

# Stany kwantowe, układy dwustanowe i spin

Stan kwantowy to zbiór amplitud względem stanów bazowych, czyli wektor o zespolonych składowych. Jego zmianę w czasie opisuje macierz, hamiltonian, a dozwolone energie to jej wartości własne. Najprostszy przypadek, dwa stany bazowe, wystarcza, by zrozumieć spin elektronu w filtrze Sterna-Gerlacha, cząsteczkę amoniaku i maser, rezonans magnetyczny w tomografii i polaryzację fotonu, z której zbudowano kryptografię kwantową.

## CZAS

ok. 4,5 h teorii +  
ok. 5 h zadań

## ZADANIA

25 zadań w treści  
+ 8  
feynmanowskich,  
z odpowiedziami

## ŹRÓDŁO

*Feynmana*  
wykłady z fizyki, t.  
III, rozdz. 5–12; t.  
II, rozdz. 35

## W TYM DZIALE

- 0 Prolog: srebro rozdzielone na dwoje
- 1 Stany bazowe i filtry Sterna-Gerlacha
- 2 Zmiana w czasie: hamiltonian
- 3 Układ dwustanowy: cząsteczka amoniaku
- 4 Spin w polu magnetycznym i rezonans
- 5 Polaryzacja fotonu i kubity
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

## Prolog: srebro rozdzielone na dwoje

W 1922 r. we Frankfurcie Otto Stern i Walther Gerlach przepuścili wiązkę atomów srebra z pieca przez niejednorodne pole magnetyczne. Atom srebra ma moment magnetyczny, więc w polu, którego wartość zmienia się w poprzek wiązki, działa na niego siła zależna od tego, jak ten moment jest ustawiony. Klasycznie momenty są ustawione dowolnie, więc wiązka powinna się rozmyć w ciągłą smugę. Na płycie zobaczono dwie oddzielne plamki. Moment magnetyczny atomu, mierzony wzdłuż dowolnego kierunku, przyjmuje tylko dwie wartości.

FLP II-35-2, III-5-1

Dziś wiemy, że ten moment pochodzi od **spinu** jednego elektronu, wewnętrznego momentu pędu, który mierzony wzdłuż dowolnej osi wynosi  $+\hbar/2$  albo  $-\hbar/2$ . Feynman robi z tego doświadczenia narzędzie (w rozdz. 5 używa atomów o spinie 1 z trzema wiązkami; tu bierzemy prostszy spin  $\frac{1}{2}$  z rozdz. 6): filtr, który przepuszcza tylko atomy w jednym stanie. Ustawiając takie filtry jeden za drugim, pod różnymi kątami, można zobaczyć w czystej postaci całą maszynę mechaniki kwantowej.

**Pytanie na start.** Filtr przepuszcza tylko atomy ze spinem „w górę”. Za nim stoi filtr ustawiony poziomo, przepuszczający tylko stan  $+x$ , a za nim znów filtr „górażdół”. Ile atomów wyjdzie z ostatniego filtra ze spinem „w dół”, skoro pierwszy filtr przepuścił same „w górę”? Odpowiedź w części 1.

## Stany bazowe i filtry Sterna-Gerlacha

Filtr Sterna-Gerlacha ustawiony wzdłuż osi  $z$  (nazwijmy go  $T$ ) dzieli atomy na dwie grupy:  $|+z\rangle$  i  $|-z\rangle$ . Każdy atom wychodzi z filtra w jednym z tych dwóch stanów, nazywanych **stanami bazowymi**. Dowolny stan  $|\psi\rangle$  opisują dwie amplitudy:  $C_+ = \langle +z|\psi\rangle$  i  $C_- = \langle -z|\psi\rangle$ , z  $|C_+|^2 + |C_-|^2 = 1$ . Stan to więc wektor o dwóch zespolonych składowych. FLP III-5-4

### ⚡ ZASADY · STANY I BAZY

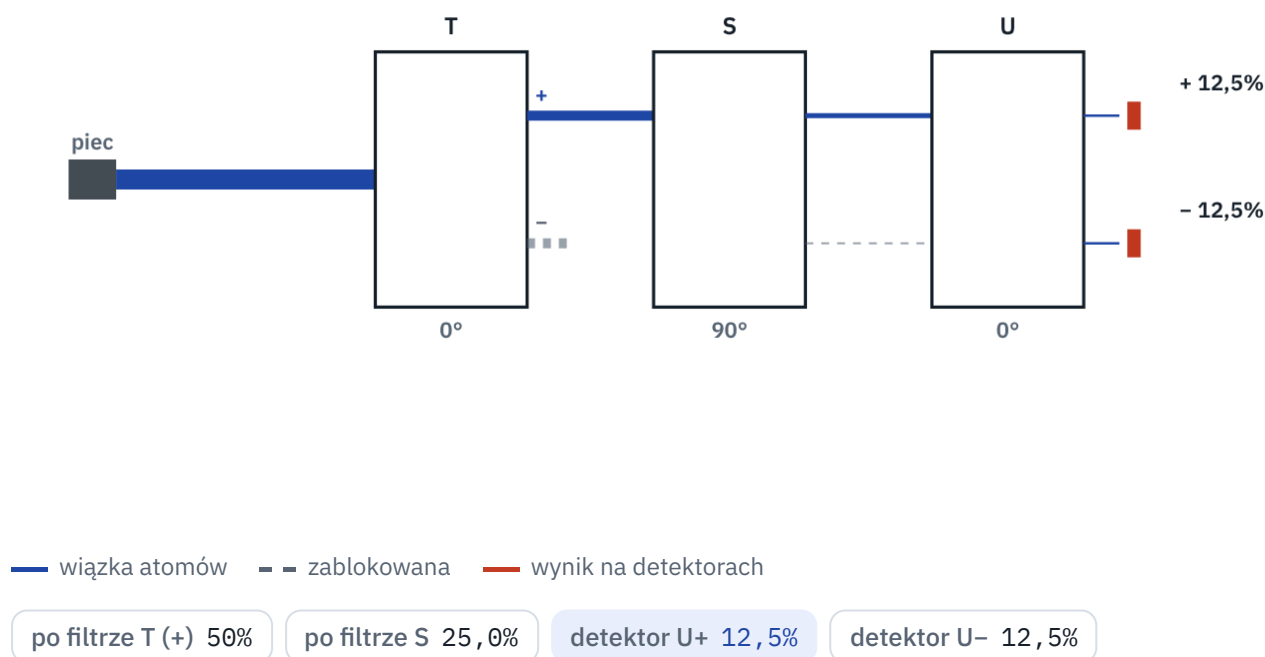
$$\langle \chi|\psi\rangle = \sum_i \langle \chi|i\rangle \langle i|\psi\rangle, \quad \langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \psi|\chi\rangle = \langle \chi|\psi\rangle^*.$$

Pierwszy wzór to reguła z działu 17 „Amplitudy prawdopodobieństwa”: przejście z  $\psi$  do  $\chi$  może odbyć się przez każdy stan bazowy, a amplitudy się dodaje. Baza jest pełna, gdy każde przejście da się tak rozpisać. Dla spinu  $\frac{1}{2}$  każda oś daje inną bazę; stan  $|+\theta\rangle$  wzdłuż osi odchylonej o kąt  $\theta$  od  $z$  w płaszczyźnie  $xz$  ma amplitudy  $\langle +z|+\theta\rangle = \cos \frac{\theta}{2}$  i  $\langle -z|+\theta\rangle = \sin \frac{\theta}{2}$ . FLP III-5-6, III-6-6

Odpowiedź na pytanie z prologu. Za pierwszym filtrem atomy są w stanie  $|+z\rangle$ . Filtr poziomy (oś  $x$ ,  $\theta = 90^\circ$ ) przepuszcza każdy z nich z prawdopodobieństwem  $\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$  i zostawia go w stanie  $|+x\rangle$ , który „nie pamięta”, że był  $|+z\rangle$ . Ostatni filtr daje  $|-z\rangle$  z prawdopodobieństwem  $\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$ . Ze wszystkich atomów, które przeszły przez pierwszy filtr, jedna czwarta wychodzi z ostatniego.

ze spinem w dół. Ale gdy środkowy filtr rozdzieli wiązkę i z powrotem ją złączy, niczego nie blokując ani nie sprawdzając, atomy wracają do stanu  $|+z\rangle$  i żaden nie wychodzi „w dół”: amplitudy obu dróg interferują. (FLP III-5-3, III-5-5)

**SYMULACJA 1** Trzy filtry Sterna-Gerlacha dla spinu  $\frac{1}{2}$ . Pierwszy (T) przepuszcza stan  $+$ . Ustaw kąty drugiego i trzeciego filtra oraz to, co robi drugi: blokuje jedną wiązkę, łączy obie z powrotem albo łączy je, ale z detektorem drogi. Słupki pokazują, jaka część początkowej wiązki trafia do detektorów.



Filtr S przepuszcza tylko stan  $+S$ . Za nim atom „zapomina”, że był w stanie  $+T$ : prawdopodobieństwa przejść się mnożą. Przy S pod kątem  $90^\circ$  i U równoległym do T połowa atomów, które przeszły przez S, wychodzi z U w stanie  $-$ , choć filtr T zostawił same  $+$ .

Stan na rysunku: filtr T ( $0^\circ$ ) przepuszcza  $+$ , filtr S pod kątem  $90^\circ$  (przepuszcza  $+$ ), filtr U pod kątem  $0^\circ$ ; U+ 12,5%, U- 12,5% początkowej wiązki.

### DZIWNY KĄT POŁÓWKOWY

W amplitudach spinu  $\frac{1}{2}$  występuje  $\theta/2$ , więc obrót o  $360^\circ$  zmienia znak amplitudy:  $\cos 180^\circ = -1$ . Obrót o  $360^\circ$  przywraca wszystkie prawdopodobieństwa, ale jeśli obrócić tylko jedną część stanu i porównać z drugą, różnicę widać. Zmierzono to w interferometrach neutronowych (Rauch i inni, 1975): dopiero obrót o  $720^\circ$  przywraca neutron do stanu wyjściowego. (FLP III-6-3)

- 1 Atom w stanie  $|+z\rangle$  trafia na filtr ustawiony pod kątem  $60^\circ$  do osi  $z$ . Z jakim prawdopodobieństwem wyjdzie wiązka  $+$ ?
- 2 Niespolaryzowana wiązka przechodzi przez filtr T (+), potem S pod kątem  $90^\circ$  (przepuszcza +), potem U pod kątem  $0^\circ$ . Jaka część wiązki wychodzi z U jako +, a jaka jako -?
- 3 Stan  $|\psi\rangle$  ma  $C_+ = 0,6$  i  $C_- = 0,8i$ . Sprawdź normalizację. Jakie jest prawdopodobieństwo wyniku + w filtrze wzdłuż  $x$ ? Wskazówka:  $|+x\rangle$  ma amplitudy  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .
- 4 Dlaczego środkowy filtr, który rozdziela i łączy wiązki, nie zmienia stanu atomu, a ten sam filtr z detektorem drogi zmienia?
- 5 Pokaż, że stany  $|+\theta\rangle = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$  i  $|-\theta\rangle = (-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})$  są ortogonalne i że  $|+180^\circ\rangle$  to  $|-z\rangle$ .

▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣▣ feynmanowskie

## 2 Zmiana w czasie: hamiltonian

Atom w spoczynku w stanie o określonej energii  $E$  ma amplitudę, której faza obraca się w czasie:  $e^{-iEt/\hbar}$ . Prawdopodobieństwa się nie zmieniają, dlatego taki stan nazywa się **stacjonarnym**. To ta sama zależność, co dla fali o częstotliwości  $\omega = E/\hbar$  (dział 17 „Amplitudy prawdopodobieństwa”).

FLP III-7-1

W ogólnym przypadku amplitudy stanów bazowych zmieniają się w czasie, a tempo zmian każdej zależy liniowo od wszystkich. Współczynniki tworzą macierz, **hamiltonian**:

## 🔊 PRAWO · RÓWNANIE RUCHU AMPLITUD

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \sum_j H_{ij} C_j, \quad H_{ji} = H_{ij}^*.$$

Hamiltonian jest hermitowski, co zapewnia, że suma prawdopodobieństw się nie zmienia. Stany stacjonarne to **wektory własne** macierzy  $H$ , a ich energie to **wartości własne** (lekcja 2.3 Wartości i wektory własne). Każdy stan jest superpozycją (kombinacją liniową) stanów stacjonarnych, z których każdy obraca fazę z własną częstotliwością. (FLP III-8-4, III-8-5)

To dokładnie ta sama matematyka, co dla drgań sprzężonych (dział 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe”): dwa wahadła połączone sprężyną mają dwa tryby o różnych częstotliwościach, a energia przelewa się z jednego wahadła do drugiego z częstotliwością dudnień. W mechanice kwantowej częstotliwości trybów to energie podzielone przez  $\hbar$ , a „przelewanie się” dotyczy prawdopodobieństwa.

## ⚠️ PUŁAPKA · „POMIAR DAJE WARTOŚĆ WŁASNĄ”

Pomiar energii daje zawsze jedną z wartości własnych  $H$ , a stan po pomiarze jest odpowiednim wektorem własnym. Nie znaczy to, że przed pomiarem układ „miał” tę wartość. Stan  $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$  zbudowany z dwóch stanów stacjonarnych o różnych energiach nie ma określonej energii; ma za to dobrze określone amplitudy obu wyników.

## 🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Pokaż, że dla stanu stacjonarnego  $C(t) = C(0)e^{-iEt/\hbar}$  prawdopodobieństwo się nie zmienia, a dla sumy dwóch stanów o energiach  $E_1 \neq E_2$  prawdopodobieństwa mogą oscylować. Z jaką częstotliwością?
- 2 Jaką częstotliwość ma obrót fazy amplitudy elektronu o energii 1 eV? A protonu w spoczynku (licząc energię  $mc^2$ )?
- 3 Znajdź wartości i wektory własne macierzy  $H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}$ .
- 4 Dlaczego hamiltonian musi być hermitowski? Pokaż, że z  $H_{ji} = H_{ij}^*$  wynika  $\frac{d}{dt} \sum_i |C_i|^2 = 0$ .

- 5 Hamiltonian ma wartości własne  $E_1$  i  $E_2$ . Układ startuje w stanie  $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ , gdzie  $|1\rangle, |2\rangle$  to stany stacjonarne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po czasie  $t$  jest nadal w tym samym stanie?

▣▣ podstawowe ▣▣ średnie ▣▣ feynmanowskie

### 3 Układ dwustanowy: cząsteczka amoniaku

Cząsteczka  $\text{NH}_3$  to piramida: trzy atomy wodoru w płaszczyźnie i azot nad nią albo pod nią. Te dwie konfiguracje to stany bazowe  $|1\rangle$  i  $|2\rangle$ . Gdyby azot nie mógł przejść przez płaszczyznę wodorów, oba stany miałyby tę samą energię  $E_0$ . Ale istnieje mała amplituda, że azot „przebiegnie” na drugą stronę (efekt tunelowy). Hamiltonian ma więc wyrazy pozadiagonalne  $-A$

: FLP III-8-6

#### WYNIK · UKŁAD DWUSTANOWY

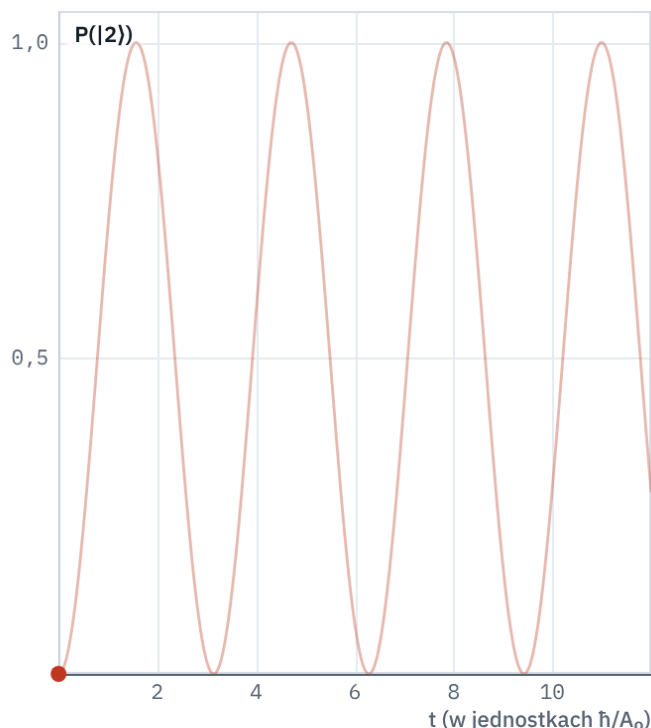
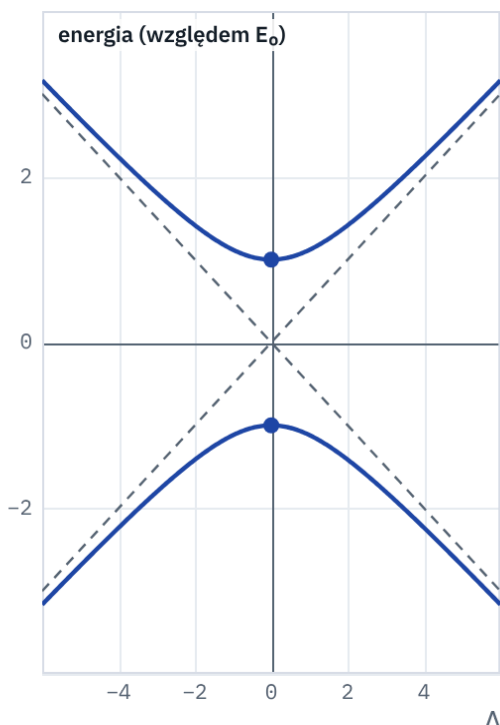
$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix} : \quad E_{\text{I}} = E_0 - A, \quad |\text{I}\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}; \quad E_{\text{II}} = E_0 + A, \quad |\text{II}\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Cząsteczka przygotowana w stanie  $|1\rangle$  przechodzi do  $|2\rangle$  z prawdopodobieństwem  $\sin^2(At/\hbar)$ . W polu elektrycznym  $\mathcal{E}$  stany  $|1\rangle$  i  $|2\rangle$  mają energie  $E_0 \pm \mu\mathcal{E}$  ( $\mu$ : moment dipolowy), a poziomy przechodzą w  $E_0 \pm \sqrt{A^2 + \mu^2\mathcal{E}^2}$ . FLP III-9-2

Dla amoniaku  $2A$  odpowiada częstotliwości 23,87 GHz (długość fali 1,26 cm). Cząsteczki w stanie o wyższej energii można oddzielić niejednorodnym polem elektrycznym, bo w polu ich energia rośnie, a cząsteczek w stanie niższym maleje: siły są przeciwne. Wiązkę samych „górných” cząsteczek wpuszcza się do rezonatora dostrojonego do 23,87 GHz; tam emitują one w sposób wymuszony i wzmacniają mikrofae. Tak zbudowano pierwszy maser (Townes, Gordon i Zeiger, 1954), poprzednika lasera. FLP III-9-3

## SYMULACJA 2

Układ dwustanowy: z lewej poziomy energii w funkcji różnicy energii stanów bazowych (np. w polu elektrycznym), z prawej prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczki w stanie  $|2\rangle$ , gdy startuje w  $|1\rangle$ . Zmieniaj sprzężenie i pole. Energie są w jednostkach  $A_0$  (początkowego  $A$ ), czas w jednostkach  $\hbar/A_0$ .



— poziomy energii  $E(I)$ ,  $E(II)$     - - energie stanów  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  bez sprzężenia    — prawdopodobieństwo stanu  $|2\rangle$

rozszerzenie  $E(II) - E(I)$  2,000

okres przeskoków  $\pi\hbar/\Omega$  3,142

największe  $P(|2\rangle)$  1,000

$P(|2\rangle)$  teraz 0,000

Bez pola stany  $|1\rangle$  (azot nad płaszczyzną wodorów) i  $|2\rangle$  (pod nią) mają tę samą energię, ale sprzężenie  $A$  je miesza: stany stacjonarne to ich suma i różnica, rozszerzone o  $2A$ . Cząsteczka przygotowana w  $|1\rangle$  przeskakuje całkowicie do  $|2\rangle$  i z powrotem.

Stan na rysunku: sprzężenie  $A = 1,00$ ,  $\Delta = 0,0$  (jednostki  $A_0$ ); poziomy  $\pm 1,000$ ; start w  $|1\rangle$ ,  $t = 0,00$ ,  $P(|2\rangle) = 0,000$ .

Ten sam schemat opisuje wiązanie chemiczne. W jonie  $H_2^+$  elektron może być przy protonie 1 albo przy protonie 2, a amplituda przeskoków  $A$  rośnie, gdy protony się zbliżają. Stan symetryczny ma energię niższą o  $A$ ; razem z odpychaniem protonów daje to minimum energii, czyli wiązanie (energia wiązania 2,65 eV, odległość protonów 1,06 Å). W benzenie dwa układy wiązań podwójnych (wzory Kekulégo) to dwa stany bazowe; prawdziwa cząsteczka jest w ich superpozycji, o energii niższej o ok. 1,5 eV, a wszystkie wiązania C-C mają tę samą długość.

FLP III-10-1, III-10-4

- 1 Częstotliwość przejścia amoniaku to 23,87 GHz. Ile wynosi  $A$  w eV? Po jakim czasie cząsteczka przygotowana w stanie  $|1\rangle$  będzie na pewno w  $|2\rangle$ ?  
■ ■ ■
- 2 Moment dipolowy amoniaku to ok.  $4,9 \cdot 10^{-30}$  C·m. Przy jakim polu elektrycznym  $\mu\mathcal{E} = A$ ? Czy łatwo je uzyskać?  
■ ■ ■
- 3 Pokaż, że dla słabego pola  $E_{II} \approx E_0 + A + \mu^2 \mathcal{E}^2 / 2A$ . Jak siła w niejednorodnym polu zależy od stanu cząsteczki?  
■ ■ ■
- 4 Wyprowadź  $P_2(t) = \sin^2(At/\hbar)$  dla  $H$  z tej części, startując od  $C_1 = 1, C_2 = 0$ .  
■ ■ ■
- 5 Dlaczego w cząsteczce amoniaku w stanie stacjonarnym moment dipolowy jest średnio zerowy, choć w stanach bazowych wynosi  $\pm\mu$ ? Jak to się ma do tego, że woda ma trwały moment dipolowy?  
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe   ■ ■ ■ średnie   ■ ■ ■ feynmanowskie

## 4 Spin w polu magnetycznym i rezonans

Elektron ma moment magnetyczny  $\mu \approx \mu_B = e\hbar/2m_e = 9,27 \cdot 10^{-24}$  J/T, skierowany przeciwnie do spinu. W polu  $\vec{B}$  wzdłuż  $z$  stany  $|+z\rangle$  i  $|-z\rangle$  mają energie  $\pm\mu_B B$  (dla elektronu stan ze spinem zgodnym z polem ma energię wyższą, bo moment jest skierowany przeciwnie do spinu; dla protonu odwrotnie): hamiltonian jest diagonalny, a stany bazowe są stacjonarne. Spin skierowany pod kątem do pola to suma obu stanów; ich fazy obracają się z różnymi częstościami, więc kierunek spinu obraca się wokół pola: to **precesja Larmora**, z częstością  $\omega_0 = 2\mu B/\hbar$ .

FLP III-7-5, III-10-7

### WYNIK · SPIN ½ W POLU MAGNETYCZNYM

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu(\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z), \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

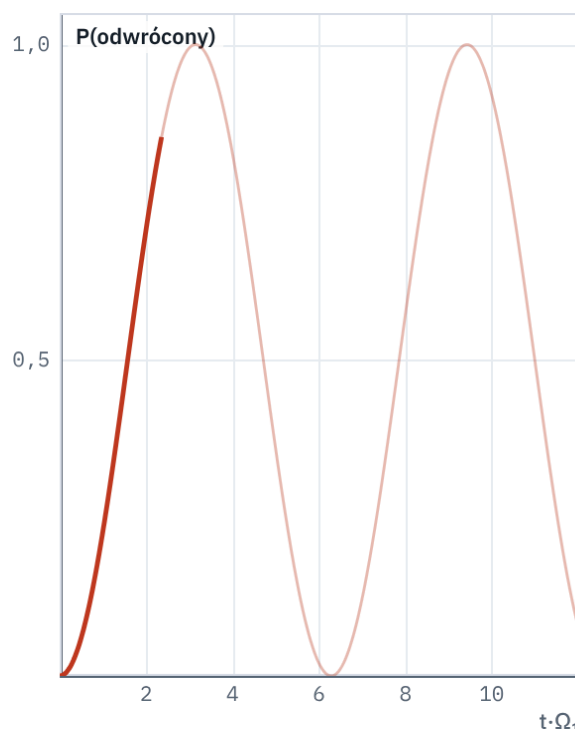
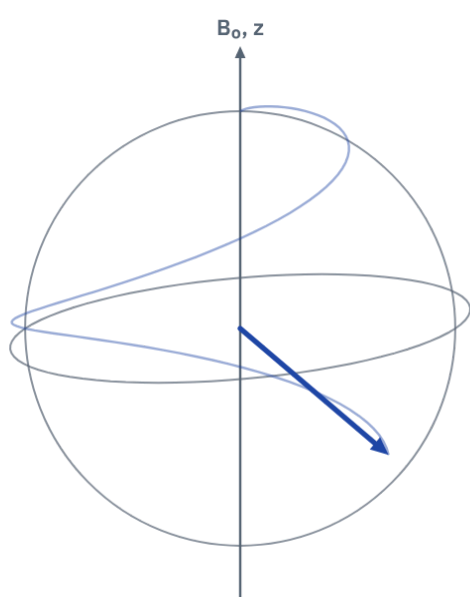
Tu  $\mu$  ma znak: dla elektronu  $\mu \approx -\mu_B$ . Macierze Pauliego razem z macierzą jednostkową wystarczą, by zapisać hamiltonian każdego układu dwustanowego. Częstotliwość precesji w polu 1 T: elektron 28,0 GHz/T, proton 42,58 MHz/T.

FLP III-11-1

Jeśli do stałego pola  $B_0$  dodać słabe pole  $B_1$  wirujące wokół  $z$  dokładnie z częstością  $\omega_0$ , w układzie wirującym razem z nim spin widzi pole stałe, prostopadłe do  $z$ , i powoli obraca się z „w

górną” do „w dół” i z powrotem (oscylacje Rabiego). Poza rezonansem obrót jest niepełny. To **rezonans magnetyczny**: jądrowy (NMR, tomografia MRI) dla protonów, elektronowy (ESR) dla niesparowanych elektronów. Częstość rezonansu zależy od pola, które czuje jądro, a to zależy od otaczających je elektronów; dlatego NMR rozpoznaje związki chemiczne, a tomograf, dodając gradient pola, ustala, z którego miejsca ciała przychodzi sygnał. (FLP II-35-3, II-35-6)

**SYMULACJA 3** Spin  $\frac{1}{2}$  w polu  $B_0$  z dodatkowym wirującym polem  $B_1$ : kierunek spinu na sferze Blocha (w laboratorium, z precesją wokół  $z$ ) i prawdopodobieństwo odwrócenia spinu w czasie. Zmień odstrojenie częstości pola  $B_1$  od częstości Larmora. Precesja w laboratorium jest pokazana bardzo spowolniona; w rzeczywistości  $\omega_0$  jest dziesiątki, a nawet setki tysięcy razy większa od  $\Omega_1$ .



— kierunek spinu (sfera Blocha) — prawdopodobieństwo odwrócenia spinu — pole  $B_0$  wzdłuż osi  $z$

P(odwrócony) teraz 0,854

największe P 1,000

składowa  $z$  spinu -0,707

Rezonans: pole  $B_1$  wiruje z częstością precesji Larmora i w układzie wirującym działa jak stałe pole poprzeczne. Spin powoli przechodzi z „w górę” do „w dół” i z powrotem (oscylacje Rabiego), a w laboratorium kreśli przy tym spiralę po sferze. Impuls o czasie  $\pi\hbar/2\mu B_1$  (impuls  $\pi$ ) odwraca spin całkowicie.

Stan na rysunku: spin  $\frac{1}{2}$  w polu  $B_0$  z wirującym polem  $B_1$ , odstrojenie  $(\omega - \omega_0)/\Omega_1 = 0,0$ ,  $t \cdot \Omega_1 = 2,36$ ; prawdopodobieństwo odwrócenia 0,854 (największe 1,000).

- 1 Jaka jest częstotliwość rezonansu protonów w tomografach 1,5 T i 3 T? A elektronów w polu 0,35 T?
- 2 Jaka część protonów w wodzie w polu 3 T i temperaturze 310 K jest „nadmiarowo” ustawiona zgodnie z polem? Ile to protonów w 1 cm<sup>3</sup> wody?
- 3 Magnetometr protonowy mierzy częstotliwość precesji protonów w polu Ziemi (50 μT). Ile ona wynosi? Jaką dokładność pola daje pomiar częstotliwości z dokładnością 0,01 Hz?
- 4 Wirujące pole  $B_1 = 10 \mu\text{T}$  działa na protony w rezonansie. Jak długi musi być impuls, żeby odwrócić spiny (impuls  $\pi$ )?
- 5 Sprawdź, że  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$  i  $\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$ . Jakie wartości własne ma każda z nich i co to mówi o pomiarze spinu wzdłuż dowolnej osi?

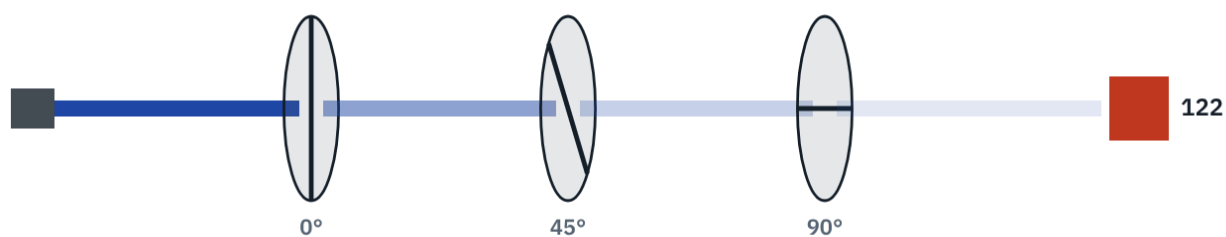
▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣▣ feynmanowskie

## 5 Polaryzacja fotonu i kubity

Foton też jest układem dwustanowym: stany bazowe to polaryzacja pozioma  $|x\rangle$  i pionowa  $|y\rangle$ . Foton spolaryzowany pod kątem  $\alpha$  to  $\cos \alpha |x\rangle + \sin \alpha |y\rangle$ , a polaryzacja kołowa to  $(|x\rangle \pm i|y\rangle)/\sqrt{2}$ . Polaryzator ustawiony pod kątem  $\beta$  przepuszcza foton z amplitudą  $\cos(\alpha - \beta)$ , czyli z prawdopodobieństwem  $\cos^2(\alpha - \beta)$ ; dla wiązki to prawo Malusa. Kąt nie jest tu połówkowy, bo foton ma spin 1 (z dwoma stanami polaryzacji). FLP III-11-4

Ze skrzyżowanych polaryzatorów (0° i 90°) nie wychodzi nic. Gdy wstawić między nie trzeci, pod kątem 45°, przechodzi 1/8 światła niespolaryzowanego. Polaryzator nie odsiewa więc fotonów o z góry ustalonych własnościach; każdy pomiar przygotowuje nowy stan. Dowolny układ dwustanowy wykorzystywany do zapisu informacji to **kubit**. Pojedynczego nieznanego kubit nie da się ani dokładnie zmierzyć, ani skopiować; na tym opiera się kryptografia kwantowa (protokół BB84, Bennett i Brassard, 1984): podsłuchujący, który mierzy fotony, nieuchronnie zmienia część z nich i zdradza swoją obecność.

**SYMULACJA 4** Fotony światła niespolaryzowanego przechodzą przez dwa lub trzy polaryzatory. Ustaw kąty, wstaw lub usuń środkowy polaryzator i wysyłaj fotony pojedynczo: każdy przechodzi albo nie, a częstość przejść zbliża się do prawdopodobieństwa. Kąt  $0^\circ$  to na rysunku kierunek pionowy.



— natężenie wiązki — kierunek przepuszczania polaryzatora — fotony w detektorze

prawdopodobieństwo przejścia (teoria) 12,50%

wysłane fotony 1 000

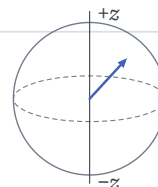
dotarło do detektora 122 (12,20%)

Wstawienie trzeciego polaryzatora między skrzyżowane sprawia, że część fotonów przechodzi. Polaryzator nie „odsiewa” fotonów o gotowych własnościach: każdy pomiar przygotowuje nowy stan, a amplituda przejścia ze stanu pod kątem  $\alpha$  do stanu pod kątem  $\beta$  to  $\cos(\alpha - \beta)$ .

Stan na rysunku: polaryzatory pod kątami  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ; prawdopodobieństwo przejścia fotonu ze światła niespolaryzowanego 12,50%; wysłano 1000, dotarło 122.

## ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 30 min



- 1 Światło niespolaryzowane przechodzi przez polaryzatory pod kątami  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  i  $90^\circ$ . Jaka część przechodzi?

- 2 Między skrzyżowane polaryzatory wstawiamy  $N - 1$  polaryzatorów, każdy obrócony o  $90^\circ / N$  względem poprzedniego. Jaka część spolaryzowanej wiązki przejdzie dla  $N = 10$ ? Do czego dąży wynik dla  $N \rightarrow \infty$ ?

3 Foton o polaryzacji kołowej trafia na polaryzator liniowy pod dowolnym kątem. Z jakim prawdopodobieństwem przejdzie?

4 W protokole BB84 nadawca wysyła fotony spolaryzowane pod kątem  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  albo  $135^\circ$ . Pod słuchujący mierzy każdy foton w losowo wybranej bazie ( $0^\circ/90^\circ$  albo  $45^\circ/135^\circ$ ) i wysyła dalej foton w stanie, który zmierzył. Jaki odsetek błędów wywoła w bitach, w których nadawca i odbiorca użyli tej samej bazy?

5 Dlaczego nie da się zbudować „kopiarki” nieznanego stanu kwantowego, która zamienia  $|\psi\rangle|0\rangle$  na  $|\psi\rangle|\psi\rangle$  dla każdego  $|\psi\rangle$ ? Wskazówka: liniowość.

▮▮▮ podstawowe   ▮▮▮ średnie   ▮▮▮ feynmanowskie

### ☰ METODA DLA UKŁADÓW KILKUSTANOWYCH

1. **Wybierz bazę:** stany, które łatwo opisać (konfiguracje, kierunki spinu, polaryzacje).
2. **Zapisz hamiltonian:** energie stanów bazowych na przekątnej, amplitudy przeskoków poza nią; sprawdź hermitowskość.
3. **Znajdź wartości i wektory własne:** to poziomy energii i stany stacjonarne.
4. **Ewolucja:** rozłóż stan początkowy na stany stacjonarne, każdemu dopisz fazę  $e^{-iE_k t/\hbar}$ , złóż z powrotem.
5. **Pomiar:** prawdopodobieństwo to kwadrat modułu rzutu stanu na stan wyniku.
6. **Sprawdzenie:** suma prawdopodobieństw równa 1; częstości przejść to różnice energii przez  $\hbar$ .

#### Przykład 18.1

### Ile rozsunęły się plamki Sterna-Gerlacha

Atomy srebra (masa 108 u) lecą z prędkością 550 m/s przez magnes o długości 3,5 cm z gradientem pola 1000 T/m (10 T/cm). Moment magnetyczny  $\mu_B$ . O ile odchyłą się wiązki?

- 1 Siła  $F = \mu_B dB/dz \approx 9,3 \cdot 10^{-21}$  N; przyspieszenie  $F/m \approx 5,2 \cdot 10^4$  m/s<sup>2</sup>.
- 2 Czas przelotu  $L/v \approx 64$  μs; odchylenie  $\frac{1}{2}at^2 \approx 0,1$  mm w każdą stronę.

**Wynik:** ok. 0,2 mm między plamkami, tyle co w oryginalnym doświadczeniu. Mały efekt, dlatego wiązkę trzeba było starannie kolimować.

**Sprawdzenie:** po wyjściu z magnesu wiązki nadal się rozbiegają, więc na odległej płycie rozsuniecie jest większe niż w samym magnecie ✓.

### Przykład 18.2

## Amoniak w polu elektrycznym

Amoniak:  $2A = h \cdot 23,87 \text{ GHz}$ ,  $\mu = 4,9 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$ . O ile zmienia się energia stanu II w polu  $100 \text{ kV/m}$ ? Porównaj z energią  $k_B T$  w temperaturze pokojowej.

- 1  $A \approx 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ eV} = 7,9 \cdot 10^{-24} \text{ J}$ ;  $\mu\mathcal{E} = 4,9 \cdot 10^{-25} \text{ J}$ , czyli  $\mu\mathcal{E}/A \approx 0,06$ : pole słabe.
- 2  $\Delta E \approx \mu^2 \mathcal{E}^2 / 2A \approx 1,5 \cdot 10^{-26} \text{ J} \approx 10^{-7} \text{ eV}$ .
- 3  $k_B T \approx 0,026 \text{ eV}$ , ponad  $10^5$  razy więcej.

**Wynik:** ok.  $10^{-7} \text{ eV}$ . Siła w niejednorodnym polu jest mała, ale działa na cząsteczki lecące w wiązce w jednym kierunku i wystarcza, by je rozdzielić.

**Sprawdzenie:** separatory maserów miały pola rzędu kilkudziesięciu  $\text{kV/cm}$ , a cząsteczki leciały przez nie przez ułamki milisekundy ✓.

### Przykład 18.3

## Tomograf rezonansu magnetycznego

Tomograf ma pole  $3 \text{ T}$  i gradient  $40 \text{ mT/m}$ . Jaka jest częstotliwość rezonansu protonów w środku? O ile zmienia się na każdy milimetr wzdłuż gradientu?

- 1  $f_0 = 42,58 \text{ MHz/T} \cdot 3 \text{ T} \approx 127,7 \text{ MHz}$ .
- 2 Na milimetrze pole zmienia się o  $40 \mu\text{T}$ , częstotliwość o  $42,58 \cdot 40 \approx 1700 \text{ Hz}$ .

**Wynik:**  $127,7 \text{ MHz}$  i  $1,7 \text{ kHz}$  na milimetr. Analizując widmo sygnału (transformata Fouriera), tomograf ustala, z którego miejsca pochodzi każda składowa.

**Sprawdzenie:** rozdzielczość rzędu milimetra wymaga rozróżniania częstotliwości z dokładnością do  $\text{kHz}$  przy  $128 \text{ MHz}$ , ok.  $10^{-5}$  względnie: osiągalne ✓.

#### Przykład 18.4

### Zegar cezowy i definicja sekundy

Sekunda to 9 192 631 770 okresów promieniowania przejścia między dwoma poziomami nadsubtelnyymi stanu podstawowego atomu cezu-133. Ile wynosi różnica energii? Dlaczego zegar fontannowy, w którym atomy są badane przez ok. 1 s, osiąga względną dokładność ok.  $10^{-16}$ ?

- 1  $\Delta E = hf \approx 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$  (długość fali 3,26 cm).
- 2 Czas obserwacji 1 s daje szerokość linii ok. 1 Hz, względnie  $10^{-10}$ . Środek linii wyznacza się z dokładnością milionowych części jej szerokości, uśredniając wiele pomiarów.

**Wynik:**  $3,8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$ . Układ dwustanowy o bardzo dobrze określonej różnicy energii to idealny wzorzec częstotliwości.

**Sprawdzenie:**  $\Delta f \cdot \Delta t \approx 1$  (dział 6, zasada nieoznaczoności z działu 17) ✓.

#### Przykład 18.5

### Obrót polaryzacji bez strat

Spolaryzowane światło przechodzi przez 10 polaryzatorów, każdy obrocony o  $9^\circ$  względem poprzedniego, łącznie o  $90^\circ$ . Jaka część przechodzi? Porównaj z jednym polaryzatorem obroconym od razu o  $90^\circ$ .

- 1 Każdy krok:  $\cos^2 9^\circ \approx 0,9755$ ; dziesięć kroków:  $0,9755^{10} \approx 0,78$ .
- 2 Jeden polaryzator pod kątem  $90^\circ$ : zero.

**Wynik:** 78%. Częste pomiary „prowadzą” stan; gdy kroków jest bardzo wiele, przechodzi prawie wszystko.

**Sprawdzenie:** dla małych kątów  $\cos^{2N}(\pi/2N) \approx 1 - \pi^2/4N$ ; dla  $N = 10$ : 0,75, blisko dokładnego 0,78 ✓.

## Linia 21 cm

W atomie wodoru spiny elektronu i protonu mogą być zgodne albo przeciwne; różnica energii odpowiada częstotliwości 1420,4 MHz. Ile wynosi ta energia i długość fali? Stan zgodny żyje średnio ok. 11 milionów lat. Jak w ogóle można tę linię obserwować?

- 1  $\Delta E = hf \approx 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$ ,  $\lambda = c/f \approx 21,1 \text{ cm}$ .
- 2 W galaktyce jest ok.  $10^{66}$ – $10^{67}$  atomów wodoru międzygwiazdowego; zderzenia utrzymują około 3/4 z nich w stanie zgodnym. Nawet przy ogromnym czasie życia sygnał jest silny.

**Wynik:** 21 cm. Z przesunięć dopplerowskich tej linii odtworzono ramiona spiralne Drogi Mlecznej i krzywe rotacji galaktyk.

**Sprawdzenie:**  $hf/k_B \approx 0,07 \text{ K}$ , mniej niż temperatura gazu, więc stan zgodny (trzykrotnie zdegenerowany) jest obsadzony w 3/4 ✓. FLP III-12-3

## 7

## Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

### × „Spin to elektron kręcący się jak bąk.”

Spin jest momentem pędu i ma moment magnetyczny, ale nie da się go opisać obrotem kulki: elektron, który według doświadczeń jest mniejszy niż ok.  $10^{-18} \text{ m}$ , musiałby wirować z prędkością powierzchni większą od prędkości światła, a pomiar zawsze daje tylko  $\pm \hbar/2$ .

### × „Filtr Sterna-Gerlacha tylko odczytuje kierunek spinu, który atom już miał.”

Atom za filtrem  $x$  nie pamięta, że był  $+z$ : kolejny filtr  $z$  daje oba wyniki. Pomiar przygotowuje stan.

### × „Superpozycja to po prostu nasza niewiedza.”

Mieszanie i superpozycję odróżnia doświadczenie: superpozycja  $(|+z\rangle + |-z\rangle)/\sqrt{2}$  to stan  $|+x\rangle$ , który filtr  $x$  przepuszcza zawsze, a mieszanina tylko w połowie przypadków.

× „W stanie stacjonarnym nic się nie dzieje.”

Fazy amplitud obracają się, tylko prawdopodobieństwa stoją. Gdy złożyć dwa stany stacjonarne, pojawiają się dudnienia, z których mierzymy różnice energii.

× „Trzeci polaryzator nie może zwiększyć ilości przepuszczanego światła.”

Między skrzyżowanymi polaryzatorami zwiększa ją od zera do  $1/8$ .

× „Kubit przechowuje nieskończenie wiele informacji, bo amplitudy są ciągłe.”

Z jednego pomiaru odczytujemy tylko jeden bit, a pomiar niszczy superpozycję. Moc obliczeń kwantowych bierze się z interferencji amplitud wielu kubitów, a nie z „pojemności” jednego.

## 8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

### ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

- 1 **Spin 1 w filtrach.** Atomy o spinie 1 mają trzy stany wzdłuż każdej osi:  $+$ ,  $0$ ,  $-$ . Za filtrem  $T$  przepuszczającym  $+$  stoi filtr  $S$  obrócony o  $90^\circ$ . Amplitudy przejść to  $\frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$  i  $\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ . Jakie są prawdopodobieństwa trzech wyników?
- 2 **Neutron obrócony o  $360^\circ$ .** W interferometrze neutronowym wiązka jest dzielona na dwie, jedna przechodzi przez pole magnetyczne, które obraca spin o kąt  $\alpha$ , potem wiązki się łączą. Jak natężenie na wyjściu zależy od  $\alpha$ ? Co się dzieje przy  $360^\circ$ ?
- 3 **Maser.** Wyjaśnij, dlaczego do działania masera trzeba oddzielić cząsteczki w stanie II od cząsteczek w stanie I. Co by się stało z wiązką w równowadze termicznej w temperaturze pokojowej?
- 4 **Benzen.** Traktując dwa wzory Kekulégo jako stany bazowe o energii  $E_0$  ze sprzężeniem  $A$ , wyjaśnij, dlaczego benzen jest trwalszy, niż wynikałoby z sumy energii jego wiązań, i dlaczego wszystkie jego wiązania C-C mają tę samą długość.

- 5 **Wiązanie chemiczne.** W jonie  $\text{H}_2^+$  amplituda przeskoku elektronu  $A(R)$  maleje z odległością protonów mniej więcej wykładniczo, a odpychanie protonów rośnie przy zbliżaniu jak  $1/R$ . Narysuj jakościowo energię stanu symetrycznego i antysymetrycznego w funkcji  $R$ . Który stan wiąże?
- 6 **Zegar w polu magnetycznym.** Dlaczego zegar cezowy wykorzystuje przejście między stanami o rzucie całkowitego momentu pędu  $m_F = 0$ , a nie np.  $m_F = 1$ ? Wskazówka: jak energie tych stanów zależą od słabego pola magnetycznego?
- 7 **Kwantowy efekt Zenona.** Atom startuje w stanie  $|1\rangle$  i bez przeszkód przeszedłby do  $|2\rangle$  po czasie  $T$  ( $P_2 = \sin^2(\pi t/2T)$ ). Co się stanie, jeśli co  $T/N$  sprawdzamy, w którym stanie jest atom? Jaka jest szansa, że po czasie  $T$  wciąż będzie w  $|1\rangle$ ?
- 8 **Kubit fotonowy w światłowodzie.** Kryptografia kwantowa na odległość 100 km światłowodu, który tłumi 0,2 dB/km. Jaka część fotonów dociera? Dlaczego nie można po prostu wzmocnić sygnału jak w zwykłej telekomunikacji?

▯▯▯ podstawowe   ▯▯▯ średnie   ▯▯▯ feynmanowskie

## 9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Co pokazało doświadczenie Sterna-Gerlacha?**  
Że rzut momentu magnetycznego (spinu) atomu na dowolną oś przyjmuje tylko dwie wartości.
- 2 **Jak opisać stan układu o dwóch stanach bazowych?**  
Dwiema zespolonymi amplitudami  $C_1, C_2$  z  $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$ : wektorem.
- 3 **Jakie amplitudy ma stan spinu  $\frac{1}{2}$  skierowany pod kątem  $\theta$  do osi  $z$  w płaszczyźnie  $xz$ ?**  
 $\cos \frac{\theta}{2}$  dla  $+z$  i  $\sin \frac{\theta}{2}$  dla  $-z$ .
- 4 **Czym są stany stacjonarne i dozwolone energie w języku hamiltonianu?**  
Wektorami i wartościami własnymi macierzy  $H$ .

5 Jakie poziomy energii ma układ dwustanowy z  $H_{11} = H_{22} = E_0$  i  $H_{12} = -A$ ?  
 $E_0 \mp A$ , dla stanów  $(|1\rangle \pm |2\rangle)/\sqrt{2}$ .

6 Z jaką częstotliwością wykonuje precesję spin protonu w polu 1 T?  
42,58 MHz.

7 Co to jest rezonans magnetyczny?  
Odwracanie spinów przez słabe pole wirujące z częstością precesji Larmora; poza rezonansem odwrócenie jest niepełne.

8 Dlaczego trzeci polaryzator między skrzyżowanymi przepuszcza światło?  
Każdy polaryzator przygotowuje nowy stan; amplitudy przejść  $\cos 45^\circ$  i  $\cos 45^\circ$  dają łącznie  $\frac{1}{4}$  światła spolaryzowanego,  $\frac{1}{8}$  niespolaryzowanego.

## STANY I EWOLUCJA

$$\langle \chi | \psi \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | \psi \rangle; \quad \sum |C_i|^2 = 1;$$

$$\langle \psi | \chi \rangle = \langle \chi | \psi \rangle^*$$

$$i\hbar \dot{C}_i = \sum_j H_{ij} C_j; \quad \text{stan stacjonarny } e^{-iEt/\hbar};$$

$E$  to wartości własne  $H$

spin  $\frac{1}{2}$ :  $\langle \pm z | +\theta \rangle = \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}$ ; obrót o  $360^\circ$  zmienia znak

## UKŁADY DWUSTANOWE

$$E_0 \mp A; \quad P_{1 \rightarrow 2} = \sin^2(At/\hbar); \quad \text{w polu } E_0 \pm \sqrt{A^2 + \mu^2 \mathcal{E}^2}$$

spin w polu:  $\Delta E = 2\mu B$ ,  $\omega_0 = 2\mu B/\hbar$ ;  
proton 42,58 MHz/T, elektron 28,0 GHz/T

rezonans:  $P_{\max} = \Omega_1^2 / (\Omega_1^2 + \delta^2)$ ; foton:  
amplituda  $\cos(\alpha - \beta)$

## Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. III, rozdz. 5 (spin 1 i filtry), 6 (spin  $\frac{1}{2}$ ), 8 (macierz hamiltonianu), 9 (maser amoniakalny).
- **Dla chętnych:** t. III, rozdz. 7 (zależność amplitud od czasu), 10 i 11 (inne układy dwustanowe, macierze Pauliego, polaryzacja fotonu), 12 (struktura nadsubtelna wodoru).

Następny dział: **Atom wodoru i układ okresowy**. Zamiast dwóch stanów bazowych będzie ich nieskończenie wiele: każdy punkt przestrzeni. Macierz hamiltonianu stanie się operatorem różniczkowym, a równanie ruchu amplitud równaniem Schrödingera; jego wartości własne poziomami energii wodoru, a kształty funkcji własnych orbitalami s, p, d, z których zakaz Pauliego zbuduje układ okresowy.



# Odpowiedzi

## Zadania • część 1

1.  $\cos^2 30^\circ = 3/4$ .
2.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  jako + i tyle samo jako -.
3.  $0,36 + 0,64 = 1$ .  $\langle +x|\psi \rangle = (0,6 + 0,8i)/\sqrt{2}$ ,  $|\cdot|^2 = (0,36 + 0,64)/2 = 1/2$ .
4. Bez detektora obie drogi są nierozróżnialne: amplitudy  $\langle -z|+x \rangle \langle +x|+z \rangle + \langle -z|-x \rangle \langle -x|+z \rangle = \langle -z|+z \rangle = 0$ . Z detektorem dodaje się prawdopodobieństwa:  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ .
5. Iloczyn:  $-\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0$ . Dla  $\theta = 180^\circ$ :  $(0, 1)$ , czyli  $|-z\rangle$ : spin „w górę” wzdłuż osi odwróconej to spin „w dół” wzdłuż  $z$ .

## Zadania • część 2

1.  $|e^{-iEt/\hbar}|^2 = 1$ . Dla sumy w wyrazach mieszanych pojawia się  $e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}$ : oscylacje z częstością  $(E_1 - E_2)/\hbar$ , jak dudnienia.
2.  $E/\hbar \approx 2,4 \cdot 10^{14}$  Hz;  $938 \text{ MeV}/\hbar \approx 2,3 \cdot 10^{23}$  Hz. Stała część energii nie ma znaczenia: zmienia fazy wszystkich amplitud jednakowo.
3.  $E_0 - A$  dla  $(1, 1)/\sqrt{2}$  i  $E_0 + A$  dla  $(1, -1)/\sqrt{2}$ .
4.  $\frac{d}{dt} \sum |C_i|^2 = \sum (\dot{C}_i^* C_i + C_i^* \dot{C}_i) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{ij} (C_i^* H_{ij} C_j - C_j^* H_{ij}^* C_i) = 0$ , bo po zamianie wskaźników drugi składnik równa się pierwszemu.
5. Amplituda:  $\frac{1}{2}(e^{-iE_1 t/\hbar} + e^{-iE_2 t/\hbar})$ , prawdopodobieństwo  $\cos^2[(E_1 - E_2)t/2\hbar]$ .

## Zadania • część 3

1.  $2A = hf \approx 9,9 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$ ,  $A \approx 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$ .  $At/\hbar = \pi/2$ :  $t = \pi\hbar/2A = 1/(2f) \approx 21 \text{ ps}$ .
2.  $\mathcal{E} = A/\mu \approx 1,6 \text{ MV/m}$ , ok. połowy pola przebicia powietrza; w próżni da się je uzyskać. W słabszych polach energia zależy od pola kwadratowo:  $\pm \mu^2 \mathcal{E}^2 / 2A$ .
3.  $\sqrt{A^2 + x^2} \approx A + x^2/2A$ . Siła  $-\nabla E$ : dla stanu II  $-\frac{\mu^2}{2A} \nabla \mathcal{E}^2$ , w stronę słabszego pola; dla stanu I przeciwnie. Tak działa separator w maserze.
4. Rozłóż na stany stacjonarne:  $|1\rangle = (|I\rangle + |II\rangle)/\sqrt{2}$ . Po czasie  $t$ :  $C_2 = \frac{1}{2}e^{-iE_0 t/\hbar}(e^{iAt/\hbar} - e^{-iAt/\hbar}) = ie^{-iE_0 t/\hbar} \sin(At/\hbar)$ .
5. W  $|I\rangle$  i  $|II\rangle$  obie konfiguracje mają po  $1/2$  prawdopodobieństwa, a ich momenty się znoszą. Dopiero pole silne w porównaniu z  $A/\mu$  „wybiera” jedną konfigurację. Częsteczką wody jest płaska: jej „odwrócona” wersja to ta sama częsteczką obrócona o  $180^\circ$ , więc nie ma dwóch różnych konfiguracji, między którymi zachodziłoby tunelowanie. „Trwały” moment wody (1,85 D), podobnie jak 1,47 D amoniaku, to moment w układzie związanym z częsteczką.

## Zadania • część 4

1. 63,9 MHz i 127,7 MHz (fale radiowe UKF). Elektrony: ok. 9,8 GHz (mikrofale, typowe spektrometry ESR).

2.  $\Delta E/k_B T = hf/k_B T \approx 2 \cdot 10^{-5}$ , nadwyżka ok.  $10^{-5}$  (10 ppm). W  $1 \text{ cm}^3$  jest  $6,7 \cdot 10^{22}$  protonów, nadwyżka ok.  $7 \cdot 10^{17}$ : wystarczająco, by zmierzyć sygnał.
3.  $f = 42,58 \text{ MHz/T} \cdot 50 \text{ } \mu\text{T} \approx 2,13 \text{ kHz}$ .  $0,01/42,58 \cdot 10^6 \approx 0,2 \text{ nT}$ , czyli ok. 5 części na milion pola Ziemi; tak szuka się podziemnych struktur i zatopionych wraków.
4. Częstotliwość Rabiego  $f_R = 42,58 \text{ MHz/T} \cdot 10 \text{ } \mu\text{T} \approx 426 \text{ Hz}$ ; impuls  $\pi$  trwa połowę okresu: ok. 1,2 ms.
5. Bezpośrednie mnożenie. Wartości własne  $\pm 1$  dla każdej, więc pomiar składowej spinu wzdłuż dowolnej osi daje  $\pm \hbar/2$ , jak w doświadczeniu Sterna-Gerlacha.

## Zadania · część 5

1.  $\frac{1}{2} \cos^2 30^\circ \cos^2 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 3/32 \approx 9,4\%$ .
2.  $(\cos^2 9^\circ)^{10} \approx 0,78$ . Dla dużego  $N$ :  $(\cos^2 \frac{\pi}{2N})^N \approx (1 - \frac{\pi^2}{4N^2})^N \approx 1 - \frac{\pi^2}{4N} \rightarrow 1$ ; polaryzację można obrócić o  $90^\circ$  prawie bez strat, gdy kroki są małe (to ten sam mechanizm co w kwantowym efekcie Zenona).
3.  $|\cos \beta + i \sin \beta|^2/2 = 1/2$ , niezależnie od kąta.
4. W połowie przypadków podsłuchujący trafia w dobrą bazę i nic nie psuje. W drugiej połowie wysyła foton w złej bazie, a odbiorca dostaje błędny bit z prawdopodobieństwem  $1/2$ . Razem 25% błędów, łatwych do wykrycia przez porównanie części bitów.
5. Gdyby kopiowała  $|x\rangle$  i  $|y\rangle$ , to z liniowości dla  $(|x\rangle + |y\rangle)/\sqrt{2}$  dałaby  $(|x\rangle|x\rangle + |y\rangle|y\rangle)/\sqrt{2}$ , a nie iloczyn dwóch kopii  $(|x\rangle + |y\rangle)(|x\rangle + |y\rangle)/2$ . Sprzeczność (twierdzenie o zakazie klonowania, Wootters, Żurek, Dieks, 1982).

## Zadania feynmanowskie

1. Dla  $\theta = 90^\circ$ :  $(1/2)^2 = 1/4$ ,  $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$ ,  $(1/2)^2 = 1/4$ . Suma 1.  
2. Inaczej niż dla spinu  $1/2$ , gdzie przy  $90^\circ$  wychodzi po  $1/2$ : liczba stanów i postać amplitud zależą od spinu.  
FLP III-5-7
1. Obrócona część dostaje czynnik  $\cos(\alpha/2)$  (oraz wyraz z odwróconym spinem). Natężenie interferencji zmienia się jak  $1 + \cos(\alpha/2)$  (dla wyjścia, w którym obie wiązki są zgodne).  
2. Przy  $\alpha = 360^\circ$  amplituda zmienia znak, natężenie spada do minimum; pełny okres to  $720^\circ$ . Rauch i współpracownicy (1975) zmierzili okres ok.  $704^\circ \pm 38^\circ$ .
1. Promieniowanie o częstotliwości rezonansowej wymusza przejścia w obie strony z tym samym prawdopodobieństwem:  $\text{II} \rightarrow \text{I}$  (emisja) i  $\text{I} \rightarrow \text{II}$  (absorpcja). Wzmocnienie wymaga przewagi stanu II.  
2. W równowadze termicznej  $2A/k_B T \approx 0,004$ : stanu I jest o ok. 0,4% więcej niż stanu II (nadwyżka to ok. 0,2% wszystkich cząsteczek), więc wiązka by pochłaniała. Separator elektryczny daje inwersję obsadzeń.  
FLP III-9-4
1. Stan podstawowy to  $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$  o energii  $E_0 - A$ : niższej niż energia każdego wzoru Kekulégo. Ta „energia rezonansu” wynosi ok. 1,5 eV (ok. 36 kcal/mol).  
2. W superpozycji każde wiązanie jest w połowie przypadków pojedyncze, w połowie podwójne: długość 1,40 Å, pośrednia między 1,54 Å i 1,34 Å. FLP III-10-4
1.  $E_\pm(R) = E_0 \mp A(R) + e^2/4\pi\epsilon_0 R$ . Dla stanu symetrycznego ( $-A$ ) przy średnich  $R$  obniżenie energii wygrywa z odpychaniem: jest minimum (1,06 Å, 2,65 eV poniżej H + p).  
2. Stan antysymetryczny ma energię wyższą od rozdzielonych składników przy każdym  $R$ : nie wiąże. To cała idea orbitali wiążących i antywiązących. FLP III-10-1

6. 1. Stany  $m_F = 0$  mają energię zależną od pola dopiero w drugim rzędzie (kwadratowo), a  $m_F \neq 0$  liniowo, jak spin w polu z części 4.
2. Przejście  $0 \rightarrow 0$  jest więc najmniej czułe na resztkowe pola magnetyczne, a zegar stosuje dodatkowo słabe pole tylko po to, by oddzielić to przejście od innych.
7. 1. Po każdym krótkim odcinku  $P_1 = \cos^2(\pi/2N) \approx 1 - \pi^2/4N^2$ , a pomiar „zeruje” stan do  $|1\rangle$ .
2. Po  $N$  pomiarach  $P_1 \approx (1 - \pi^2/4N^2)^N \rightarrow 1$  dla dużego  $N$ : częste pomiary zamrażają ewolucję. Itano i współpracownicy (1990) pokazali to na jonach berylu.
8. 1. Tłumienie 20 dB: dociera 1% fotonów.
2. Wzmacniacz musiałby skopiować nieznany stan polaryzacji, a tego zabrania twierdzenie o zakazie klonowania. Na duże odległości potrzebne są przekaźniki kwantowe albo łącza satelitarne (np. satelita Micius, 2017).

---

Fizyka · Dział 18: Stany kwantowe, układy dwustanowe i spin · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. III (Addison-Wesley 1965; New Millennium Edition 2011), rozdz. 5–12; t. II, rozdz. 35. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.