

Energia: to, co się nie zmienia

Zasada zachowania energii opowiedziana tak, jak uczył Richard Feynman: najpierw liczba, która się nie zmienia, potem rozumowanie o maszynach, które nie mogą działać wiecznie, a dopiero na końcu wzory. Przy każdym kroku sprawdzamy, co wiemy na pewno, a czego wciąż nie rozumiemy.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
4 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, rozdz. 4, 13, 14
oraz 15-1, 15-8,
15-9

W TYM DZIALE

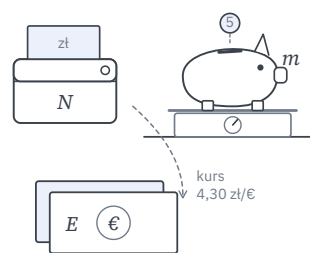
- 0 Prolog: wakacyjny budżet
- 1 Energia położenia: rozumowanie o maszynach
- 2 Energia ruchu i praca
- 3 Siły zachowawcze i energia potencjalna
- 4 Wykresy energii
- 5 Moc
- 6 Inne formy energii i $E = mc^2$
- 7 Metoda i przykłady rozwiązań
- 8 Błędne intuicje
- 9 Zadania feynmanowskie
- 10 Sprawdź się
- 11 Karta wzorów i co dalej

Prolog: wakacyjny budżet

Feynman zaczyna wykład o energii od prawa, które brzmi zaskakująco abstrakcyjnie. Istnieje wielkość, którą nazywamy energią, i nie zmienia się ona przy żadnej ze znanych przemian w przyrodzie. Nie znamy od tego prawa wyjątku. Prawo nie opisuje żadnego mechanizmu ani konkretnego przedmiotu. Mówi tylko, że jeśli obliczymy pewną liczbę przed jakimkolwiek procesem i po nim, dostaniemy ten sam wynik. (FLP I-4-1)

Pamiętasz szachy z prologu działu 1? Tam odgadywaliśmy reguły ruchu. Zasada zachowania energii jest prawem innego rodzaju. Przypomina raczej obserwację, że w każdej partii, bez względu na to, jak jest zawiła, na szachownicy stoi dokładnie jeden biały król. Takie prawo nie mówi, co się dzieje, mówi tylko, co się nie zmienia.

Żeby oswoić tę abstrakcję, weźmy przykład z życia. Ania odłożyła na wakacje 2000 zł i postanowiła niczego z tego nie wydawać przed wyjazdem. Nie wszystko leży jednak w jednym miejscu. Część to banknoty w portfelu. Część to pięciozłotówki wrzucone do skarbonki, której nie da się otworzyć bez rozbicia. Część Ania wymieniła już w kantorze na euro. Jak sprawdzić, że suma się zgadza, skoro skarbonki nie można otworzyć, a euro to inna waluta?



Każdą formę liczy się inaczej. Pieniądze w portfelu po prostu się przelicza. Skarbonkę się waży: pięciozłotówka waży 6,54 g, a pusta skarbonka 380 g, więc od masy skarbonki odejmujemy 380 g, dzielimy przez 6,54 g i mnożymy przez 5 zł. Euro mnożymy przez kurs, po którym Ania je kupiła, powiedzmy 4,30 zł za euro. Wzór Ani ma trzy wyrazy:

$$N_{\text{portfel}} + 5 \text{ zł} \cdot \frac{m_{\text{skarbonki}} - 380 \text{ g}}{6,54 \text{ g}} + 4,30 \frac{\text{zł}}{\text{euro}} \cdot E = 2000 \text{ zł}.$$

Z każdą nową formą przechowywania pieniędzy dochodzi nowy wyraz z własnym przelicznikiem. Każdy wyraz oblicza się inaczej, ale ich suma jest zawsze ta sama.

Gdzie tu jest fizyka? Przykład pokazuje trzy rzeczy. Po pierwsze, suma zgadza się tylko w układzie zamkniętym. Gdy babcia dorzuci Ani 100 zł albo Ania kupi bilet, do bilansu trzeba dopisać to, co weszło lub wyszło. Tak samo energia może wejść do układu albo z niego uciec, więc sprawdzając zasadę zachowania, trzeba pilnować granic układu. Po drugie, energia ma wiele postaci i dla każdej jest osobny wzór z własnym „przelicznikiem”: grawitacyjna, kinetyczna, cieplna, sprężystości, elektryczna, chemiczna, promienista, jądrowa i energia masy. Suma wszystkich wyrazów się nie zmienia. Po trzecie, i to jest najważniejsze: gdyby Ania trzymała wszystko na koncie w banku, nie byłoby już żadnych monet ani banknotów, tylko liczba w systemie. Z energią jest tak samo. Nie ma „kawałków energii”, które można obejrzeć. Są tylko wzory, których suma się nie zmienia.

Trzeba sobie uświadomić, że dzisiejsza fizyka nie wie, czym energia jest.

R. Feynman, FLP I-4-1 (tłum. własne)

Energii nie da się policzyć jak monet w skarbonce, bo nie składa się z żadnych drobinek. Mamy tylko wzory, a suma ich wyników jest stała, tak jak 2000 zł Ani. W tym dziale zrobimy to, co Ania: znajdziemy „przeliczniki” dla kolejnych form. Najpierw energię położenia (część 1), potem energię ruchu (część 2). Następnie sprawdzimy, kiedy w ogóle da się mówić o energii położenia (część 3), nauczymy się czytać ruch z jednego wykresu (część 4), zmierzymy tempo przekazywania energii (część 5) i rozejrzemy się po pozostałych wyrazach wzoru (część 6).

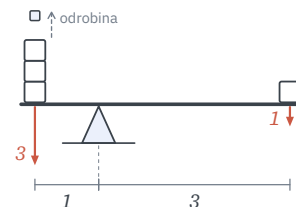
1 Energia położenia: rozumowanie o maszynach

Wzór na energię potencjalną grawitacji przy powierzchni Ziemi Feynman wyprowadza w sposób, który, jak sam mówi, nie ma nic wspólnego z historią. To rozumowanie wymyślone specjalnie na ten wykład, wzorowane na znakomitym argumencie Carnota o sprawności maszyn parowych. Feynman chce pokazać, jak wiele można wydobyć z kilku faktów i starannego myślenia. Sam wynik pewnie już znasz. Ważne jest to, że da się do niego dojść samym rozumowaniem.

FLP I-4-2

1.1 Maszyny, które podnoszą ciężary

Rozważmy maszyny, które podnoszą jeden ciężar, opuszczając inny: dźwignie, bloczki, wagi. Bardzo prosta maszyna tego rodzaju to dźwignia o ramionach w stosunku 1 do 3. Na krótszym ramieniu kładziemy 3 jednostki ciężaru, na dłuższym 1 jednostkę. Dźwignia jest w równowadze. Żeby ruszyła, trzeba zdjąć odrobinę ciężaru z jednej strony. Zdejmując odrobinę z drugiej strony, puścimy ją w przeciwnym kierunku. Każda prawdziwa maszyna potrzebuje takiej „odrobiny”, ale na razie ją pomijamy.



Teraz hipoteza, na której zbudujemy wszystko dalej. Feynman zaznacza, że zakaz perpetuum mobile w ogólnej postaci to po prostu inne sformułowanie zasady zachowania energii.

⚡ ZAŁOŻENIE · NIE MA PERPETUUM MOBILE

Nie istnieje maszyna, która po pełnym cyklu wraca *dokładnie* do stanu początkowego, niczego nie pobiera z zewnątrz (żadnych pieniędzy od babci), a w efekcie zostawia podniesiony ciężar. Taki podniesiony ciężar moglibyśmy przecież wykorzystać do napędzania czegoś innego.

Maszyny dzielimy na dwie klasy. **Nieodwracalne** to wszystkie prawdziwe maszyny. **Odwracalne** to idealizacja, której nie da się osiągnąć mimo najlepszych łożysk i dźwigni, ale można się do niej dowolnie zbliżyć. Maszyna odwracalna działa tak samo w obie strony: jeśli opuszczając 1 jednostkę o 1 m, podnosi 3 jednostki na wysokość X , to opuszczając te 3 jednostki o X , podniesie 1 jednostkę dokładnie o 1 m. (Feynman używa funtów i stóp. Liczby nie mają tu znaczenia, liczy się rozumowanie.)

SKĄD TO WIEMY?

Zakaz perpetuum mobile to uogólnienie wielowiekowej porażki. Wynalazcy budowali koła z przesuwającymi się ciężarkami, pływaki, magnesy i łańcuchy. Żadne urządzenie nie działało bez zasilania. W 1775 r. Paryska Akademia Nauk ogłosiła, że nie będzie już rozpatrywać projektów perpetuum mobile. Ta sama obserwacja kryje się w „złotej regule mechaniki”, znanej od starożytności: co zyskujesz na sile, tracisz na drodze. Feynman ostrzega jednak, że to tylko hipoteza. Trzeba sprawdzić, co z niej wynika, i porównać z doświadczeniem.

1.2 Maszyna odwracalna jest najlepsza z możliwych

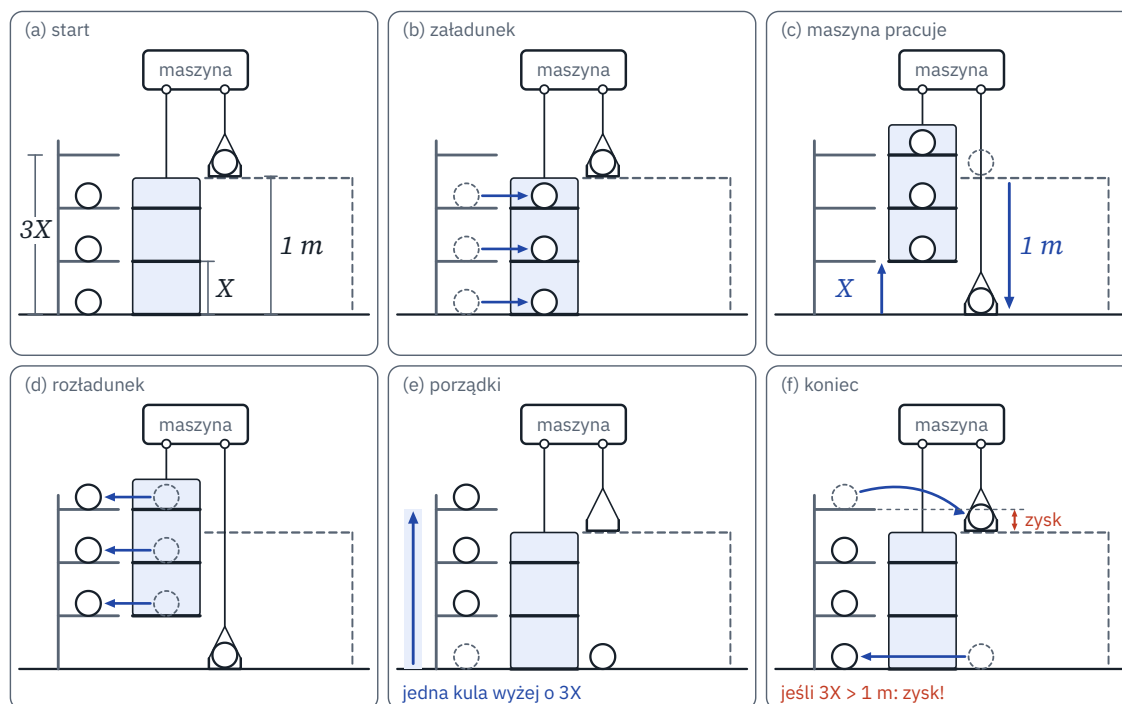
Weźmy maszynę odwracalną A, która opuszcza 1 jednostkę o 1 m i podnosi 3 jednostki na wysokość X . Weźmy też dowolną maszynę B, niekoniecznie odwracalną, która także opuszcza 1 jednostkę o 1 m, ale podnosi 3 jednostki na wysokość Y . Twierdzimy, że Y nie może być większe od X . Dowód nie wymaga zaglądania do środka żadnej z maszyn. Załóżmy, że $Y > X$, i zobaczmy, co się stanie:

1. Maszyna B opuszcza 1 jednostkę o 1 m i podnosi 3 jednostki na wysokość Y .
2. Opuszczamy te 3 jednostki z Y do X . Przy okazji możemy nimi coś podnieść. To jest nasz darmowy zysk.
3. Puszczamy maszynę A wstecz: opuszcza 3 jednostki z X na ziemię i podnosi 1 jednostkę z powrotem o 1 m.
4. Wszystkie ciężary są tam, gdzie były na początku, obie maszyny są gotowe do następnego cyklu, a zysk z kroku 2 został. To perpetuum mobile, którego istnienie wykluczaliśmy.

Zatem $Y \leq X$: żadna maszyna nie podniesie ciężaru wyżej niż maszyna odwracalna. A jeśli B też jest odwracalna? Wtedy to samo rozumowanie z zamienionymi rolami daje $X \leq Y$, więc $X = Y$. **Wszystkie maszyny odwracalne podnoszą na tę samą wysokość**, bez względu na to, jak są zbudowane. Ktoś może skonstruować niezwykle skomplikowany układ dźwigni. My od razu wiemy, że nie podniesie on ciężaru wyżej niż zwykła dźwignia, a jeśli jest odwracalny, to podniesie dokładnie tak samo wysoko. To prawo uniwersalne. Następne pytanie brzmi oczywiście: ile wynosi X ?

1.3 Ile wynosi X ? Trzy kule na półkach

Ten fragment jest sercem działu. Przeczytaj go powoli, z rysunkiem przed oczami. Feynman buduje układ z czterech jednakowych kul i maszyny odwracalnej, która opuszczając jedną kulę o 1 m , podnosi trzy kule o X .



Maszyna odwracalna Feynmana w sześciu krokach (a)–(f)

- Start.** Obok maszyny stoi nieruchomy stojak z półkami rozmieszczonymi co X . Na trzech dolnych półkach (na wysokościach 0 , X , $2X$) leżą trzy kule, półka na wysokości $3X$ jest pusta. Czwarta kula leży na podestacie 1 m nad ziemią. Maszyna ma ruchomą platformę: podłogę i dwie półki, też co X , ustawione równo z dolnymi półkami stojaka.
- Załadunek.** Przetaczamy trzy kule poziomo ze stojaka na platformę. Wysokość się nie zmienia, więc zakładamy, że nie kosztuje to nic.
- Maszyna pracuje.** Opuszcza pojedynczą kulę z podestu na ziemię (o 1 m) i podnosi platformę z trzema kulami o X .
- Rozładunek.** Platforma stoi teraz równo z półkami stojaka na wysokościach X , $2X$ i $3X$. Przetaczamy kule z powrotem na stojak.
- Porządki.** Pusta platforma wraca na dół, a maszyna do stanu początkowego. Porównajmy stojak. Przedtem kule na stojaku leżały na wysokościach 0 , X , $2X$, a teraz leżą na X , $2X$, $3X$. Półki X i $2X$ były zajęte i nadal są zajęte. W gruncie rzeczy *podnieśliśmy jedną kulę o $3X$* , a jedną opuściliśmy o 1 m .
- Koniec.** Jeśli $3X$ jest większe niż 1 m , zsuwamy górną kulę z wysokości $3X$ na podest (1 m) i po drodze odbieramy nadwyżkę. Kulę z ziemi przetaczamy na pustą dolną półkę. Wszystko wygląda jak w punkcie (a), a nadwyżka została. Mamy perpetuum mobile.

Wniosek: $3X$ nie może przekraczać 1 m . Ale maszyna jest odwracalna, więc możemy cały cykl puścić w przeciwną stronę. Wtedy ten sam argument pokazuje, że 1 m nie może przekraczać $3X$.

Zostaje jedna możliwość: $3X = 1$ m, czyli $X = \frac{1}{3}$ m. Doszliśmy do tego samym rozumowaniem, bez żadnego pomiaru.

Uogólnienie jest proste. Jeśli jedna jednostka ciężaru opada o pewną wysokość, maszyna odwracalna podniesie p jednostek na wysokość p razy mniejszą. Inaczej mówiąc: 3 jednostki razy X to tyle samo co 1 jednostka razy 1 m. Pomnóżmy każdy ciężar przez jego wysokość i dodajmy. Puśćmy maszynę, a potem znów pomnóżmy i dodajmy. Suma się nie zmienia.

WYNIK · GRAWITACYJNA ENERGIA POTENCJALNA

$$U = (\text{ciężar}) \times (\text{wysokość}) = mgh, \quad \sum_i m_i gh_i = \text{const} \text{ w każdej maszynie odwracalnej.}$$

Wzór obowiązuje, dopóki wysokości są małe w porównaniu z promieniem Ziemi, bo wyżej siła ciężkości słabnie (część 3.3).

To bardzo piękne rozumowanie. Jedyny kłopot w tym, że może być nieprawdziwe.

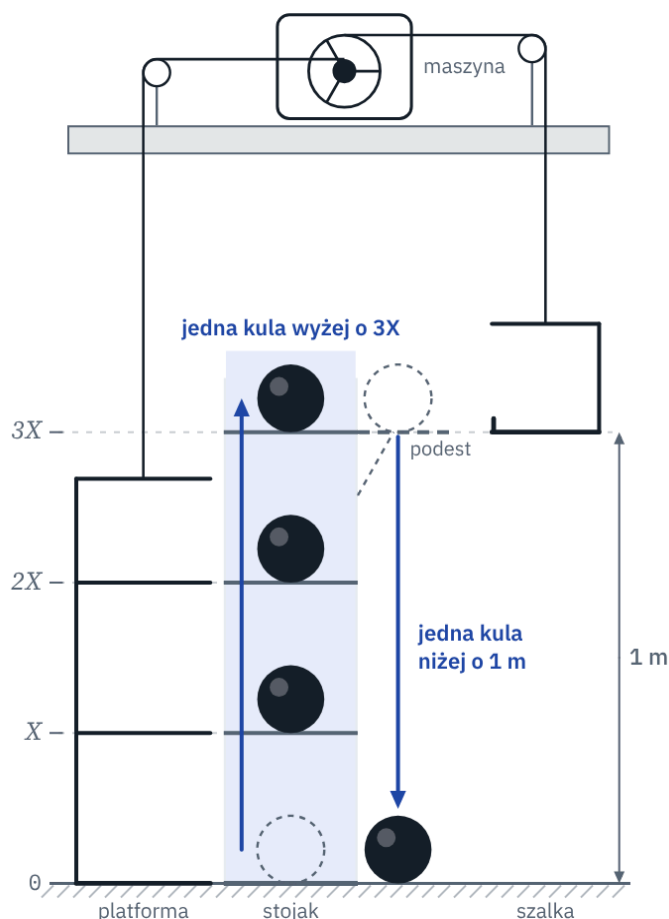
R. Feynman, FLP I-4-2 (tłum. własne)

Przyroda nie musi słuchać naszych rozumowań. Może jakieś założenie jest błędne, może popełniliśmy błąd w rozumowaniu, a może perpetuum mobile jest jednak możliwe. Dlatego zawsze trzeba sprawdzić. Doświadczenie pokazuje, że wynik jest prawdziwy.

Energię, którą ciało ma z powodu swojego położenia względem czegoś innego, nazywamy **energią potencjalną**. Gdy zamiast ciężarów „podnosimy” ładunki elektryczne, oddalając je od innych ładunków, mówimy o elektrycznej energii potencjalnej. Ogólna zasada brzmi tak: zmiana energii to siła razy odległość, na jakiej ta siła działa. W części 2 zobaczymy, że dokładnie oznacza to składową siły wzdłuż przesunięcia, scałkowaną po drodze.

SYMULACJA 1

Maszyna Feynmana w ruchu. Przejdź przez kroki (a)–(f), a potem zmień rozstaw półek X . Gdy $3X$ jest większe niż 1 m, każdy cykl zostawia darmową nadwyżkę. Gdy mniejsze, nadwyżkę daje cykl puszczony wstecz. Tylko $X = \frac{1}{3}$ m nie łamie zakazu perpetuum mobile.



a b c d **e** f cykl naprzód

(e) Porządki

Pusta maszyna wraca do stanu początkowego. Na stojaku kule leżą na X , $2X$, $3X$ zamiast na 0 , X , $2X$: jedna kula jest wyżej o $3X$, a jedna niżej o 1 m.

Σ ciężar $\times$ wysokość [jedn. $\cdot$ m]

przed 2,000

po 2,000

$3X - 1 = 0$ zysk zero w obie strony

● kula = 1 jednostka ciężaru

○ położenie przed krokiem

→ ruch w tym kroku

$X \frac{1}{3}$ m

krok (e) porządki

Σ przed 2,000 jedn. $\cdot$ m

Σ po 2,000 jedn. $\cdot$ m

$3X - 1 = 0$ m

Zysk zero w obie strony. To jedyna wartość zgodna z zakazem perpetuum mobile.

Stan na rysunku: $X = \frac{1}{3}$ m, krok (e). Dla każdego innego X jeden z kierunków cyklu dawałby darmową nadwyżkę.

1.4 Siedemdziesiąt pięć reguł z jednej zasady

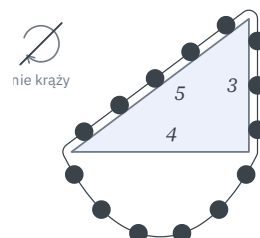
W szkole nauczyliśmy się wielu reguł dla dźwigni, bloczków i równi. Feynman zauważa, że wszystkie są tym samym i nie trzeba pamiętać 75 osobnych przepisów. Weźmy gładką równię w kształcie trójkąta o bokach 3, 4 i 5. Na równi leży ciężarek 1 jednostki, połączony nicią przez bloczek na szczycie z drugim ciężarkiem, który wisi pionowo. Ile jednostek n musi ważyć ten drugi, żeby układ był w równowadze? Skoro jest w równowadze, to jest odwracalny i może się

przesuwać w obie strony. Niech więc wiszący ciężarek opadnie o całą długość równi, czyli o 5. Ciężarek na równi przesunie się wtedy z dołu na szczyt, czyli wzniesie się o 3. Suma ciężarów razy wysokości się nie zmienia:

$$n \cdot 5 = 1 \cdot 3 \implies n = \frac{3}{5}.$$

Wyprowadziliśmy to z zasady zachowania energii, a nie z rozkładu sił na składowe. Porównaj z działem 1: siła zsuwająca na równi to $mg \sin \alpha = mg \cdot \frac{3}{5}$. Wynik jest ten sam.

Jest też dowód jeszcze piękniejszy, pochodzący od Simona Stevina. Rysunek jego łańcucha zdobi stronę tytułową książki Stevina z 1586 r. (tradycja mówi, że także jego nagrobek). Przełożmy przez trójkątny klin zamknięty łańcuch z jednakowych kulek. Łańcuch nie zacznie sam krążyć dookoła, bo byłoby to perpetuum mobile. Dolna, zwisająca część jest symetryczna i równoważy się sama. Zatem pięć kulek leżących na pochyłym boku (długość 5) musi równoważyć trzy kulki wzdłuż pionowego boku (długość 3).



Ta sama metoda rozwiązuje zadania z równowagi konstrukcji. Weźmy nieważki pręt zamocowany przegubowo na lewym końcu. Na środku pręta wisi ciężarek 30 jednostek, a w trzech czwartych długości od mocowania ciężarek 40 jednostek. Jaką siłą F trzeba podtrzymywać wolny koniec? Zawieśmy nad końcem bloczek, a na przełożonej przez niego linie ciężarek F , który ciągnie koniec pręta w górę. Niech ciężarek opadnie o 4 cm. Koniec pręta podniesie się wtedy o 4 cm, punkt w trzech czwartych długości o 3 cm, a środek o 2 cm. Suma ciężarów razy wysokości się nie zmienia:

$$-4F + 3 \cdot 40 + 2 \cdot 30 = 0 \implies F = 45.$$

To zasada prac przygotowanych (ang. *virtual work*). Konstrukcja w rzeczywistości się nie porusza. Wyobrażamy sobie mały ruch tylko po to, żeby zastosować zasadę zachowania energii. Inżynierowie liczą tak równowagę mostów i dźwigów.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Robotnik podnosi skrzynię o masie 200 kg za pomocą wielokrążka. Gdy wyciągnie 4 m liny, skrzynia unosi się o 1 m. Jaką siłą musi ciągnąć linę? Wielokrążek jest idealny, a ruch bardzo powolny.
- 2 Gładka równia ma długość 4 m i wysokość 1,2 m. Jaką siłą równoległą do równi utrzymasz na niej skrzynię o masie 50 kg? Rozwiąż jak Feynman, bez rozkładania sił.

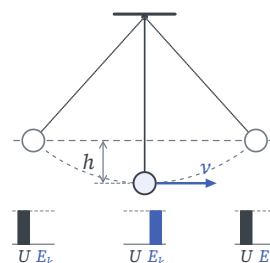
- 3 Poziomy pręt o długości 3 m i ciężarze 30 N jest zamocowany na zawiasie na lewym końcu. W odległości 1 m od zawiasu wisi ciężarek 40 N, a w odległości 2 m ciężarek 90 N. Jaką pionową siłą trzeba podtrzymywać prawy koniec? Użyj zasady prac przygotowanych.
- 4 Podnośnik śrubowy ma korbę o promieniu 30 cm, a jeden obrót śruby podnosi ładunek o 2 mm. Jakiej siły trzeba na korbie, żeby podnieść 1,2 t, gdyby podnośnik był idealny? Feynman liczy podobny przykład w calach i funtach. (FLP I-4-2)
- 5 Wynalazca pokazuje zamkniętą skrzynkę z dźwigniami. Twierdzi, że gdy opuści 10 kg o 1 m, skrzynka podniesie 25 kg o 0,5 m, i proponuje ci udział w zyskach. Nie zaglądając do środka, udowodnij, że to niemożliwe: zbuduj z jego skrzynki i zwykłej dźwigni perpetuum mobile.

▣▣ podstawowe ▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

2 Energia ruchu i praca

2.1 Dokąd znika energia wahadła?

Odchylamy ciężarek wahadła i puszczaemy. Schodząc do najniższego punktu, ciężarek traci wysokość, więc traci energię potencjalną. Na dole tej energii ubyło, a mimo to ciężarek znowu się wznosi. Energia musiała przejść w inną postać. Ponieważ to dzięki ruchowi ciężarek może wjechać z powrotem do góry, nazywamy ją energią ruchu, czyli kinetyczną. (FLP I-4-3)



Ile jej jest? Wróćmy do maszyn. W ruchu na dole musi tkwić porcja energii, która pozwala ciału wzniesić się na pewną wysokość. Ta wysokość nie zależy od tego, jaką maszyną ani jaką drogą ciało będzie się wznosić. Energia kinetyczna to więc ciężar razy wysokość, na którą ciało mogłoby się wzniesić dzięki swojej prędkości. Tę wysokość znamy z działu 1: ciało rzucone pionowo w górę z prędkością v wznosi się, aż $0 = v^2 - 2gh$, czyli na wysokość $h = v^2/(2g)$. Zatem

$$E_k = mg \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Grawitacja posłużyła tu tylko jako miarka. Energia ruchu nie ma nic wspólnego z polem grawitacyjnym i nie zależy od tego, skąd ruch się wziął. Wzór jest ogólny.

DEFINICJA · ENERGIA KINETYCZNA

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad [E_k] = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{J}.$$

Feynman zaznacza, że oba nasze wzory są przybliżone. Wzór mgh zawodzi na dużych wysokościach, gdzie grawitacja słabnie, a wzór $\frac{1}{2}mv^2$ przy prędkościach bliskich prędkości światła. Gdy użyjemy dokładnych wzorów, zasada zachowania energii znowu jest ścisła.

SKĄD TO WIEMY?

Czy energia ruchu rośnie jak v^2 , a nie jak v ? W XVIII w. spierano się o to zażarcie. W 1722 r. Willem 's Gravesande puszczał mosiężne kule na miękką glinę. Kula, która uderzała z dwa razy większą prędkością, robiła dołek czterokrotnie większy. Émilie du Châtelet nagłośniła ten wynik w swoim podręczniku fizyki z 1740 r. Ten sam fakt widać na drodze. Przy stałej sile hamowania praca Ts zabiera energię $\frac{1}{2}mv^2$, więc droga hamowania rośnie jak v^2 . Przy $\mu = 0,8$ samochód jadący 50 km/h hamuje na drodze 12,3 m, a jadący 100 km/h na drodze 49,2 m, czyli czterokrotnie dłuższej. Do tego dochodzi droga przebyta w czasie reakcji kierowcy, ale ona rośnie tylko jak v .

2.2 To samo z praw Newtona

W rozdziale 4 Feynman w ogóle nie używa praw Newtona. Ciekawe jest jednak, jak zasada zachowania energii z nich wynika. Zaczniemy od ciała spadającego pionowo i policzmy, jak szybko zmienia się jego energia kinetyczna: FLP I-13-1

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = mv \frac{dv}{dt} = Fv.$$

Siła jest stała, $F = -mg$ (minus, bo działa w dół), a prędkość to tempo zmiany wysokości, $v = dh/dt$. Zatem

$$\frac{dE_k}{dt} = -mg \frac{dh}{dt} = -\frac{d}{dt} (mgh).$$

Feynman nazywa to „cudem nad cudami”. Tempo zmiany energii kinetycznej okazuje się równe minus tempu zmiany czegoś innego. O ile jedna wielkość rośnie, o tyle druga maleje, więc ich suma stoi w miejscu:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{const.}$$

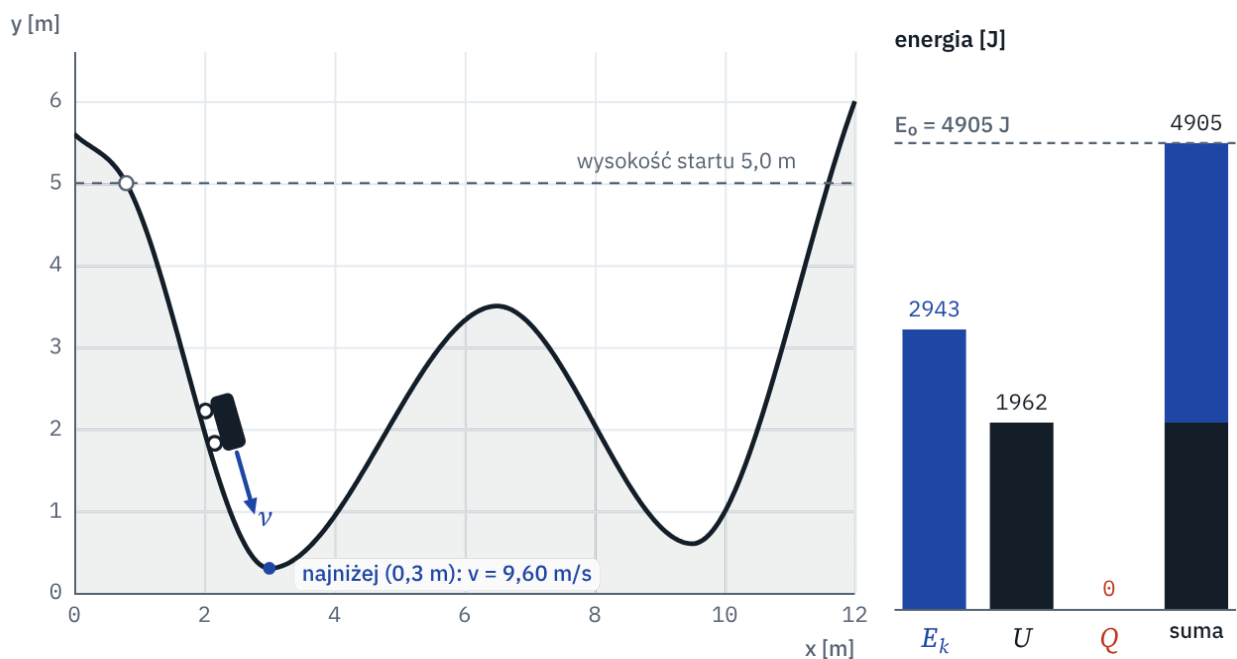
A jeśli ciało zsuwa się po gładkim, zakrzywionym torze? Wtedy $m dv/dt$ to tylko składowa siły styczna do toru, F_t . Jest ona mniejsza od mg w takim stosunku, w jakim przyrost wysokości dh

jest mniejszy od drogi ds wzdłuż toru: $F_t = -mg \, dh/ds$. Prędkość to $v = ds/dt$, więc

$$\frac{dE_k}{dt} = F_t v = -mg \frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = -mg \frac{dh}{dt}.$$

Odcinki ds się skróciły i znowu wyszło $-d(mgh)/dt$. Prędkość na danej wysokości zależy tylko od tego, o ile ciało opadło, a nie od kształtu toru: $v = \sqrt{v_0^2 + 2g(H - h)}$, gdzie H to wysokość startu.

SYMULACJA 2 Wózek na torze. Słupki pokazują energię kinetyczną (niebieski), potencjalną i ciepło wydzielone przez tarcie (czerwony). Bez tarcia suma $E_k + U$ jest stała, a wózek dojeżdża dokładnie do wysokości startu. Włącz tarcie: $E_k + U$ maleje, ale $E_k + U + Q$ nadal się nie zmienia.



v 7,67 m/s

y 2,00 m

E_k 2943 J

U 1962 J

Q 0 J

$E_k + U$ 4905 J

$E_k + U + Q$ 4905 J

dryf 0,000 %

Stan na rysunku: start z wysokości 5,0 m bez prędkości, $\mu = 0$, wózek na wysokości 2,0 m. W najniższym punkcie (0,3 m) $v \approx 9,60 \text{ m/s}$.

2.3 Twierdzenie o pracy i energii

Przejdźmy do trzech wymiarów. Energia kinetyczna to $E_k = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$. Po zróżniczkowaniu dostajemy trzy wyrazy, w których $m \, dv_x/dt = F_x$ i tak dalej:

$$\frac{dE_k}{dt} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Można też szybciej. Pochodna iloczynu skalarnego to $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}$. Dla $\vec{a} = \vec{b} = \vec{v}$ dostajemy $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Wielkość $\vec{F} \cdot \vec{v}$ nazywa się **mocą** (część 5). Feynman nazywa ten wynik wspaniałym twierdzeniem: tempo zmiany energii kinetycznej ciała równa się mocy sił, które na nie działają. Pomnóżmy obie strony przez krótki czas dt . Ponieważ $\vec{v} dt = d\vec{s}$ to małe przesunięcie, dostajemy $dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Całkujemy wzdłuż toru od punktu 1 do punktu 2:

🔧 TWIERDZENIE · PRACA I ENERGIA KINETYCZNA

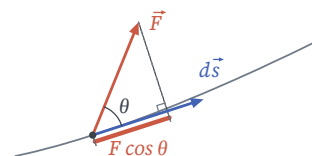
$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_{k2} - E_{k1}$$

Całka po lewej stronie to **praca** siły $\vec{F}$ na drodze od 1 do 2. W twierdzeniu $\vec{F}$ jest wypadkową wszystkich sił. Praca sumy sił to suma ich prac, więc możemy liczyć pracę każdej siły osobno i dodać wyniki. FLP I-14-2

2.4 Praca: co się liczy, a co nie

Iloczyn skalarny (1.1 Wektory) zawiera całą treść tej definicji:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos \theta = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$



Liczy się tylko składowa siły wzdłuż przesunięcia, czyli $F \cos \theta$.

Równoważnie: składowa przesunięcia wzdłuż siły pomnożona przez F . FLP I-14-1 Stąd trzy przypadki:

1. Gdy $\theta < 90^\circ$, siła pomaga w ruchu. Praca jest dodatnia, a energia kinetyczna rośnie.
2. Gdy $\theta > 90^\circ$, siła hamuje. Praca jest ujemna. Tak działa tarcie kinetyczne o nieruchome podłoże, a także ciężar kamienia rzuconego w górę.
3. Gdy $\theta = 90^\circ$, praca jest zerowa, choćby siła była ogromna. Siła dośrodkowa w ruchu po okręgu zmienia kierunek prędkości, ale nie szybkość.

Dla stałej siły i prostoliniowego przesunięcia $\Delta\vec{s}$ całka staje się zwykłym iloczynem: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \Delta s \cos \theta$. W jednym wymiarze ze zmienną siłą praca to pole pod wykresem siły: $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$.

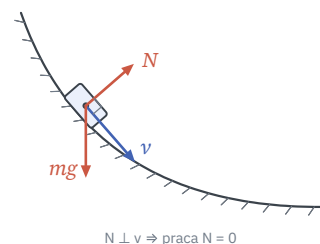
Jednostką pracy jest džul: $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$. Zakład energetyczny sprzedaje nam pracę w kilowatogodzinach: $1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$. FLP I-13-1

⚠️ PUŁAPKA · PRACA W FIZYCE TO NIE WYSIŁEK

Trzymasz nieruchomo 45-kilogramowy ciężar. Pocisz się, drżysz i ciężko oddychasz, a według fizyki nie wykonujesz żadnej pracy, bo ciężar się nie przesuwa. Ten sam ciężar może przecież spokojnie leżeć na stole, który nie pobiera żadnej energii. Feynman wyjaśnia, skąd ta różnica. Mięśnie szkieletowe działają przez krótkie drgnięcia: włókno kurczy się i zaraz rozluźnia. Żeby utrzymać ciężar, do mięśnia muszą bez przerwy docierać salwy impulsów nerwowych, a każde drgnięcie zużywa energię chemiczną. Gdy mięśnie się męczą, impulsy przychodzą nieregularnie i ręka zaczyna drżeć. Mięśnie gładkie, np. mięsień zamykający muszlę małża, potrafią „zablokować się” w jednej pozycji i trzymać obciążenie godzinami bez zmęczenia, jak stół. Wysilek fizjologiczny i praca fizyczna to dwie różne rzeczy. (FLP I-14-1)

2.5 Dlaczego reakcja podłoża nie wykonuje pracy

Ciało zsuwa się po gładkim torze albo kulka wahadła krąży na nici wokół nieruchomego punktu. Tor i nić to **więzy**. Siły, którymi działają, czyli reakcja N i naciąg N_n , są zawsze prostopadłe do prędkości, bo ciało nie może wnikać w tor ani oddalić się od punktu zawieszenia. Dlatego nieruchome i gładkie więzy nie wykonują pracy. (FLP I-14-2)



To wyjaśnia coś, co w części 2.2 mogło wyglądać podejrzanie. Siły działające na ciało na zjeżdżalni są skomplikowane, bo reakcja zmienia się w każdym punkcie toru. A jednak licząc tylko pracę ciężaru, dostajemy poprawny wynik. Praca wypadkowej to suma prac jej składników, a praca reakcji jest zerowa. Dlatego prędkość na dole gładkiej zjeżdżalni zależy tylko od jej wysokości.

Feynman podaje jako przykład więzów wahadło, którego nić w czasie ruchu zaczepia o kołek. Kulka zaczyna wtedy krążyć po mniejszym okręgu, ale naciąg nici nadal jest prostopadły do toru i nie wykonuje pracy. Z tego samego powodu siła magnetyczna, zawsze prostopadła do prędkości ładunku, zmienia kierunek jego ruchu, ale nie zmienia szybkości (dział 15). (FLP I-14-5)

⚠️ PUŁAPKA · TYLKO NIERUCHOME WIĘZY

Reguła „reakcja nie wykonuje pracy” dotyczy więzów nieruchomych. Jeśli podłoże samo się porusza, reakcja może wykonywać pracę. Podłoga windy jadącej w górę pcha cię w kierunku ruchu i wykonuje pracę dodatnią (zadanie 5 poniżej). Klin, który odjeżdża spod zsuwającego się klocka, odbiera klockowi część energii.

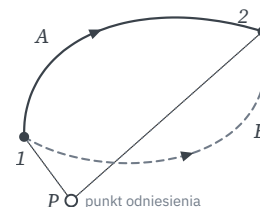
- 1 Zderzenie samochodu ze sztywną ścianą przy 50 km/h jest jak upadek z jakiej wysokości? A przy 100 km/h?
- 2 Dziecko ciągnie sanki po poziomym śniegu siłą 80 N skierowaną pod kątem 30° do poziomu. Jaką pracę wykonuje na drodze 50 m? Jaką pracę wykonują w tym czasie ciężar sanek i siła reakcji śniegu?
- 3 Na ciało działa wzdłuż osi x siła $F(x) = 6x - x^2$ (N, m). Oblicz pracę tej siły przy przesunięciu od $x = 0$ do $x = 3$ m. Jak ten wynik wygląda na wykresie $F(x)$?
- 4 Lina podnosi windę o masie 800 kg z postoju ze stałym przyspieszeniem 1 m/s^2 na wysokość 10 m. Oblicz pracę liny, pracę ciężaru i energię kinetyczną windy na końcu. Sprawdź twierdzenie o pracy i energii.
- 5 Stoisz (70 kg) w windzie, która jedzie w górę ze stałą prędkością i wznosi się o 30 m. Czy podłoga wykonuje nad tobą pracę? Przecież w części 2.5 napisaliśmy, że reakcja podłoża nie wykonuje pracy. Gdzie jest haczyk?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

3 Siły zachowawcze i energia potencjalna

3.1 Czy praca zależy od drogi?

Przesuwasz ciężką skrzynię po podłodze z punktu 1 do punktu 2. Jeśli pojedziesz okrężną drogą, tarcie zabierze więcej energii: praca tarcia zależy od drogi. Z ciężarem jest inaczej. Siła ciężkości ma tylko składową pionową, $F_z = -mg$, więc z iloczynu $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ zostaje tylko $-mg dz$: FLP I-13-1



$$W_g = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = -mg(z_2 - z_1).$$

Wynik zależy tylko od różnicy wysokości. Ciało może lecieć po paraboli, zjeżdżać po krzywej albo iść po schodach.

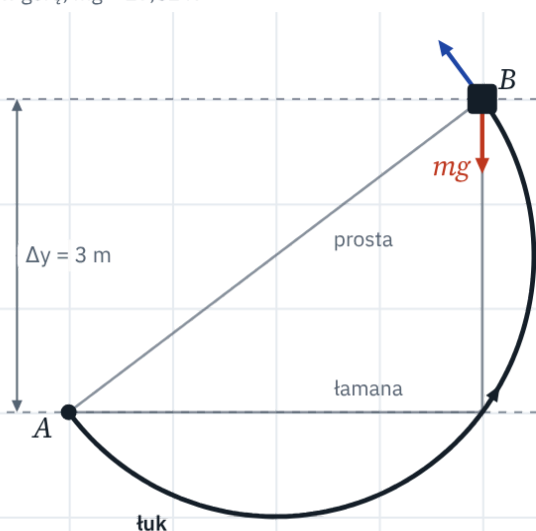
SYMULACJA 3

Ten sam klocek, te same punkty A i B, trzy różne drogi. Po lewej podnosimy klocek w pionie (widok z boku) i liczymy pracę ciężaru. Po prawej przesuwamy go po stole (widok z góry) i liczymy pracę tarcia. Praca ciężaru jest za każdym razem taka sama, a praca tarcia rośnie z długością drogi. Wybierz drogę zamkniętą i porównaj obie prace.

Z boku: ciężar

y w górę, $mg = 19,62 \text{ N}$

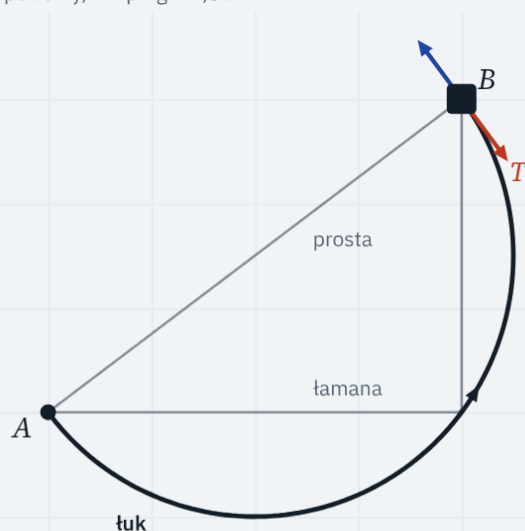
$$W_g = -58,86 \text{ J}$$



Z góry: tarcie

stół poziomy, $T = \mu mg = 9,81 \text{ N}$

$$W_T = -77,05 \text{ J}$$



Praca na całej drodze z A do B

■ ciężar ■ tarcie

prosta	-58,86 J	-49,05 J
łamana	-58,86 J	-68,67 J
łuk	-58,86 J	-77,05 J
zamknięta	0,00 J	-117,72 J

droga łuk

długość 7,85 m

przebyta droga 7,85 m

praca ciężaru -58,86 J

praca tarcia -77,05 J

Stan na rysunku: $m = 2 \text{ kg}$, $\mu = 0,5$. Praca ciężaru z A do B: $-58,86 \text{ J}$ po każdej drodze; praca tarcia: $-49,05 \text{ J}$, $-68,67 \text{ J}$, $-77,05 \text{ J}$; po drodze zamkniętej $-117,72 \text{ J}$, a praca ciężaru 0.

3.2 Siły zachowawcze

Siłę, której praca między dowolnymi dwoma punktami nie zależy od drogi, nazywamy **zachowawczą**. Feynman zaznacza, że to jedno z tych „szalonych słów” i nie ma tu żadnych skojarzeń politycznych. FLP I-14-3 Równoważne sformułowanie: praca siły zachowawczej po każdej drodze zamkniętej wynosi zero. Jeśli z punktu 1 do 2 idziemy drogą A, a wracamy drogą B, to praca wynosi $W_A - W_B$, a to jest zero dokładnie wtedy, gdy $W_A = W_B$:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Dlaczego grawitacja miałaby mieć tę własność? Feynman rozumuje tak samo jak w części 1.

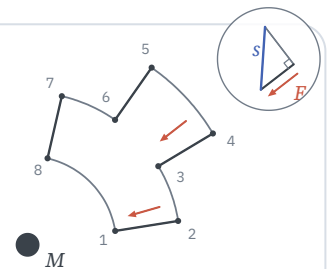
FLP I-13-2 Gdyby praca po jakiejś drodze zamkniętej była dodatnia, położylibyśmy wzdłuż tej drogi gładką rurkę. Kulka w rurce przyspieszałaby przy każdym okrążeniu. Gdyby praca była ujemna, puścilibyśmy kulkę w przeciwną stronę: siła zależy tylko od położenia, więc przy odwrotnym obiegu praca zmienia znak. W obu przypadkach mielibyśmy perpetuum mobile. Zatem siła, która zależy tylko od położenia i nie pozwala zbudować perpetuum mobile, musi być zachowawcza.

Tarcie zachowawcze nie jest. Działa zawsze przeciwnie do prędkości, więc zależy nie tylko od położenia, ale też od kierunku ruchu. Na każdej drodze zamkniętej zabiera energię.

SKĄD TO WIEMY? · GRAWITACJA Z DAŁA OD ZIEMI

Daleko od Ziemi siła ciężkości słabnie jak $1/r^2$ i zmienia kierunek. Feynman sprawdza, że praca po drodze zamkniętej nadal wynosi zero. Bierze drogę złożoną z odcinków radialnych i łuków okręgów o środku w masie M .

Na łukach siła jest prostopadła do drogi, więc praca jest zerowa. Na odcinku radialnym od r_a do r_b praca wynosi $GMm(1/r_b - 1/r_a)$. Odcinki radialne drogi zamkniętej łączą się w pary o tych samych promieniach, przebywane w przeciwnie strony, więc ich prace się znoszą. Każdą gładką krzywą da się przybliżyć takimi schodkami, a dla małego trójkąta praca wzdłuż skosu równa się pracy wzdłuż dwóch boków schodka. Wniosek: praca grawitacji po każdej drodze zamkniętej wynosi zero. Planeta na danej orbicie (czyli przy danej energii całkowitej) ma więc w danej odległości od Słońca zawsze tę samą prędkość, niezależnie od tego, jak tam dotarła. Feynman sprawdza w ten sposób swój ręczny rachunek orbity z rozdziału 9 (por. dział 1, symulacja 6). Energia zmieniła się w nim o ok. 1,5%, co wskazuje na skończony krok rachunku albo drobny błąd w arytmetyce. **FLP I-13-2**



Jest też prosty test. W dwóch wymiarach siła $\vec{F} = [F_x, F_y]$ może być zachowawcza tylko wtedy, gdy $\partial F_x / \partial y = \partial F_y / \partial x$ (to pochodne cząstkowe z lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce: różniczkujemy po jednej zmiennej, drugą traktując jak stałą; więcej w części 3.4). Weźmy przykład. Siła $\vec{F}_1 = [y, x]$ spełnia ten warunek ($1 = 1$) i jej praca nie zależy od drogi. Siła $\vec{F}_2 = [-y, x]$ go nie spełnia ($-1 \neq 1$) i „kręci się” wokół początku układu. Warunek wystarcza, jeśli obszar, w którym działa siła, nie ma dziur. W trzech wymiarach odpowiada mu rotacja pola, którą poznamy przed elektromagnetyzmem.

3.3 Energia potencjalna

Dla siły zachowawczej możemy zrobić to, co Ania ze skarbonką: zastąpić skomplikowaną całkę jedną liczbą przypisaną do każdego punktu. Wybieramy dowolny punkt odniesienia P i definiujemy

$$U(\vec{r}) = - \int_P^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Całka nie zależy od drogi, więc U jest dobrze określoną funkcją położenia. Praca z punktu 1 do 2 to praca z 1 do P plus praca z P do 2, czyli FLP I-14-3

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(1) - U(2) = -\Delta U.$$

Gdybyśmy wybrali inny punkt odniesienia, wszystkie wartości U zmieniłyby się o tę samą stałą. W zasadzie zachowania energii liczą się tylko zmiany, więc stała nie ma znaczenia. Feynman pisze, że równie dobrze moglibyśmy przyjąć $U = mg(z - 6)$, a wszystkie wyniki byłyby takie same.

Teraz łączymy dwa zdania. Praca wypadkowej to zmiana energii kinetycznej (część 2.3), a praca siły zachowawczej to minus zmiana U . Stąd:

PRAWO · ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

$$E_k + U = \text{const} \quad \text{gdy pracę wykonują tylko siły zachowawcze.}$$

Siły, które nie wykonują pracy, mogą działać i niczego nie psują. Należą do nich reakcja nieruchomego gładkiego podłoża i naciąg nici przy nieruchomym punkcie zawieszenia.

Najważniejsze energie potencjalne (FLP I-14-3)

Oddziaływanie	Siła	U	Gdzie $U = 0$
Ciężar przy powierzchni Ziemi	$F_z = -mg$	mgz	na dowolnie wybranym poziomie $z = 0$
Sprężyna	$F = -kx$	$\frac{1}{2}kx^2$	w położeniu równowagi
Grawitacja dwóch mas	$F_r = -\frac{GMm}{r^2}$ (przyciąganie)	$-\frac{GMm}{r}$	w nieskończoności
Dwa ładunki	$F_r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$	w nieskończoności

Gdy działa kilka sił zachowawczych, ich energie potencjalne się dodają. Dla wielu ciał, np. planet albo atomów, energia potencjalna układu to suma energii wszystkich par. (FLP I-13-3) Feynman zaznacza, że dla sił międzycząsteczkowych to tylko przybliżenie, a dla grawitacji Newtona jest to ściśle prawdziwe. (FLP I-14-3)

Skąd się bierze mgh ? Z dokładnego wzoru $U = -GMm/r$. Na wysokości h nad powierzchnią Ziemi o promieniu R :

$$U(R+h) - U(R) = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{GMm}{R^2} \cdot \frac{h}{1+h/R} \approx mgh \left(1 - \frac{h}{R} \right),$$

bo $GM/R^2 = g$. Błąd wzoru mgh wynosi więc ok. h/R : 0,16% na wysokości przelotowej samolotu (10 km) i 1% dopiero na wysokości ok. 64 km.

Feynman od razu używa dokładnego wzoru. Z jaką prędkością trzeba wystrzelić raketę, żeby na zawsze uciekła z Ziemi? Na starcie $E = \frac{1}{2}mv^2 - GMm/R$. Bardzo daleko, gdy raketa ledwie dryfuje, $E = 0 + 0$. Zatem $v^2 = 2GM/R = 2gR$. Do krążenia tuż nad powierzchnią potrzeba $v^2 = gR$ (dział 1, ruch po okręgu). Ucieczka wymaga więc prędkości $\sqrt{2}$ razy większej, czyli dwa razy więcej energii. (FLP I-14-3) Liczbowo $\sqrt{gR} \approx 7,9$ km/s i $\sqrt{2gR} \approx 11,2$ km/s. Feynman podaje w zaokrągleniu 5 i 7 mil na sekundę, czyli ok. 8 i 11,3 km/s. Orbitami zajmie się dział 5.

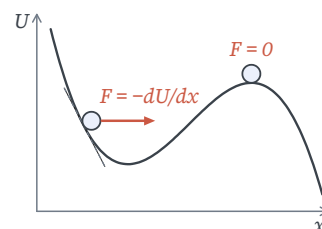
⚠️ PUŁAPKA · ZNAK W W = $-\Delta U$

Praca siły zachowawczej to *minus* zmiana energii potencjalnej. Kamień spada: ciężar wykonuje pracę dodatnią, a U maleje. Podnosisz kamień: ciężar wykonuje pracę ujemną, U rośnie, a twoja ręka wykonuje pracę $+\Delta U$. Najbezpieczniej pisać bilans $E_{k1} + U_1 + W_{\text{inne}} = E_{k2} + U_2$, gdzie W_{inne} to praca sił *bez* energii potencjalnej. Pracy ciężaru nie liczymy wtedy osobno, bo siedzi już w U . Policzenie jej dwa razy to jeden z najczęstszych błędów.

3.4 Siła z energii potencjalnej

Odwróćmy pytanie: znamy U , jak znaleźć siłę? Przesuńmy ciało o mały odcinek Δx . Siła wykonuje pracę $F_x \Delta x$, a ta równa się minus zmianie energii potencjalnej: (FLP I-14-5)

$$F_x \Delta x = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$



Znajomość U w jednym punkcie nie wystarcza. Trzeba wiedzieć, jak U zmienia się w otoczeniu. W trzech wymiarach $U(x, y, z)$ zależy od trzech zmiennych. Przesuwając ciało wzdłuż osi x , zmieniamy tylko x , a y i z zostają stałe. Taką pochodną nazywamy cząstkową i piszemy z zaokrąglonym ∂ (1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce). Feynman żartuje, że ∂ powinno się stosować od początku rachunku różniczkowego: „d” zawsze kusi, żeby je skrócić, a ∂ nikt nie chce skracać.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad \text{w skrócie} \quad \vec{F} = -\nabla U.$$

Symbol ∇ (czytamy „nabla” albo „gradient”) to operator, który z funkcji liczbowej robi wektor o składowych $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$. Obraz jest prosty. Potraktuj U jak wysokość terenu. Gradient wskazuje kierunek najbardziej stromego podejścia, więc siła $-\nabla U$ pcha ciało w dół zbocza, tym mocniej, im zbocze jest bardziej strome.

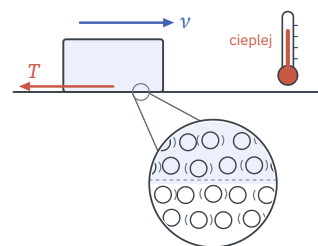
⚡ PRAWO · SIŁA Z ENERGII POTENCJALNEJ

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (1D), \quad \vec{F} = -\nabla U \quad (3D)$$

Sprawdzenie: $U = mgz$ daje $F_z = -mg$. $U = \frac{1}{2}kx^2$ daje $F = -kx$. $U = -GMm/r$ daje $F_r = -GMm/r^2$, czyli przyciąganie. $U = -xy$ daje $\vec{F} = [y, x]$, czyli siłę $\vec{F}_1$ z przykładu wyżej.

3.5 Tarcie: dokąd znika energia?

Klocek pchnięty po stole zwalnia i staje. Siła tarcia kinetycznego jest zawsze skierowana przeciwnie do ruchu, więc wykonuje pracę ujemną i energia kinetyczna maleje do zera. FLP I-13-1 Dla klocka sunącego po nieruchomym podłożu praca tarcia to $-Ts$, gdzie s to przebyta droga, a nie przemieszczenie. Bilans energii trzeba uzupełnić o pracę sił niezachowawczych W_{nz} :



$$E_{k2} + U_2 = E_{k1} + U_1 + W_{nz}, \quad W_{nz} = -Ts \quad \text{dla tarcia o nieruchome podłoże.}$$

W szkolnej notacji to wzór $\Delta(E_k + E_p) = -T \cdot s$ (E_p to inna nazwa U).

Czy energia naprawdę zniknęła? Feynman odpowiada mocniej niż większość podręczników:

Spojrzymy na to głębiej, niż się zwykle patrzy, i powiemy, że sił niezachowawczych w ogóle nie ma!

R. Feynman, FLP I-14-4 (tłum. własne)

Wszystkie siły podstawowe, działające między cząstkami na najgłębszym poziomie, wydają się zachowawcze. Nie wynika to z praw Newtona. Newton tego nie wiedział i dla niego siły mogły być niezachowawcze, tak jak pozornie tarcie. Energia kinetyczna klocka nie ginie. Przechodzi w chaotyczny ruch atomów, którego nie widzimy, ale który mierzymy termometrem. Pamiętajsz zdanie o atomach z działu 1? Atomy są w ciągłym ruchu, a tarcie, jak mówiliśmy w dziale 1, to wiązania, które tworzą się i zrywają między atomami dwóch powierzchni. Ciepło to przede

wszystkim energia kinetyczna atomów. Energia chemiczna to z kolei głównie energia potencjalna ich ułożenia: benzyna spala się z wydzielaniem energii, bo atomy w nowym układzie mają niższą energię potencjalną niż w starym. FLP I-14-4

Zasada zachowania energii wydaje się fałszywa jeszcze w jednej sytuacji: gdy badamy tylko część układu i pomijamy jej oddziaływanie z resztą. Przypomina to Anię, która zapomniała doliczyć euro: suma się nie zgadza, bo pominęliśmy jeden wyraz. Wróć teraz do symulacji 2 i ustaw tarcie. Suma $E_k + U$ maleje, ale suma $E_k + U + Q$, gdzie Q to wydzielone ciepło, pozostaje stała.

SKĄD TO WIEMY? · MIESZADŁO JOULE'A

W latach 40. XIX w. James Joule opuszczał ciężarki, które przez bloczki obracały mieszadło w izolowanym naczyniu z wodą. Woda się ogrzewała, a przyrost temperatury był proporcjonalny do pracy opadających ciężarków. Dziś wiemy, że ogrzanie 1 kg wody o 1 °C wymaga 4186 J. Efekt jest mały. Ciężarek 10 kg opadający o 2 m ogrzewa kilogram wody tylko o 0,047 °C, więc Joule musiał wielokrotnie powtarzać opuszczanie i bardzo dokładnie mierzyć temperaturę. Ta sama liczba mówi, że woda w wodospadzie wysokim na 50 m powinna być na dole cieplejsza o ok. 0,12 °C. Podobno Joule próbował to sprawdzić z termometrem w rękę podczas podróży poślubnej.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

- 1  Kamień o masie 2 kg leży na podłodze. Podnosimy go na stół (0,8 m nad podłogą), a potem na półkę (1,8 m nad podłogą). Oblicz jego energię potencjalną na podłodze, na stole i na półce, przyjmując zero kolejno na podłodze, na stole i na półce. Ile wynosi zmiana U przy przeniesieniu kamienia ze stołu na półkę?
- 2  Energia potencjalna cząstki wynosi $U(x) = 4/x$ (J, m) dla $x > 0$. Wyznacz siłę $F(x)$ i jej wartość w punkcie $x = 2$ m. Czy siła przyciąga cząstkę do początku układu, czy ją odpycha?
- 3  Siła $\vec{F} = [2y, x]$ (w niutonach, x i y w metrach) przesuwa ciało z punktu $(0, 0)$ do $(1, 1)$. Oblicz pracę wzdłuż (a) prostej $y = x$, (b) paraboli $y = x^2$, (c) łamanej: najpierw wzdłuż osi x do $(1, 0)$, potem pionowo do $(1, 1)$. Czy siła jest zachowawcza? Porównaj z siłą $\vec{F}_1$ wyżej.

- 4 ■ Ile energii trzeba, żeby podnieść 1 kg z powierzchni Ziemi na wysokość orbity Międzynarodowej Stacji Kosmicznej (400 km)? Policz ze wzoru mgh i dokładnie z $U = -GMm/r$ (przyjmij $GM = gR^2$, $R = 6371$ km). Porównaj wynik z energią kinetyczną potrzebną do krążenia na tej orbicie.

- 5 ■ Wyobraź sobie siłę $\vec{F} = k[-y, x]$, która kręci się wokół początku układu. Oblicz jej pracę po okręgu o promieniu R obieganym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Co by się stało, gdyby taka siła była stałym polem, w którym ciało może krążyć w gładkiej rurce? Dlaczego prawdziwe pola „wirowe” nie dają perpetuum mobile? (To ostatnie pytanie jest dla ciekawych; wróćmy do niego w dziale 16.)

□ □ podstawowe ■ □ średnie ■ ■ feynmanowskie

4 Wykresy energii: ruch z jednego rysunku

W jednym wymiarze, gdy pracę wykonują tylko siły zachowawcze, zasada zachowania energii mówi o ruchu prawie wszystko. Nie trzeba przy tym rozwiązywać równania ruchu. Z równania $\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E$ od razu mamy prędkość w każdym punkcie:

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}}.$$

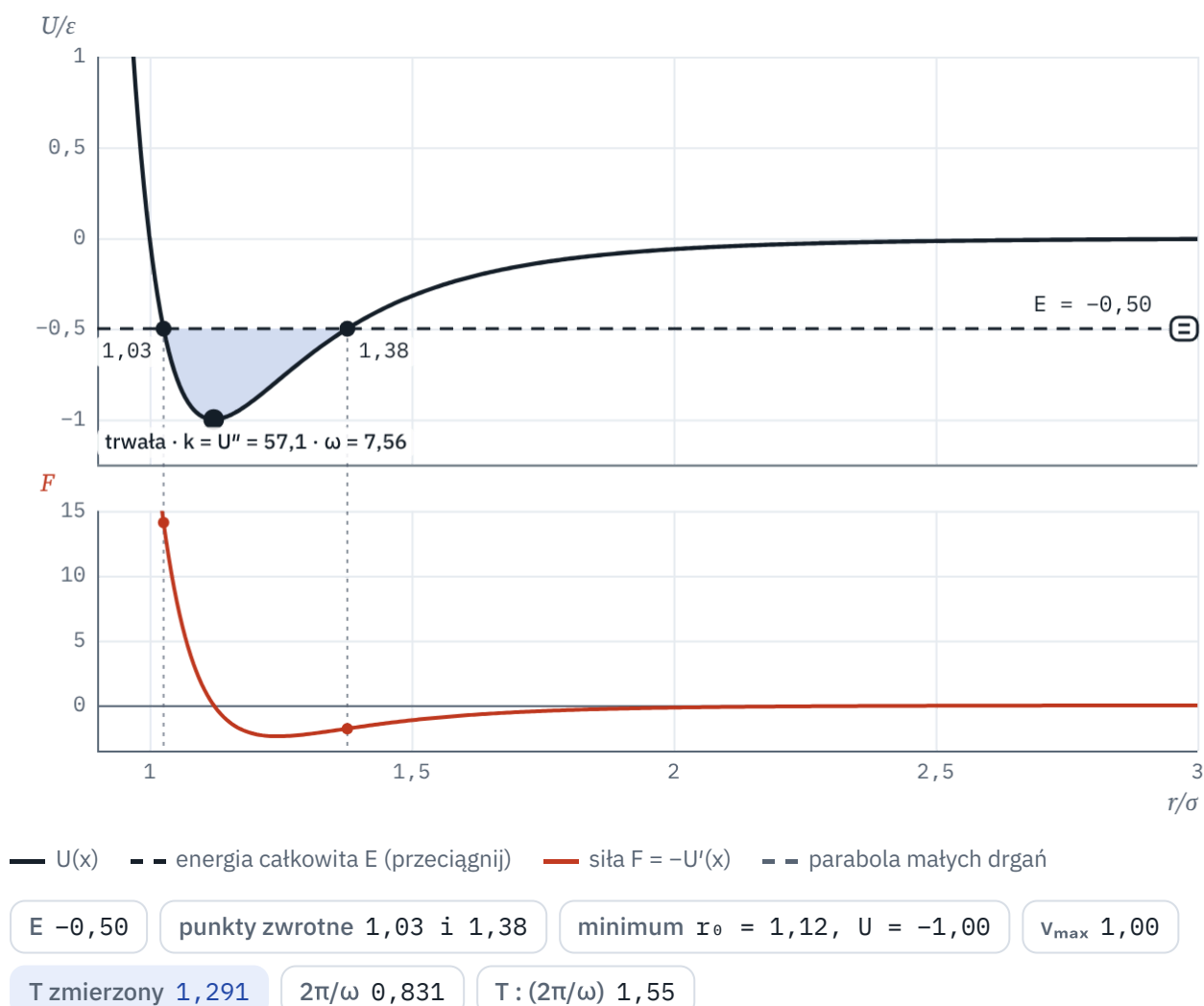
Cały ruch można więc odczytać z jednego wykresu: krzywej $U(x)$ i poziomej linii na wysokości E .

4.1 Jak czytać wykres $U(x)$

1. **Obszary dozwolone.** Energia kinetyczna nie może być ujemna, więc ciało może przebywać tylko tam, gdzie $U(x) \leq E$. Tam, gdzie krzywa wystaje ponad linię E , ciało nie dotrze. (W mechanice kwantowej okaże się, że może tam „przeciekać”, ale to dużo później.)
2. **Punkty zwrotne.** Tam, gdzie $U(x) = E$, prędkość spada do zera i ciało zawraca. Siła $-U'(x)$ jest w tym punkcie zwykle różna od zera i to właśnie ona zawraca ciało.
3. **Prędkość.** Odległość w pionie między linią E a krzywą to energia kinetyczna. Ciało porusza się najszybciej tam, gdzie U jest najmniejsze.
4. **Siła.** Nachylenie krzywej to minus siła: $F = -U'(x)$. Siła pcha zawsze w dół zbocza, jak na kulkę na pagórkowatym terenie.
5. **Ruch związany i swobodny.** Jeśli po obu stronach ciała są punkty zwrotne, porusza się ono tam i z powrotem, czyli drga. Jeśli z jednej strony linia E nigdy nie spotyka krzywej, ciało ucieka do nieskończoności.

SYMULACJA 4

Wykres energii potencjalnej. Przeciągnij poziomą linię energii całkowitej E . Na niebiesko zaznaczone są obszary, w których ruch jest możliwy, a kropki to punkty zwrotne. Dolny wykres pokazuje siłę $F = -U'(x)$. Puść cząstkę i porównaj zmierzony okres z okresem $2\pi/\omega$ małych drgań.

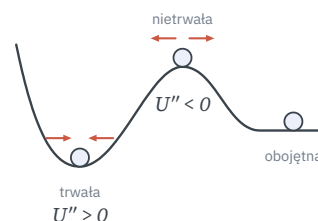


Stan na rysunku: potencjał Lennarda-Jonesa, $E = -\varepsilon/2$, punkty zwrotne $1,03\sigma$ i $1,38\sigma$. Okres drgań przy tej energii jest o ponad połowę dłuższy niż $2\pi/\omega$ dla małych drgań.

4.2 Równowaga trwała i nietrwała

W punkcie, w którym $U'(x_0) = 0$, siła jest zerowa. Ciało położone tam bez prędkości zostaje na miejscu: to **położenie równowagi**. Ale równowaga równowadze nierówna. Wychylmy ciało trochę w prawo. W dołku, czyli w minimum U , zbocze w prawo się wznosi, siła $-U'$ jest ujemna i pcha ciało z powrotem w lewo. To równowaga **trwała**.

Na szczycie, czyli w maksimum U , zbocze w prawo opada, siła pcha ciało dalej w prawo i ciało ucieka. To równowaga **nietrwała**. Na płaskim odcinku siła jest zerowa także po wychyleniu: to równowaga **obojętna**.



Feynman opisuje dno dołka tak. Przesunięcie o bardzo mały odcinek prawie nie zmienia energii potencjalnej, więc praca jest prawie zerowa i siły w tym punkcie nie ma. Za to odejście od dna w którąkolwiek stronę wymaga pracy. FLP I-14-3

PRAWO · WARUNKI RÓWNOWAGI

$$U'(x_0) = 0; \quad U''(x_0) > 0 \text{ trwała (dołek)}, \quad U''(x_0) < 0 \text{ nietrwała (szczyt)}.$$

Gdy $U''(x_0) = 0$, o rodzaju równowagi decydują wyższe pochodne. Dla $U = x^4$ punkt $x = 0$ jest dnem dołka, więc równowaga jest trwała. Dla $U = x^3$ jest tam punkt przegięcia. Z jednej strony zbocze opada, więc równowaga jest nietrwała.

4.3 Małe drgania: każdy dołek to sprężyna

Przyjrzyjmy się dołkowi z bliska. Rozwijamy U w szereg Taylora wokół x_0 (1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce). Wyraz liniowy znika, bo $U'(x_0) = 0$:

$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2} U''(x_0) (x - x_0)^2.$$

To energia sprężyny o sztywności $k = U''(x_0)$. Siła $F = -U'(x) \approx -k(x - x_0)$ to prawo Hooke'a. Z działu 1 (część 6.4) wiemy, jak porusza się ciało na sprężynie: $x - x_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$.

WYNIK · MAŁE DRGANIA WOKÓŁ MINIMUM

$$k = U''(x_0), \quad \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Przybliżenie jest dobre, dopóki amplituda jest na tyle mała, że dołek wygląda jak parabola. Dlatego drgania harmoniczne są wszędzie: każde dno dołka oglądane z bliska jest parabolą. Szczegóły w dziale 6.

PUŁAPKA · GDY $U''(x_0) = 0$

Dla $U = cx^4$ wzór daje $\omega = 0$. Nie znaczy to, że ciało nie drga. Drga, ale nie harmonicznie: dołek jest tak płaski, że okres silnie zależy od amplitudy A i rośnie jak $1/A$, gdy amplituda maleje. Wzór $\omega = \sqrt{U''/m}$ stosuj tylko wtedy, gdy $U''(x_0) > 0$, i tylko dla małych drgań.

4.4 Dwa atomy: potencjał Lennarda-Jonesa

Feynman stosuje wykres energii do dwóch atomów, na przykład dwóch atomów tlenu.

FLP I-14-3 Gdy są daleko od siebie, przyciągają się siłą malejącą jak $1/r^7$, więc energia potencjalna zmienia się jak $1/r^6$. Gdy są bardzo blisko, bardzo silnie się odpychają. Pomiędzy jest minimum energii w odległości d . To położenie równowagi. Zimna cząsteczka tlenu wygląda właśnie tak: atomy siedzą na dnie dołka w odległości d . Gdy ją ogrzejemy, atomy zaczynają drgać i oddalać się od siebie. Można je nawet rozerwać, ale wymaga to pracy równej różnicy energii potencjalnej $U(\infty) - U(d)$.

Feynman dodaje uwagę, która wybiega daleko w przyszłość tego kursu. W mechanice kwantowej pojęcie siły przestaje być wygodne, a pojęcie energii zostaje. Dlatego w podręcznikach mechaniki kwantowej znajdziesz mnóstwo wykresów energii potencjalnej, a prawie żadnych wykresów sił.

Wygodnym modelem takiego dołka jest potencjał Lennarda-Jonesa. Ściśle biorąc, dobrze opisuje on atomy, które nie tworzą wiązania chemicznego (gazy szlachetne, kryształy cząsteczkowe). Wiazania takie jak w O_2 czy HCl mają głębsze i węższe dołki, opisywane np. potencjałem Morse'a. Kształt jest jednak podobny i do zrozumienia ruchu to wystarczy:

$$U(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right].$$

Wykładnik 6 odpowiada przyciąganiu, o którym mówi Feynman. Wykładnik 12 wybrano dla wygody rachunków. Opisuje on „twardą ścianę”, ale nie wynika z żadnego prawa. Model najlepiej pasuje do atomów gazów szlachetnych, np. argonu. Rachunek daje: minimum w $r_0 = 2^{1/6}\sigma \approx 1,12\sigma$, głębokość dołka $U(r_0) = -\varepsilon$ i sztywność wiązania $k = U''(r_0) = 72\varepsilon/(2^{1/3}\sigma^2) \approx 57,1 \varepsilon/\sigma^2$. Przy $E < 0$ atomy są związane i drgają w dołku. Przy $E > 0$ zbliżają się, odbijają od ściany i rozbiegają na zawsze. Tak wygląda zderzenie.

Spójrz jeszcze raz na kształt dołka. Z lewej strony ściana jest stroma, z prawej zbocze jest łagodne. Przy $E = -\frac{1}{2}\varepsilon$ punkty zwrotne leżą w $1,03\sigma$ i $1,38\sigma$. Środek tego przedziału, $1,20\sigma$, leży wyraźnie na prawo od dna. Im większa energia drgań, tym dalej od siebie są średnio atomy. To jest mechanizm rozszerzalności cieplnej (zadanie 5 poniżej).

SKĄD TO WIEMY?

Kształt dołka mierzy się światłem. Cząsteczka drga w swoim dołku z częstością wyznaczoną przez $U''(r_0)$ i masę zredukowaną $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, czyli $\omega = \sqrt{U''(r_0)/\mu}$. Pochłanianie promieniowanie podczerwone właśnie o tej częstości. Z położenia linii w widmie wyznacza się sztywność wiązania. Dla cząsteczki HCl wychodzi ok. 500 N/m. Taką sztywność ma sprężyna, którą kilogramowy ciężarek wydłuży o 2 cm.

- 1 Energia potencjalna cząstki to $U(x) = 2x^3 - 6x$ (J, m). Wyznacz siłę $F(x)$, położenia równowagi i ich rodzaj.
- 2 Ciało o masie 2 kg ma energię potencjalną $U(x) = 50x^2$ (J, m). Oblicz sztywność k , częstość kołową i okres małych drgań.
- 3 Mały krążek ślizga się bez tarcia wewnątrz kulistej misy o promieniu $R = 0,5$ m. Zapisz jego energię potencjalną jako funkcję drogi s mierzonej wzdłuż misy od dna i wyznacz okres małych drgań.
- 4 Cząstka o masie 1 kg porusza się w potencjale z zadania 1, $U(x) = 2x^3 - 6x$, i ma energię całkowitą $E = 0$. Znajdź obszar ruchu wokół dołka, największą prędkość i częstość małych drgań przy dnie. Jaka energia wystarczy, żeby cząstka uciekła z dołka, i w którą stronę ucieknie?
- 5 Dlaczego ciała rozszerzają się po ogrzaniu? W potencjale Lennarda-Jonesa wyznacz punkty zwrotne dla energii $E = -0,9\epsilon$ i $E = -0,5\epsilon$ oraz środek przedziału między nimi, który przybliży średnią odległość atomów. Porównaj z położeniem dna $r_0 = 1,12\sigma$.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

5 Moc: jak szybko płynie energia

5.1 Definicja

Tę samą pracę można wykonać szybko albo powoli. Tempo wykonywania pracy nazywamy **mocą**. W części 2.3 pojawiła się sama: tempo zmiany energii kinetycznej to $\vec{F} \cdot \vec{v}$. Feynman mówi krótko, że moc to praca wykonana w ciągu sekundy. FLP I-13-1

🔧 DEFINICJA · MOC

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s.}$$

Odwrotnie: praca to moc razy czas. Dlatego kilowatogodzina, $1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = 3,6 \text{ MJ}$, jest jednostką energii, a nie mocy. Dawna jednostka mocy, koń mechaniczny, to ok. 735,5 W.

5.2 Stała moc, zmienna siła

Wzór $P = Fv$ wyjaśnia, po co samochodowi skrzynia biegów. Silnik o danej mocy może pchać samochód siłą najwyżej $F = P/v$. Przy mocy 100 kW i prędkości 30 m/s to tylko ok. 3,3 kN. Przy małej prędkości ten sam wzór dawałby siłę ogromną, ale wtedy ograniczeniem jest przyczepność kół i to, co silnik potrafi przy niskich obrotach. Skrzynia biegów pozwala wykorzystywać pełną moc w szerokim zakresie prędkości. Przy dużych prędkościach dominuje opór powietrza $F = \frac{1}{2}\rho C_x S v^2$ (ρ to gęstość powietrza, S pole przekroju, a C_x współczynnik oporu zależny od kształtu, dla auta ok. 0,3), więc moc potrzebna do jazdy ze stałą prędkością rośnie jak v^3 . Jazda dwa razy szybsza wymaga ośmiokrotnie większej mocy.

5.3 Rzędy wielkości

Moc w przyrodzie i technice: oszacowania		
Co	Moc	Skąd ta liczba
Człowiek, średnio w ciągu doby	ok. 100 W	2000 kcal na dobę: $2000 \cdot 4184 \text{ J} / 86\,400 \text{ s} \approx 97 \text{ W}$
Człowiek wbiegający po schodach	ok. 460 W	70 kg na wysokość 10 m w 15 s: mgh/t
Samochód jadący 130 km/h	ok. 24 kW	opór powietrza ok. 516 N ($\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $C_x S = 0,66 \text{ m}^2$) i opór toczenia ok. 150 N, razy $v = 36,1 \text{ m/s}$
Silnik samochodu osobowego	ok. 100 kW	dane katalogowe; nadwyżka służy do przyspieszania i jazdy pod górę
Blok elektrowni jądrowej	ok. 1 GW	dane katalogowe
Elektrownia Bełchatów	ok. 5 GW	największa elektrownia w Polsce
Średni pobór mocy elektrycznej w Polsce	ok. 19 GW	ok. 170 TWh rocznie, podzielone przez 8766 h
Światło Słońca padające na Ziemię	ok. $1,7 \cdot 10^{17} \text{ W}$	1361 W/m^2 razy przekrój Ziemi πR^2

Feynman zauważa, że przyroda wcale nie oszczędza energii. Słońce wysyła jej mnóstwo we wszystkich kierunkach, ale na Ziemię trafia tylko jedna dwumiliardowa część. FLP I-4-4
Sprawdźmy. Ziemia o promieniu R w odległości d od Słońca przechwytuje ułamek $\pi R^2 / (4\pi d^2) = R^2 / (4d^2) \approx 4,5 \cdot 10^{-10}$, czyli jedną część na 2,2 miliarda. Zgadza się.

Szacowanie po feynmanowsku: ile razy trzeba wejść na szczyt Pałacu Kultury (237 m), żeby wykonać pracę 1 kWh? Przy masie 70 kg jedno wejście to $mgh \approx 163$ kJ, więc potrzeba ok. 22 wejść. Za tę samą kilowatogodzinę z gniazdka płacimy rzędu złotych. Mięśnie są drogim źródłem energii, a prąd jest bardzo tani.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Dźwig podnosi ze stałą prędkością ładunek 500 kg na wysokość 20 m w ciągu 25 s. Jaka jest moc użyteczna dźwigu?

- 2 Samochód o masie 1500 kg jedzie pod górę o nachyleniu 4% ($\sin \alpha \approx 0,04$) ze stałą prędkością 25 m/s. Opory ruchu wynoszą 600 N. Jaka moc jest potrzebna?

- 3 Pompa ma napełniać zbiornik wieżowy położony 25 m wyżej, tłocząc 30 m³ wody na godzinę. Sprawność zestawu silnik-pompa wynosi 70%. Jaką moc elektryczną pobiera?

- 4 Silnik dostarcza do kół samochodu 60 kW. Opór powietrza wynosi $F = \frac{1}{2}\rho C_x S v^2$, gdzie $\rho = 1,2$ kg/m³ i $C_x S = 0,7$ m². Jaką prędkość maksymalną osiągnie samochód na płaskiej drodze, jeśli pominiemy opór toczenia? O ile wzrośnie, gdy podwoimy moc?

- 5 Turysta z plecakiem (razem 80 kg) wchodzi znad Morskiego Oka na Rysy, pokonując ok. 1100 m w pionie w 4 godziny. Oszacuj pracę przeciw grawitacji, średnią moc i to, ile energii z jedzenia zużyje na samo wznoszenie, jeśli mięśnie mają sprawność ok. 25%. Ile to tabliczek czekolady (100 g to ok. 530 kcal)?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

6 Inne formy energii i $E = mc^2$

6.1 Sprężyna, ciepło i małe oszustwo

Feynman wylicza kolejne wyrazy wzoru mamy. FLP I-4-4 Rozciągnięta sprężyna może podnosić ciężary, więc ma energię: **energię sprężystości** $\frac{1}{2}kx^2$ (część 3.3). Puszczona sprężyna z ciężarkiem drga. Energia sprężystości zamienia się w kinetyczną i z powrotem, i tak by trwało bez końca, gdyby nie straty. W tym miejscu Feynman przyznaje się do oszustwa. Przez cały wykład dokładał „odrobinę” ciężaru, żeby maszyny ruszyły, i udawał, że są odwracalne i działają wiecznie. A przecież wszystko w końcu staje. Gdzie jest energia, gdy sprężyna przestanie drgać?

Odpowiedź to **ciepło**. Sprężyna i dźwignia składają się z kryształów zbudowanych z ogromnej liczby atomów. Przy każdym toczeniu i ocieraniu nierówności materiału potrącają atomy, a te zaczynają drgać w środku, chaotycznie i bezładnie. Energia kinetyczna wciąż istnieje, tylko nie jest związana z widocznym ruchem. Termometr pokazuje, że sprężyna jest cieplejsza. Feynman podkreśla, że ciepło to właściwie nie nowa postać energii, tylko energia kinetyczna ruchu wewnętrznego. Dlatego w doświadczeniach z dużymi ciałami nie da się naprawdę zbudować maszyny odwracalnej: przy każdym ruchu część energii przechodzi w ruch atomów.

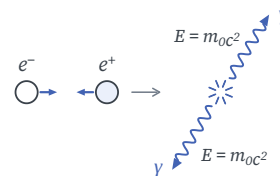
6.2 Katalog postaci energii

Postaci energii wymienione w FLP I-4-4 i miejsca, w których do nich wrócimy		
Postać	Wzór lub opis	Dalej w kursie
Grawitacyjna	mgh , dokładnie $-GMm/r$	ten dział, dział 5
Kinetyczna	$\frac{1}{2}mv^2$ dla $v \ll c$	działy 3 i 7
Sprężystości	$\frac{1}{2}kx^2$; podobnie jak chemiczna bierze się z przyciągania atomów	dział 6
Ciepła	chaotyczny ruch atomów	działy 8 i 9
Chemiczna	energia kinetyczna elektronów w atomach plus elektryczna energia oddziaływania elektronów z protonami	poza kursem
Elektryczna	energia oddziaływania ładunków (przyciąganie i odpychanie); wzór w dziale 14	dział 14
Promienista	energia światła, czyli drgań pola elektromagnetycznego	dział 16
Jądrowa	ułożenie cząstek w jądrze atomowym	poza kursem
Energia masy	mc^2	dział 7

O energii jądrowej Feynman pisał na początku lat 60. uczciwie: mamy na nią wzory, ale nie znamy praw podstawowych. Wiemy, że nie jest elektryczna, grawitacyjna ani czysto chemiczna, ale nie wiemy, czym jest. Dziś wiemy więcej. To głównie reszkowe oddziaływanie silne między nukleonami (pozostałość oddziaływania między kwarkami, które opisuje chromodynamika kwantowa), a do tego elektryczne odpychanie protonów. Wyliczenie energii wiązania jądra prosto z tej teorii jest jednak wciąż bardzo trudne.

6.3 $E = mc^2$: energia samego istnienia

Ostatni wyraz na liście jest najdziwniejszy. Ciało ma energię z samego faktu, że istnieje. Feynman pokazuje to tak. Elektron i pozyton spoczywają obok siebie. Nie interesuje nas grawitacja ani nic innego. Gdy się zetkną, znikają, a w ich miejsce pojawia się promieniowanie o ściśle określonej energii. Do jej obliczenia wystarczy znać masę i nie ma znaczenia, z czego zbudowane były znikające ciała. Wzór jako pierwszy znalazł Einstein:



$$E = mc^2.$$

W teorii względności, w języku Feynmana, masa ciała rośnie z prędkością: $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, gdzie m_0 to masa spoczynkowa. (Dziś częściej mówi się, że z prędkością rosną energia i pęd, a masa jest stała. To ten sam fakt.) Gdy rozwinieśmy mc^2 dla małych prędkości (1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce), dostaniemy

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \dots$$

Pierwszy wyraz to **energia spoczynkowa**, ogromna i stała. Drugi to nasza stara energia kinetyczna Newtona. Wzór $\frac{1}{2}mv^2$ okazuje się pierwszą poprawką do czegoś większego. Feynman liczy, że dla satelity masa rośnie zaledwie o jedną część na dwa do trzech miliardów. Nic dziwnego, że Newton tego nie zauważył.

Zmiany masy w zwykłych procesach są maleńkie, bo z danej ilości materii zwykle nie da się wydobyć dużo energii. Spalenie kilograma węgla daje ok. 30 MJ, co odpowiada ubytkowi masy $30 \cdot 10^6 \text{ J}/c^2 \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$, czyli jednej trzeciej mikrograma. Dlatego chemicy przez stulecia obserwowali, że masa jest zachowana. Feynman podaje przykład skrajny: po wybuchu bomby atomowej o sile 20 kiloton trotylu produkty są lżejsze o mniej więcej 1 gram. Sprawdźmy: $2 \cdot 10^7 \text{ kg}$ trotylu po 4,18 MJ/kg to $8,4 \cdot 10^{13} \text{ J}$, a $\Delta m = E/c^2 \approx 0,93 \text{ g}$. Wyprowadzenie wzoru $E = mc^2$ i powód, dla którego masa rośnie z prędkością, zostawiamy na dział 7.

SKĄD TO WIEMY?

Najbardziej bezpośrednim sprawdzianem jest anihilacja. Elektron i pozyton zetknięte w spoczynku znikają, a powstają dwa kwanty promieniowania gamma. Każdy z nich ma zmierzoną energię m_0c^2 . Dla elektronu to 0,511 MeV. Tę samą zgodność widać w reakcjach jądrowych: energia wydzielona w reakcji odpowiada ubytkowi masy jąder.

6.4 Energia zachowana, ale nie zawsze dostępna

Feynman kończy rozdział 4 ważnym rozróżnieniem. Atomy wody w morzu bez przerwy się poruszają, bo morze ma pewną temperaturę. To ogromna energia. Nie da się jednak

zagonić tych atomów do uporządkowanego ruchu bez pobrania energii skądinąd. Energia jest zachowana, ale energia dostępna do wykorzystania już nie. O tym, ile energii da się wykorzystać, mówią prawa termodynamiki i pojęcie entropii (dział 9). Gdy czytasz o „zużyciu energii”, chodzi właśnie o to: energia nie znika, tylko przechodzi w postać, z której nie umiemy już skorzystać.

Skąd bierzemy energię? Feynman wymienia Słońce, deszcz, węgiel, uran i wodór. Deszcz i węgiel to energia Słońca: Słońce odparowuje wodę, a rośliny, z których powstał węgiel, rosły w jego świetle. Energię z uranu już umiemy uwalniać. Wodór daje energię w syntezie termojądrowej, ale gdy Feynman wygłaszał wykłady, umiano to robić tylko w postaci wybuchowej i niebezpiecznej. Jego szacunek, ile wody trzeba by na sekundę „spalać” w kontrolowanej syntezie, sprawdzisz w zadaniu feynmanowskim 3.

6.5 Czego wciąż nie wiemy

Na koniec uczciwy bilans tego, czego ten dział nie wyjaśnił.

1. **Czym jest energia.** Mamy wzory i liczbę, która się nie zmienia, ale nie mamy obrazu. Energii nie da się nawet „policzyć” jak klocków. Energia fotonu to stała Plancka razy częstotliwość, ale częstotliwość może być dowolna, więc energia nie występuje w porcjach o z góry ustalonej wielkości. (FLP I-4-4)
2. **Skąd bierze się zasada zachowania.** Feynman pisze, że w mechanice kwantowej zasada zachowania energii wiąże się ściśle z tym, że prawa fizyki nie zależą od bezwzględnego czasu: to samo doświadczenie powtórzone później przebiega tak samo. Czy jest to ściśle prawdziwe, nie wiemy. Ten związek działa też w mechanice klasycznej (twierdzenie Emmy Noether z 1918 r.). Podobnie zachowanie pędu wiąże się z tym, że nie ma znaczenia, *gdzie* robimy doświadczenie, a zachowanie momentu pędu z tym, że nie ma znaczenia, jak obrócimy aparaturę.
3. **Inne zasady zachowania.** Feynman wymienia sześć zasad zachowania. Trzy są subtelne i wiążą się z czasem i przestrzenią: zasady zachowania energii, pędu i momentu pędu. Trzy są proste, bo polegają na liczeniu jak klocków: zachowanie ładunku, liczby barionów i liczby leptonów.
4. **Czego użyliśmy bez dowodu.** Wzoru $E = mc^2$ i poprawek relatywistycznych (dział 7), praw rządzących energią jądrową oraz tego, dlaczego ciepło nie zamienia się samo z powrotem w uporządkowany ruch (dział 9).

W ostatecznym rozrachunku nie rozumiemy zasad zachowania głęboko.

R. Feynman, FLP I-4-4 (tłum. własne)

☰ METODA ENERGETYCZNA

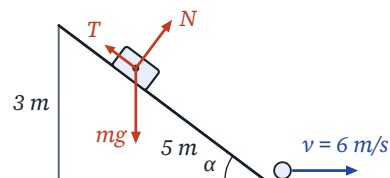
1. **Oszacuj.** Zanim zaczniesz liczyć, zgadnij rząd wielkości wyniku. Na koniec to oszacowanie będzie twoim sprawdzianem.
2. **Dwa stany.** Wybierz układ, stan początkowy i końcowy. Narysuj wysokości i zaznacz, gdzie przyjmujesz $U = 0$.
3. **Przejrzyj siły.** Siły zachowawcze (ciężar, sprężyna, grawitacja) wchodzi do rachunku przez U . Siły, które nie wykonują pracy (reakcja nieruchomego gładkiego podłoża, naciąg nici przy nieruchomym zawieszeniu), pomijasz. Pozostałe (tarcie, silnik, ręka) liczysz jako pracę W_{inne} .
4. **Bilans:** $E_{k1} + U_1 + W_{\text{inne}} = E_{k2} + U_2$. Dla tarcia o nieruchome podłoże $W = -Ts$, a wydzielone ciepło $Q = Ts$.
5. **Siły więzów.** Gdy pytają o reakcję, naciąg albo oderwanie od toru, dopisz II zasadę dla interesującego punktu. Sama energia nic nie mówi o siłach więzów.
6. **Wykres $U(x)$.** W ruchu jednowymiarowym narysuj krzywą i linię E : punkty zwrotne, równowaga, prędkość w każdym punkcie.
7. **Rozwiązanie na symbolach,** liczby dopiero na końcu.
8. **Sprawdzenie:** jednostki, przypadki graniczne, porównanie z oszacowaniem.

Przykład 2.1

Zjeżdżalnia: ile energii zabrało tarcie?

Dziecko o masie 25 kg zjeżdża z prostej zjeżdżalni o wysokości 3 m i długości 5 m. Na dole ma prędkość 6 m/s. Ile energii zamieniło się w ciepło? Jaka była średnia siła tarcia i jaki współczynnik tarcia jej odpowiada?

- 1 Oszacowanie: bez tarcia prędkość na dole wynosiłaby $\sqrt{2gh} \approx 7,7$ m/s. Dziecko ma 6 m/s, więc część energii poszła w ciepło.
- 2 Bilans z zerem U na dole zjeżdżalni: $mgh - TL = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie TL to praca przeciw tarcia na drodze L .
- 3 Na starcie $mgh = 25 \cdot 9,81 \cdot 3 = 735,75$ J, na dole $\frac{1}{2}mv^2 = 450$ J. Ciepło: $Q = TL = 735,75 - 450 \approx 286$ J, czyli 39% energii początkowej.
- 4 Średnia siła tarcia: $T = Q/L \approx 57,2$ N. Dla tej równi $\sin \alpha = 3/5$ i $\cos \alpha = 4/5$, więc $N = mg \cos \alpha$ i $\mu = T/(mg \cos \alpha) \approx 0,29$.



Zjeżdżalnia: wysokość 3 m, długość 5 m

Wynik: ciepło ok. 286 J, średnia siła tarcia ok. 57 N, współczynnik tarcia ok. 0,29.

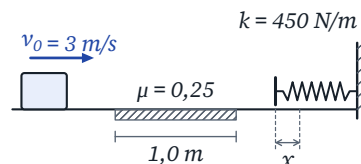
Sprawdzenie: dla $\mu = 0$ wyszłoby $Q = 0$ i $v \approx 7,7$ m/s ✓. Energia potencjalna zależy tylko od wysokości, a ciepło od drogi. Praca tarcia to $\mu mg \cos \alpha \cdot L = \mu mg$ razy poziomy rzut zjeżdżalni, więc łagodniejsza zjeżdżalnia o tej samej wysokości zabrałaby więcej energii ✓

Szorstki odcinek i sprężyna

Klocek o masie 2 kg sunie z prędkością 3 m/s po gładkim stole. Po drodze przejeżdża przez szorstki odcinek o długości 1,0 m ($\mu = 0,25$), a za nim, znowu na gładkim stole, uderza w sprężynę o sztywności 450 N/m. O ile najbardziej ściśnie sprężynę? Gdzie klocek w końcu się zatrzyma?

- 1 Energia początkowa: $E_k = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9$ J. Wysokość się nie zmienia, więc grawitacyjną energię potencjalną pomijamy.

- 2 Szorstki odcinek: tarcie $T = \mu mg = 4,905$ N wykonuje pracę $-T \cdot 1,0 \text{ m} = -4,905$ J. Zostaje 4,095 J.



Szorstki odcinek, potem sprężyna

- 3 Sprężyna: w chwili największego ściśnięcia $v = 0$, więc $\frac{1}{2}kx^2 = 4,095$ J i $x = \sqrt{2 \cdot 4,095 / 450} \approx 0,135$ m.
- 4 Idealna sprężyna oddaje całą energię i klocek wraca z energią 4,095 J. Żeby znowu przejechać szorstki odcinek, potrzebowałby 4,905 J. Nie wystarczy, więc stanie na szorstkim odcinku po przejechaniu $s = 4,095 / 4,905 \approx 0,835$ m.

Wynik: sprężyna ściśnie się o ok. 13,5 cm. Klocek zatrzyma się na szorstkim odcinku 0,835 m od jego brzegu po stronie sprężyny, czyli ok. 16,5 cm przed drugim brzegiem.

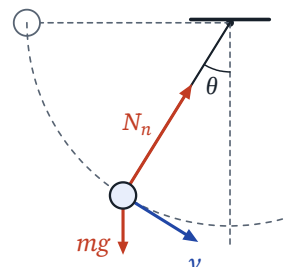
Sprawdzenie: całe 9 J zamieniło się w ciepło: $T \cdot (1,0 + 0,835) \text{ m} = 4,905 \cdot 1,835 \approx 9,0$ J ✓. Tarcie liczymy po drodze (1,835 m), a nie po przemieszczeniu. Czy klocek na pewno odjedzie od sprężyny? Przy ściśnięciu 13,5 cm sprężyna pcha go siłą $kx \approx 61$ N, a na gładkim stole nic go nie trzyma ✓

Przykład 2.3

Wahadło: czy nić wytrzyma?

Kulkę o masie $0,2\text{ kg}$ na nici o długości $0,8\text{ m}$ odchylamy do poziomu i puszcamy. Nić wytrzymuje naciąg najwyżej 5 N . Czy kulka dojdzie do najniższego punktu? Jeśli nie, przy jakim kącie nić pęknie i jaką prędkość będzie wtedy miała kulka?

- 1 Oszacowanie: w najniższym punkcie naciąg musi zrównoważyć ciężar ($mg \approx 1,96\text{ N}$) i jeszcze dostarczyć siłę dośrodkową. Jest więc większy niż $1,96\text{ N}$. Ale o ile?
- 2 Energia: przy kącie θ od pionu kulka opadła o $l \cos \theta$. Naciąg nie wykonuje pracy, więc $v^2 = 2gl \cos \theta$.
- 3 II zasada w kierunku punktu zawieszenia: $N_n - mg \cos \theta = mv^2/l = 2mg \cos \theta$, więc $N_n = 3mg \cos \theta$.
- 4 W najniższym punkcie ($\theta = 0$): $N_n = 3mg \approx 5,89\text{ N}$, więcej niż 5 N . Nić pęknie wcześniej, gdy $3mg \cos \theta = 5\text{ N}$: $\cos \theta \approx 0,849$, czyli $\theta \approx 31,8^\circ$ od pionu.
- 5 Prędkość w tej chwili: $v = \sqrt{2gl \cos \theta} \approx 3,65\text{ m/s}$.



Wahadło puszczone z poziomu; kąt θ od pionu

Wynik: nić pęknie przy kącie ok. $31,8^\circ$ od pionu, gdy kulka ma prędkość ok. $3,65\text{ m/s}$.

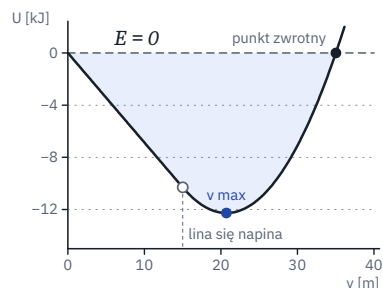
Sprawdzenie: naciąg w najniższym punkcie, $3mg$, nie zależy od długości nici. Krótsza nić nie pomoże $\checkmark$. Dla kulki puszczonej z kąta 60° wzór $N_n = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$ daje w najniższym punkcie $2mg$ $\checkmark$. Sama zasada zachowania energii nie wystarczyła. Siłę naciągu dała dopiero II zasada.

Przykład 2.4

Skok na linie: wykres energii w akcji

Skoczek o masie 70 kg skacze z mostu na linie o długości 15 m. Po napięciu lina działa jak sprężyna o sztywności 120 N/m. Jak nisko spadnie? Gdzie ma największą prędkość i ile ona wynosi? Jakie jest największe przyspieszenie? Opór powietrza pomijamy.

- 1 Oś y skierowana w dół od mostu. Energia potencjalna: $U(y) = -mgy$ dla $y \leq L$ oraz $U(y) = -mgy + \frac{1}{2}k(y - L)^2$ dla $y > L$. Na starcie $E = 0$.
- 2 Najniższy punkt to punkt zwrotny, czyli $U(y) = 0$. Dla wydłużenia liny $x = y - L$: $\frac{1}{2}kx^2 = mg(L + x)$, czyli $60x^2 - 686,7x - 10\,300,5 = 0$. Dodatni pierwiastek to $x \approx 20,0$ m, więc skoczek spada na głębokość ok. 35,0 m.
- 3 Największa prędkość jest w minimum $U(y)$, gdzie siła wypadkowa znika: $kx = mg$, czyli $x \approx 5,72$ m i $y \approx 20,7$ m. Z bilansu energii $v^2 = 2g(L + x) - (k/m)x^2$, więc $v \approx 18,7$ m/s.
- 4 Największe przyspieszenie jest w najniższym punkcie: $a = (kx - mg)/m \approx 24,5$ m/s² $\approx 2,5g$, skierowane w górę.



Energia potencjalna $U(y)$ skoczka i linia $E = 0$

Wynik: głębokość ok. 35 m; największa prędkość ok. 18,7 m/s na głębokości ok. 20,7 m; największe przyspieszenie ok. 2,5g w najniższym punkcie.

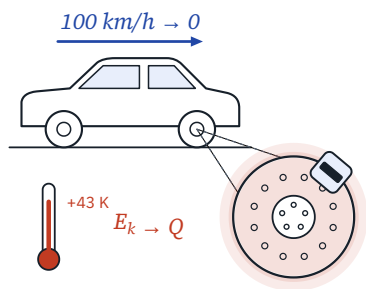
Sprawdzenie: największa prędkość wypada poniżej punktu, w którym lina się napina (15 m, gdzie $v = \sqrt{2gL} \approx 17,2$ m/s), bo na początku lina ciągnie słabiej, niż wynosi ciężar $\checkmark$. Na wykresie $U(y)$ widać to od razu: najszybciej jest na dnie dołka, a zawrócenie następuje tam, gdzie U wraca do poziomu $E = 0$. Na dnie dołka skoczek w końcu zawiśnie, gdy opór powietrza wytłumi drgania.

Przykład 2.5

Gorące hamulce: szacowanie

Samochód o masie 1500 kg hamuje od 100 km/h do zera. Ile energii zamienia się w ciepło i o ile ogrzeją się tarcze hamulcowe (łącznie ok. 30 kg żeliwa o cieple właściwym ok. 450 J/(kg·K))? A gdyby ten sam samochód zjeżdżał ze stałą prędkością górską drogą, tracąc 1000 m wysokości i hamując tylko hamulcami?

- 1 Oszacowanie: 100 km/h to tyle, co upadek z wysokości ok. 39 m (zadanie 1 w części 2). Energii jest sporo.
- 2 $E_k = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot (27,8 \text{ m/s})^2 \approx 579 \text{ kJ}$. Przyjmujemy, że cała przechodzi w ciepło tarcz (pomijamy opór powietrza i toczenia).
- 3 Ogrzanie tarcz: $\Delta T = E_k / (m_t c_w) = 579\,000 / (30 \cdot 450) \approx 43 \text{ K}$.
- 4 Zjazd ze stałą prędkością: energia kinetyczna się nie zmienia, więc w ciepło musi pójść cała energia potencjalna $mgh = 1500 \cdot 9,81 \cdot 1000 \approx 14,7 \text{ MJ}$. Bez chłodzenia tarcze ogrzałyby się o ok. 1090 K.



Energia ruchu przechodzi w ciepło tarcz

Wynik: jedno hamowanie to ok. 579 kJ i tarcze cieplejsze o ok. 43 K. Zjazd o 1000 m to ok. 14,7 MJ, czyli energia ponad 25 takich hamowań.

Sprawdzenie i lekcja: podczas długiego zjazdu tarcze oddają ciepło do powietrza, więc aż tak gorące nie będą. Mogą się jednak przegrzać, a płyn hamulcowy może się zagotować. Dlatego w górach zjeżdża się na niskim biegu: część energii odbiera wtedy silnik. Przednie tarcze przejmują większość pracy hamowania, więc grzeją się mocniej niż średnio ✓

Przykład 2.6

Ile kosztuje orbita? Szacowanie po feynmanowsku

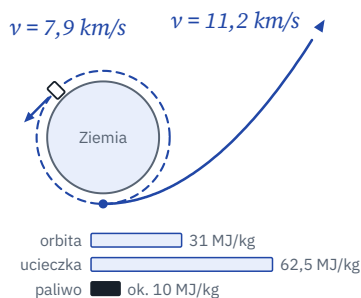
Ile energii trzeba, żeby kilogram ładunku wprowadzić na niską orbitę, a ile, żeby wysłać go z Ziemi na zawsze? Porównaj z energią chemiczną paliwa rakietowego: ok. 10 MJ na kilogram mieszanki nafty z ciekłym tlenem. Pomiń opór powietrza i wysokość orbity.

- 1 Ucieczka (część 3.3): na kilogram potrzeba $\frac{1}{2}v^2 = GM/R = gR = 9,81 \cdot 6,371 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \approx 62,5 \text{ MJ/kg}$. Prędkość ucieczki to $\sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ km/s}$.

- 2 Orbita tuż nad powierzchnią: $v^2 = gR$, więc energia kinetyczna wynosi $\frac{1}{2}gR \approx 31,2 \text{ MJ/kg}$. To dokładnie połowa energii ucieczki, jak zauważa Feynman.

FLP I-14-3

- 3 Paliwo: nawet gdyby cała energia chemiczna trafiała do ładunku, na każdy kilogram wprowadzony na orbitę trzeba by spalić ok. 3 kg mieszanki, a do ucieczki ok. 6 kg.



Energia na kilogram: orbita i ucieczka

Wynik: orbita ok. 31 MJ/kg, ucieczka ok. 62,5 MJ/kg, czyli 3 i 6 kg paliwa na kilogram ładunku przy idealnej sprawności.

Sprawdzenie i lekcja: energia na kilogram nie zależy od masy ładunku, bo i ciężar, i bezwładność są do niej proporcjonalne ✓. W rzeczywistości rakietę musi rozpędzać także paliwo, które spali później, więc na każdy kilogram ładunku na orbicie startuje kilkadziesiąt kilogramów rakiet. Tę zależność opisuje wzór Ciołkowskiego, do którego potrzebna jest zasada zachowania pędu (dział 3).

8 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

Słowa „energia”, „praca” i „moc” znamy z codziennego języka, w którym znaczą co innego niż w fizyce. Stąd większość poniższych pomyłek.

× „Energia to niewidzialna substancja, która przepływa z ciała do ciała.”

Feynman mówi wprost, że nie wiemy, czym jest energia, i że nie składa się ona z drobinek o określonej wielkości. To liczba obliczana z wielu wzorów, której suma się nie zmienia. Obraz „przepływu” bywa wygodny, ale w opowieści o klockach najważniejsze jest to, że klocków nie ma.

× „Energii się zużywa.”

Energia jest zachowana. „Zużywamy” ją w tym sensie, że zamieniamy postać użyteczną (paliwo, prąd, wodę w górnym zbiorniku) w ciepło o temperaturze otoczenia, z którego nie umiemy już skorzystać. O tym, co da się odzyskać, mówi termodynamika (dział 9).

× „Praca to siła razy droga.”

Liczy się tylko składowa siły wzdłuż przesunięcia, a przy zmiennej sile trzeba całkować. Praca może być ujemna (hamowanie) i może być zerowa przy ogromnej sile: tak jest z siłą dośrodkową, z reakcją nieruchomego podłoża i z ręką, która trzyma ciężką torbę w miejscu.

× „Energia potencjalna to własność samego ciała.”

To energia *układu*: kamienia i Ziemi, dwóch atomów, sprężyny i ciężarka. Jej wartość zależy od wyboru zera i może być ujemna, np. $-GMm/r$. Sens fizyczny mają tylko różnice energii potencjalnej.

× „Ze stromej zjeżdżalni zjedzie się szybciej niż z łagodnej o tej samej wysokości.”

Bez tarcia prędkość na dole jest taka sama, bo zależy tylko od wysokości. Różny jest czas zjazdu. Z tarcie stroma zjeżdżalnia rzeczywiście daje większą prędkość, ale z innego powodu: praca tarcia to μmg razy poziomy rzut drogi, a ten jest przy stromej zjeżdżalni krótszy (przykład 2.1).

× „Tarcie zawsze zabiera energię ruchu.”

Gdy idziesz albo jedziesz samochodem, tarcie statyczne działa na nieruchomy punkt styku, więc nie wykonuje pracy. Energię ruchu daje twój organizm albo silnik. Paczka położona na jadącej taśmie rusza dzięki tarcu, które wykonuje nad nią pracę dodatnią. Ciepło i tak się wydziela, ale w całym układzie paczka-taśma.

× „Kilowat i kilowatogodzina to to samo.”

Kilowat to jednostka mocy, czyli tempa przekazywania energii. Kilowatogodzina to jednostka energii: $1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}$. Czajnik o mocy 2 kW , który gotuje wodę przez 3 minuty, zużywa $2 \text{ kW} \cdot 0,05 \text{ h} = 0,1 \text{ kWh}$.

9 Zadania feynmanowskie

W tych zadaniach nie ma jednej metody. Trzeba szacować, sprawdzać przypadki graniczne i pomyśleć, zanim się policzy. Przy każdym zrób najpierw własne oszacowanie, a dopiero potem

- 1 **Wyścig dwóch kulek.** Dwie kulki startują jednocześnie z tą samą prędkością. Jedna ■ ■ ■ jedzie po prostym poziomym torze, druga po torze z łagodnym dołkiem: zjeżdża w dół i wraca na ten sam poziom. Tarcie pomijamy. Która ma na mecie większą prędkość? Która dojedzie pierwsza?
- 2 **Wahadło z kołkiem.** Kulka wisi na nici o długości l . W odległości d pod punktem zawieszenia wbito kołek. Gdy nić zaczepi o kołek, kulka zaczyna krążyć wokół niego po mniejszym okręgu. (a) Kulkę puszczaemy z wysokości niższej niż kołek. Pokaż, że po drugiej stronie wzniesie się dokładnie do wysokości startu, choć porusza się po innym łuku. (b) Kulkę puszczaemy z nicią napiętą poziomo. Jak nisko musi być kołek, żeby kulka obiegła go po pełnym okręgu z napiętą nicią?
- 3 **Paliwo z kranu.** Feynman pisze, że gdyby udało się opanować syntezę termojądrową, energia z 10 kwart wody na sekundę (ok. 9,5 L/s) równałaby się całej mocy elektrycznej wytwarzanej wtedy w USA. FLP I-4-4 Sprawdź to. Dane: w wodzie na 6420 atomów wodoru przypada jeden atom deuteru; całkowite spalanie deuteru w reakcjach syntezy daje ok. 7,2 MeV na każdy atom deuteru ($1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$). Na początku lat 60. średnia moc elektryczna USA wynosiła ok. 100 GW. Ile wody na sekundę wystarczyłoby dziś dla Polski (średnio ok. 19 GW)?
- 4 **Ile waży ciepło?** Litry wody w czajniku ogrzewamy od 20°C do 100°C (ciepło właściwe ■ ■ ■ $c_w = 4186 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$). O ile wzrośnie jej masa? Czy da się to zważyć?
- 5 **Pchła i człowiek.** Pchła wyskakuje na wysokość ok. 20 cm. Człowiek w skoku podnosi środek masy o ok. 50 cm, choć jest ok. 10^8 razy cięższy. (a) Dlaczego te wysokości są podobne? (b) Pchła odbija się w ciągu ok. 1 ms. Jaką moc na kilogram masy ciała musi wtedy rozwinąć? Mięśnie dają najwyżej kilkaset watów na kilogram. Co z tego wynika?
- 6 **Magazyn z jeziora.** Elektrownia szczytowo-pompowa (największa w Polsce działa w Żarnowcu) nocą pompuje wodę do górnego zbiornika, a w dzień spuszcza ją przez turbiny. Przyjmij: zbiornik 10 mln m^3 , różnica poziomów 120 m, moc 700 MW, sprawność turbin 90%. (a) Ile energii mieści zbiornik i jak długo elektrownia może pracować pełną mocą? (b) Porównaj energię kilograma wody podniesionej o 120 m z energią kilograma akumulatora litowo-jonowego (ok. 0,25 kWh/kg).

- 7 **Dlaczego meteory płoną?** Meteoroid wpada w atmosferę z prędkością 20 km/s. (a) Ile energii kinetycznej niesie każdy kilogram? Porównaj z trotylem (4,2 MJ/kg). (b) Odparowanie skały wymaga rzędu 10–20 MJ/kg. Co dzieje się z małym meteoroidem?

- 8 **Hamowany satelita przyspiesza.** Opór szczątkowej atmosfery hamuje satelitę na niskiej orbicie kołowej. Pokaż, że satelita od tego... przyspiesza. O ile wzrośnie prędkość stacji kosmicznej, gdy jej orbita obniży się z 400 km do 398 km ($GM = gR^2$, $R = 6371$ km)?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

Więcej zadań tego rodzaju: czytaj rozdz. 4 i 14 FLP z ołówkiem w ręku i sprawdzaj każdą liczbę, którą podaje Feynman.

10 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź. Te pytania prawie nie wymagają liczenia, ale bez zrozumienia nie da się na nie odpowiedzieć.

- 1 Z wieży rzucamy trzy kamienie z tą samą szybkością: pionowo w górę, poziomo i pionowo w dół. Który uderzy w ziemię z największą szybkością?

Wszystkie z tą samą (bez oporu powietrza). Z zasady zachowania energii $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$, a kierunek rzutu nie występuje w tym wzorze. Różne są czas lotu i miejsce upadku.

- 2 Czy grawitacja wykonuje pracę nad satelitą krążącym po orbicie kołowej? A po eliptycznej?

Na orbicie kołowej nie: siła jest prostopadła do prędkości, więc szybkość się nie zmienia. Na eliptycznej tak: zbliżając się do Ziemi, satelita ma składową prędkości wzdłuż siły i przyspiesza, a oddalając się, zwalnia. Po pełnym okrążeniu praca wynosi zero, bo siła jest zachowawcza.

- 3 Niesiesz walizkę poziomo ze stałą prędkością. Jaką pracę wykonuje twoja ręka nad walizką?

Zerową. Ręka działa na walizkę pionowo w górę, a przesunięcie jest poziome. Męczysz się z powodów fizjologicznych (część 2.4), a nie dlatego, że wykonujesz pracę w sensie fizyki.

4 Czy energia potencjalna może być ujemna?

Tak. Jej wartość zależy od wyboru zera. Grawitacyjna energia potencjalna $-GMm/r$ z zerem w nieskończoności jest ujemna wszędzie. Sens fizyczny mają tylko różnice.

5 W punkcie zwrotnym na wykresie $U(x)$ prędkość jest zerowa. Czy przyspieszenie też?

Zwykle nie. Przyspieszenie to $-U'(x)/m$, a w punkcie zwrotnym krzywa jest nachylona. Właśnie ta siła zawraca ciało. To ta sama sytuacja co w najwyższym punkcie rzutu pionowego z działu 1.

6 Samochód jedzie dwa razy szybciej. Ile razy dłuższa będzie droga hamowania przy tej samej sile hamowania?

Cztery razy. Praca siły hamowania Ts musi zabrać energię $\frac{1}{2}mv^2$, a ta rośnie jak v^2 .

7 Silnik ma określoną moc. Po co samochodowi skrzynia biegów?

Bo przy danej mocy siła napędowa to $F = P/v$, a silnik dobrze pracuje tylko w pewnym zakresie obrotów. Na niskim biegu silnik kręci się szybko, choć samochód jedzie wolno, więc może oddać pełną moc i dać dużą siłę do ruszania i jazdy pod górę. Na wysokim biegu ta sama moc daje mniejszą siłę przy dużej prędkości.

8 Czy wahadło odchylone o 90° będzie się wahać z takim samym okresem jak przy małych wychyleniach?

Nie, z dłuższym, o ok. 18%. Energia potencjalna $mgl(1 - \cos \theta)$ jest parabolą tylko przy małych kątach. Przy dużych rośnie wolniej niż parabola, więc siła zawracająca jest słabsza, niż przewiduje przybliżenie harmoniczne, i wahadło porusza się wolniej. Wzór $\omega = \sqrt{U''(x_0)/m}$ dotyczy tylko małych drgań.

11 Karta wzorów i co dalej

PRACA I ENERGIA

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}; \text{ stała siła: } W = F s \cos \theta$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad W_{\text{wyp}} = \Delta E_k$$

$$U: mgh, \quad \frac{1}{2} k x^2, \quad -\frac{GMm}{r}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = U(1) - U(2) = -\Delta U$$

$$\text{tylko siły zachowawcze: } E_k + U = \text{const}$$

$$E_{k1} + U_1 + W_{\text{inne}} = E_{k2} + U_2; \text{ tarcie: } W = -T s$$

$$\text{ucieczka: } v = \sqrt{2gR}; \text{ orbita: } v = \sqrt{gR}$$

POTENCJAŁ, RÓWNOWAGA, MOC

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad \vec{F} = -\nabla U$$

$$v(x) = \sqrt{2[E - U(x)]/m}; \text{ ruch tam, gdzie } U \leq E$$

$$\text{równowaga: } U'(x_0) = 0; \text{ trwała, gdy } U''(x_0) > 0$$

$$\text{małe drgania: } \omega = \sqrt{U''(x_0)/m}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}, \quad 1 \text{ KM} \approx 735,5 \text{ W}$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 4 (całość), 13-1, 14-1...14-4.
- **Dla chętnych:** 13-2...13-4 (praca grawitacji, energia układu wielu ciał, pole dużych ciał), 14-5 (potencjał, pole i gradient), 15-8...15-9 (równoważność masy i energii).

Następny dział: **Pęd**. Feynman wspomina, że istnieją jeszcze dwie zasady zachowania podobne do zasady zachowania energii: pędu i momentu pędu. W rozdziale 10 pokazuje dwa jednakowe ślizgacze na torze powietrznym, które pędzą ku sobie z równymi prędkościami, zderzają się i sklejają. Stają w miejscu. Cała ich energia kinetyczna zamienia się w ciepło, a mimo to pewna wielkość zostaje zachowana dokładnie. Zobaczemy, skąd się ona bierze i dlaczego pozwala policzyć zderzenia, których szczegółów nie znamy.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $F \cdot 4 \text{ m} = mg \cdot 1 \text{ m}$, więc $F = mg/4 = 200 \cdot 9,81/4 = 490,5 \text{ N}$. Cztery razy mniejsza siła, cztery razy dłuższa droga.
2. Przesuń w myślach skrzynię o całą długość równi. Siła wykonuje $F \cdot 4 \text{ m}$, a skrzynia zyskuje $mg \cdot 1,2 \text{ m}$. Stąd $F = mg \cdot 1,2/4 \approx 147 \text{ N}$. Ten sam wynik daje $mg \sin \alpha$ z rozkładu sił.
3. Punkt odległy o x od zawiasu podnosi się o $\delta \cdot x/3$. Bilans: $F\delta = 40 \cdot \frac{1}{3}\delta + 90 \cdot \frac{2}{3}\delta + 30 \cdot \frac{1}{2}\delta$, więc $F = 13,3 + 60 + 15 \approx 88,3 \text{ N}$.
4. W czasie jednego obrotu dłoń przebywa $2\pi \cdot 0,3 \approx 1,885 \text{ m}$, a ładunek wznosi się o $0,002 \text{ m}$. Z $F \cdot 1,885 = 1200 \cdot 9,81 \cdot 0,002$ dostajemy $F \approx 12,5 \text{ N}$. Prawdziwy podnośnik wymaga kilka razy więcej, i bardzo dobrze. Jest celowo nieodwracalny: gdyby był odwracalny, samochód po puszczeniu korby opadłby sam, kręcąc nią w drugą stronę.
5. Odwracalna dźwignia podniosłaby 25 kg tylko o $10 \cdot 1/25 = 0,4 \text{ m}$. Cykl: (1) skrzynka wynalazcy opuszcza 10 kg o 1 m i podnosi 25 kg o $0,5 \text{ m}$; (2) opuszczamy 25 kg o $0,1 \text{ m}$ i przy okazji coś podnosimy; (3) dźwignia puszczonej wstecz opuszcza 25 kg o pozostałe $0,4 \text{ m}$ i podnosi 10 kg z powrotem o 1 m . Wszystko wraca na miejsce, a każdy cykl daje za darmo $25 \cdot 9,81 \cdot 0,1 \approx 24,5 \text{ J}$. Perpetuum mobile nie istnieje, więc wynalazca się myli. Albo w skrzynce jest ukryte źródło energii, na przykład bateria.

Zadania · część 2

1. $gh = \frac{1}{2}v^2$, więc $h = v^2/(2g)$. Dla 50 km/h ($13,9 \text{ m/s}$): $h \approx 9,8 \text{ m}$, czyli mniej więcej z trzeciego piętra. Dla 100 km/h : $h \approx 39 \text{ m}$, czyli z trzynastego piętra. Dwa razy większa prędkość to cztery razy większa wysokość.
2. $W = Fs \cos 30^\circ = 80 \cdot 50 \cdot 0,866 \approx 3,46 \text{ kJ}$. Ciężar i reakcja są prostopadłe do przesunięcia, więc ich praca wynosi zero.
3. $W = \int_0^3 (6x - x^2) dx = [3x^2 - x^3/3]_0^3 = 27 - 9 = 18 \text{ J}$. To pole pod parabolą $F(x)$ między 0 a 3 m .
4. $N_n = m(g + a) = 8648 \text{ N}$, więc $W_{\text{liny}} = N_n h \approx 86,5 \text{ kJ}$. Ciężar działa przeciwnie do ruchu: $W_g = -mgh \approx -78,5 \text{ kJ}$. Suma prac: $8,0 \text{ kJ}$. Prędkość na końcu $v = \sqrt{2ah} \approx 4,47 \text{ m/s}$, więc $E_k = \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 20 = 8,0 \text{ kJ} \checkmark$. Praca wypadkowej równa się przyrostowi energii kinetycznej.
5. Wykonuje. Reakcja $N = mg$ jest równoległa do prędkości, więc $W_N = mgh = 70 \cdot 9,81 \cdot 30 \approx 20,6 \text{ kJ}$. Ciężar wykonuje $-20,6 \text{ kJ}$, suma wynosi zero i energia kinetyczna się nie zmienia $\checkmark$. Haczyk tkwi w słowie „nieruchome”. Reakcja nieruchomego, gładkiego podłoża jest prostopadła do prędkości ciała. Podłoga windy sama się porusza, więc ty poruszasz się razem z nią w kierunku siły. Energię dostarcza silnik windy przez linę i podłogę.

Zadania · część 3

1. Zero na podłodze: 0 J ; $15,7 \text{ J}$; $35,3 \text{ J}$. Zero na stole: $-15,7 \text{ J}$; 0 J ; $19,6 \text{ J}$. Zero na półce: $-35,3 \text{ J}$; $-19,6 \text{ J}$; 0 J . Zmiana przy przeniesieniu ze stołu na półkę zawsze wynosi $mg \cdot 1,0 \text{ m} \approx 19,6 \text{ J}$. Wartości U zależą od wyboru zera, a różnice nie.

- $F = -dU/dx = 4/x^2$. W punkcie $x = 2$ m: $F = 1$ N. Siła jest dodatnia, czyli skierowana od początku układu: odpycha. Tak odpychają się dwa ładunki jednoimienne: U maleje z odległością, więc siła pcha na zewnątrz.
- (a) $\int_0^1 (2x + x) dx = 1,5$ J. (b) $dy = 2x dx$, więc $\int_0^1 (2x^2 + 2x^2) dx = 4/3 \approx 1,33$ J. (c) Na osi x jest $y = 0$, więc $F_x = 0$ i praca jest zerowa. Na odcinku pionowym $F_y = x = 1$ N, praca wynosi 1 J. Trzy drogi dają trzy różne wyniki, więc siła nie jest zachowawcza. Test to potwierdza: $\partial F_x / \partial y = 2$, a $\partial F_y / \partial x = 1$.
- $mgh \approx 3,92$ MJ. Dokładnie: $\Delta U = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = mgh \frac{R}{R+h} \approx 3,69$ MJ, więc wzór mgh zawyża wynik o ok. 6%. Energia kinetyczna na orbicie: $\frac{1}{2} m GM/r \approx 29,4$ MJ, prawie osiem razy więcej. Wynieść coś na orbitę to przede wszystkim rozpędzić, a nie podnieść.
- Na okręgu siła jest styczna do toru i ma stałą wartość kR , więc $W = kR \cdot 2\pi R = 2\pi kR^2 \neq 0$. Każde okrążenie dodawałoby energię kinetyczną za darmo, czyli mielibyśmy perpetuum mobile. Takie pole nie może więc istnieć jako stałe pole siły zależnej tylko od położenia. Pola wirowe istnieją naprawdę: zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne, które rozpędza elektrony w betatronie (dział 16). Energia nie bierze się jednak znikąd. Płaci za nią źródło, które zmienia pole magnetyczne, i dlatego to pole musi się zmieniać w czasie.

Zadania • część 4

- $F = -U' = 6 - 6x^2$. Równowaga, gdy $F = 0$: $x = \pm 1$ m. $U'' = 12x$. W $x = 1$ m $U'' = 12 > 0$: równowaga trwała. W $x = -1$ m $U'' = -12 < 0$: nietrwała.
- $k = U'' = 100$ N/m, $\omega = \sqrt{k/m} \approx 7,07$ rad/s, $T = 2\pi/\omega \approx 0,889$ s.
- $U = mgR[1 - \cos(s/R)] \approx \frac{1}{2} \frac{mg}{R} s^2$, więc $k = mg/R$, $\omega = \sqrt{g/R} \approx 4,43$ rad/s i $T \approx 1,42$ s. Masa się skróciła. Wynik jest taki sam jak dla wahadła o długości R , bo krążek w misie i kulka na nici poruszają się po takim samym łuku.
- $U(x) = 0$ dla $x = 0$ i $x = \pm\sqrt{3}$. Wokół dołka ruch odbywa się między punktami zwrotnymi $x = 0$ i $x = \sqrt{3} \approx 1,73$ m. Największa prędkość jest na dnie ($x = 1$, $U = -4$ J): $v = \sqrt{2(E - U)/m} = \sqrt{8} \approx 2,83$ m/s. Małe drgania: $\omega = \sqrt{U''(1)/m} = \sqrt{12} \approx 3,46$ rad/s. Szczyt bariery jest w $x = -1$, gdzie $U = 4$ J. Przy $E > 4$ J cząstka przechodzi przez szczyt i ucieka w lewo, do $x \rightarrow -\infty$. W prawo uciec nie może, bo tam $U \rightarrow +\infty$.
- $s = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + E/\varepsilon} \right)$ i $r = \sigma s^{-1/6}$. Dla $E = -0,9\varepsilon$: r od $1,072\sigma$ do $1,196\sigma$, środek w $1,134\sigma$. Dla $E = -0,5\varepsilon$: od $1,027\sigma$ do $1,377\sigma$, środek w $1,202\sigma$. Środek przesuwają się w prawo, choć dno jest w $1,122\sigma$. Powód: dołek jest niesymetryczny. Z lewej ściana jest stroma (odpychanie rośnie jak r^{-12}), z prawej zbocze łagodne. Gdy rośnie energia, atomy „wjeżdżają” dalej na łagodne zbocze niż na strome. Ogrzanie to dodanie energii chaotycznych drgań, więc średnia odległość atomów rośnie i ciało się rozszerza. W idealnej paraboli środek zostałby na miejscu i rozszerzalności cieplnej by nie było.

Zadania • część 5

- $P = mgh/t = 500 \cdot 9,81 \cdot 20/25 = 3924$ W $\approx 3,9$ kW. To samo daje $P = Fv$ z $F = mg$ i $v = 0,8$ m/s.
- Siła napędowa równoważy składową ciężaru wzdłuż drogi i opory: $F = mg \sin \alpha + 600$ N = $588,6 + 600 = 1188,6$ N. Moc $P = Fv \approx 29,7$ kW.
- Na sekundę pompa podnosi $30\,000$ kg/ 3600 s $\approx 8,33$ kg wody. Moc użyteczna $P_u = \dot{m}gh \approx 2044$ W. Moc elektryczna $P = P_u/\eta \approx 2920$ W, czyli ok. $2,9$ kW. Pozostałe 30% to ciepło w silniku i pompie.

4. Przy prędkości maksymalnej cała moc idzie na pokonanie oporu: $P = Fv = \frac{1}{2}\rho C_x S v^3$, więc $v = (2P/(\rho C_x S))^{1/3} \approx 52,3 \text{ m/s} \approx 188 \text{ km/h}$. Podwojenie mocy mnoży prędkość przez $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$, do ok. 237 km/h. Moc rośnie jak sześcian prędkości, więc szybkie samochody potrzebują ogromnych silników.
5. $W = mgh = 80 \cdot 9,81 \cdot 1100 \approx 863 \text{ kJ}$, czyli ok. 206 kcal. Średnia moc: $863 \text{ kJ}/14\,400 \text{ s} \approx 60 \text{ W}$, mniej niż żarówka. Przy sprawności 25% organizm zużyje na wznoszenie ok. 3,45 MJ, czyli ok. 825 kcal: mniej więcej półtorej tabliczki czekolady. W rzeczywistości zużyje więcej, bo kosztuje też samo chodzenie, utrzymanie temperatury ciała i schodzenie. Wniosek po feynmanowsku: mechaniczna praca wejścia na najwyższy szczyt Polski jest zaskakująco mała. Większość energii z jedzenia zamienia się w ciepło.

Zadania feynmanowskie

1. Na mecie obie kulki mają tę samą prędkość, bo są na tej samej wysokości: energia nie zależy od kształtu toru.
2. Pierwsza dojedzie jednak kulka z dołkiem. W dołku zamienia energię potencjalną na kinetyczną, więc przez cały pobyt w dołku jedzie szybciej niż kulka na prostym torze. Jej droga jest trochę dłuższa, ale przy łagodnym dołku zysk na prędkości przeważa.
3. **Wynik i lekcja:** prędkość na mecie ta sama, czas krótszy dla toru z dołkiem. Zasada zachowania energii mówi „jak szybko”, ale nie mówi „kiedy”. Do czasu potrzebne jest równanie ruchu. Pytanie o tor najszybszego zjazdu (brachistochronę) postawił w 1696 r. Johann Bernoulli.
2. 1. (a) Naciąg nici jest prostopadły do toru także po zaczepieniu o kołek, bo więzy są nieruchome. Nie wykonuje więc pracy. Pracę wykonuje tylko ciężar, więc kulka zatrzymuje się dopiero na wysokości startu. Przez cały czas jest poniżej kołka, więc nic pozostaje napięta. Galileusz pokazywał to doświadczenie jako dowód, że prędkość zależy tylko od wysokości spadku.
2. (b) Promień małego okręgu to $r = l - d$. Jego najwyższy punkt leży $d - r$ poniżej punktu zawieszenia, czyli poniżej poziomu startu. Z energii $v^2 = 2g(d - r)$.
3. Warunek napiętej nici w najwyższym punkcie, $v^2 \geq gr$, daje $2(d - r) \geq r$, czyli $r \leq \frac{2}{3}l$ i $d \geq \frac{1}{3}l$.
4. **Wynik:** kołek musi być co najmniej $2/3$ długości nici pod punktem zawieszenia. Sama energia znowu nie wystarczyła, potrzebna była II zasada.
3. 1. 9,46 kg wody to $9460/18,0 \approx 525$ moli cząsteczek, czyli ok. 1050 moli atomów wodoru.
2. Deuter stanowi z tego $1/6420$: 0,164 mola, czyli ok. $9,9 \cdot 10^{22}$ atomów na sekundę.
3. Moc: $9,9 \cdot 10^{22} \cdot 7,2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J/s} \approx 1,14 \cdot 10^{11} \text{ W}$, czyli ok. 114 GW. Feynman miał rację.
4. Dla Polski wystarczyłoby $9,46 \text{ L/s} \cdot 19/114 \approx 1,6 \text{ L/s}$, mniej więcej tyle, ile trzeba, żeby napełnić wannę (150 L) w półtorej minuty.
5. **Wynik:** ok. 114 GW z 9,5 L wody na sekundę. Deuteru w wodzie jest pod dostatkiem. Trudność leży w opanowaniu reakcji, a nie w paliwie.
4. 1. Dostarczona energia $Q = mc_w \Delta T = 1 \cdot 4186 \cdot 80 \approx 3,35 \cdot 10^5 \text{ J}$.
2. Przyrost masy $\Delta m = Q/c^2 \approx 3,7 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$, czyli ok. 4 nanogramy. Zwykła waga laboratoryjna rozróżnia 0,1 mg, czyli ok. 27 000 razy więcej.
3. **Wynik:** woda staje się cięższa o kilka nanogramów, czego nie da się zważyć. Feynman opisuje to samo dla gazu: ogrzany gaz ma szybsze cząsteczki, więc jest cięższy o przyrost energii kinetycznej podzielony przez c^2 . (FLP I-15-8) Efekt jest prawdziwy, tylko małeńki. Uwaga na litery: c_w to ciepło właściwe, a c prędkość światła.

5. 1. (a) Energia skoku pochodzi z mięśni nóg, a ich masa jest w przybliżeniu proporcjonalna do masy ciała. Każdy kilogram mięśnia może wykonać w jednym skurczu podobną pracę. Potrzebna energia mgh też jest proporcjonalna do masy, więc wysokość h prawie nie zależy od rozmiarów zwierzęcia. To rozumowanie o skalowaniu podał Giovanni Borelli w 1680 r.
2. (b) Prędkość wybiecia $v = \sqrt{2gh} \approx 1,98$ m/s, energia na kilogram $gh \approx 1,96$ J/kg, dostarczona w 1 ms: ok. 2000 W/kg. Mięśnie tego nie potrafią.
3. Pchła działa jak katapulta: powoli napina sprężysty element z białka zwanego rezyliną, a potem uwalnia energię w ułamku milisekundy. Energia ta sama, moc zupełnie inna.
4. **Wynik:** wysokości są podobne, bo energia i potrzeby rosną jak masa. Pchła potrzebuje ok. 2000 W/kg, czyli kilka razy więcej, niż dają mięśnie. Człowiek odbija się na drodze ok. 40 cm w czasie ok. 0,26 s, więc potrzebuje średnio ok. 30–40 W na kilogram ciała (licząc też uniesienie środka masy przy wybiciu).
6. 1. (a) $E = \rho Vgh = 10^{10}$ kg $\cdot$ 9,81 $\cdot$ 120 m $\approx 1,18 \cdot 10^{13}$ J, czyli ok. 3,3 GWh.
2. Turbiny oddają 90% tego, więc czas pracy to $0,9 \cdot 1,18 \cdot 10^{13}$ J / ($7 \cdot 10^8$ W) $\approx 15\,000$ s, ok. 4,2 h.
3. (b) Kilogram wody na wysokości 120 m to tylko $gh \approx 1,2$ kJ. Akumulator: $0,25 \cdot 3,6$ MJ = 900 kJ, ok. 760 razy więcej.
4. **Wynik:** ok. 3,3 GWh, ok. 4 godziny pracy pełną mocą. Grawitacyjna energia potencjalna to energia „rozrzedzona”. Dlatego magazyny grawitacyjne muszą być całymi jeziorami.
7. 1. (a) $\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(2 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2 = 2 \cdot 10^8$ J/kg, czyli 200 MJ/kg, prawie 50 razy więcej niż w trotylu.
2. (b) Tej energii wystarczyłoby, żeby odparować ten sam kilogram skały 10 do 20 razy. Hamowanie w powietrzu zamienia energię ruchu w ciepło: powietrze przed meteoroidem jest gwałtownie sprężane i rozgrzewa się do żarzenia.
3. **Wynik:** mały meteoroid traci całą energię wysoko nad ziemią i po prostu paruje. Jego świecący ślad widzimy jako „spadającą gwiazdę”. Duże ciała tracą w atmosferze tylko ułamek energii i uderzają w ziemię z resztą, stąd krater.
8. 1. Z warunku orbity $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$. Przy $U = -\frac{GMm}{r}$ energia całkowita wynosi $E = E_k + U = -\frac{GMm}{2r}$.
2. Opór zabiera energię, więc E maleje, czyli staje się bardziej ujemna. To oznacza mniejsze r , a mniejsze r oznacza większe $E_k = GMm/(2r)$.
3. Grawitacja wykonuje przy tym pracę $-\Delta U = 2\Delta E_k$: połowa tej pracy idzie na wzrost energii kinetycznej, a połowa na ciepło wydzielone przez opór.
4. **Wynik:** satelita schodzi niżej i krąży szybciej. Liczbowo $v = \sqrt{GM/r}$ rośnie z ok. 7668,6 m/s do ok. 7669,7 m/s, czyli o ok. 1,1 m/s.

Fizyka · Dział 2: Energia · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011). Cytaty w tłumaczeniu własnym, odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział.