kg: $\Delta v = 20 \ln \frac{75}{70} \approx 1,4$ m/s. Tarcie kółek w praktyce zje sporą część tego wyniku.

Zadania · część 6

1. Przed: $\frac{1}{2}mv^2$; po: $\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \frac{v^2}{4} = \frac{1}{4}mv^2$. Połowa energii poszła w ciepło.
2. Strumień pędu to P/c : czarna powierzchnia $3,3 \cdot 10^{-9}$ N, lustro dwa razy więcej, $6,7 \cdot 10^{-9}$ N. Ciśnienie na lustro: $2 \cdot 1361/c \approx 9,1 \cdot 10^{-6}$ Pa, czyli ok. 9 mikroniutonów na metr kwadratowy.
3. $\gamma = 1/\sqrt{1 - 0,99^2} \approx 7,09$; $p = \gamma m_0 v \approx 3,59$ MeV/c, a $m_0 v \approx 0,506$ MeV/c: siedem razy mniej.
4. Zmiana pędu piłki: 5 N·s w górę. Tyle samo pędu w dół dostała Ziemia: $v = 5/(5,97 \cdot 10^{24}) \approx 8 \cdot 10^{-25}$ m/s. Pęd układu piłka + Ziemia jest zachowany; Ziemia jest tak ciężka, że jej ruchu nie widać.

Zadania feynmanowskie

1. Górna książka może wystawać o $L/2$ poza drugą. Środek masy dwóch górnych leży wtedy $L/4$ od brzegu drugiej, więc druga może wystawać o $L/4$ poza trzecią. Ogólnie k -ta od góry wystaje o $\frac{L}{2k}$.
2. Nawis n książek: $\frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$. Dla 4 książek: $\frac{L}{2} \cdot \frac{25}{12} \approx 1,04L$: górna książka cała wisi nad przepaścią.
3. Szereg harmoniczny jest rozbieżny (lekcja 1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe), więc nawis może być dowolnie duży. Nawis $2L$ wymaga 31 książek.

2. 1. Jedna kula z prędkością $\sqrt{2}v$ zachowałaby energię ($\frac{1}{2}m \cdot 2v^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2$), ale pęd byłby $\sqrt{2}mv \neq 2mv$. Zabronione.
2. Dwie zasady zachowania to dwa równania, ale w układzie pięciu kul niewiadomych jest pięć. O wyniku decyduje to, że kule są sprężyste i zachowują się tak, jakby były lekko od siebie oddalone: zderzenia zachodzą jako ciąg zderzeń par jednakowych kul, a w każdym prędkość przechodzi w całości na następną kulę.
3. Prawdziwa kołyska nie jest idealna: kule się stykają, fala ściskania rozchodzi się w czasie i po kilku cyklach wszystkie kule kołyszą się razem.
3. 1. W układzie dużej piłki piłeczka nadlatuje z prędkością $2v$ i odbija się z prędkością $2v$ (ciało lekkie od ciężkiego).
2. W układzie podłogi: $2v + v = 3v$. Wysokość rośnie jak v^2 , więc piłeczka wzleci na $9h$.
3. Dla stosunku mas 0,05 dokładny rachunek daje $2,81v$ i $7,9h$; dla 0,1: $6,95h$. W praktyce piłki nie są sprężyste i wychodzi kilka h , co wciąż zaskakuje.
4. 1. To „zderzenie sprężyste” przez grawitację: w układzie Jowisza sonda nadlatuje z $10 + 13 = 23$ km/s i odlatuje z 23 km/s w przeciwną stronę.
2. Względem Słońca: $23 + 13 = 36$ km/s. Ogólnie $v' = v + 2U$, jak w zderzeniu lekkiej piłki z nadjeżdżającą ciężką ścianą.
3. Energię oddał Jowisz: jego prędkość zmalała o niewyobrażalnie mało, bo pęd sondy jest znikomy wobec jego pędu. Tak przyspieszały sondy Voyager i Cassini.
5. 1. Rzuca klucz w stronę przeciwną do stacji. Pęd: $1 \cdot 10 = 100v$, $v = 0,1$ m/s w stronę stacji.
2. Czas: $20/0,1 = 200$ s, nieco ponad trzy minuty.
3. To jest zasada rakiety z jednym „wyrzutem”. Rzucenie klucza dwa razy wolniej da dwa razy wolniejszy powrót, a nie żaden powrót. Najważniejsze: rzucać od stacji, a nie w jej stronę.
6. 1. (a) Krople nie mają poziomego pędu, a po wpadnięciu jadą z wózkiem. Pozioma składowa pędu mv jest stała, masa rośnie, więc prędkość maleje.
2. (b) Każdą kroplę trzeba rozpędzić do prędkości wózka, więc wózek dalej zwalnia. Woda wyciekająca pionowo (względem wózka) nie wywiera siły poziomej, a masa jest stała: $m\dot{v} = -\dot{m}_d v$, gdzie $\dot{m}_d$ to masa deszczu wpadająca na sekundę. Prędkość maleje wykładniczo, szybciej niż w (a), gdzie rosnąca masa daje tylko $v \propto 1/m$.
3. (c) Nie. Woda wyciekająca pionowo w dół (względem wózka) nie wywiera siły poziomej. Wózek jedzie ze stałą prędkością. Gdyby woda wylatywała do tyłu, przyspieszałaby jak rakietą.
7. 1. Leżąca część: $\frac{M}{L}xg$.
2. W czasie dt na szalkę spada $\frac{M}{L}v dt$ masy z prędkością v ; zatrzymanie wymaga siły $\frac{M}{L}v^2 = \frac{M}{L} \cdot 2gx$.
3. Razem: $3 \cdot \frac{M}{L}xg$, trzy razy więcej niż ciężar leżącej części. Tuż przed końcem waga pokazuje $3Mg$, a potem nagle Mg .
8. 1. Prędkość odbicia $\sqrt{2g \cdot 0,5} \approx 3,1$ m/s; Ziemia: $70 \cdot 3,1/5,97 \cdot 10^{24} \approx 3,7 \cdot 10^{-23}$ m/s.
2. Środek masy układu stoi, więc przesunięcie Ziemi to $0,5 \cdot 70/5,97 \cdot 10^{24} \approx 6 \cdot 10^{-24}$ m, kilkaset milionów razy mniej niż średnica protonu. Po lądowaniu Ziemia wraca na miejsce.
3. Znaczenie praktyczne: żadne. Znaczenie zasadnicze: pęd i środek masy obowiązują dokładnie, nawet gdy jednego z ciał „nie widać”.

Fizyka · Dział 3: Pęd, zderzenia i środek masy · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 9, 10, 18, 19. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.