

Amplitudy prawdopodobieństwa

Światło dociera do detektora w porcjach, a elektrony tworzą prążki interferencyjne. Ani obraz cząstki, ani obraz fali nie wystarcza. Mechanika kwantowa zastępuje tory regułą: każdemu sposobowi, w jaki coś może się zdarzyć, odpowiada liczba zespolona, amplituda; amplitudy nierozróżnialnych dróg się dodaje, a prawdopodobieństwo to kwadrat modułu sumy. Z tej reguły wynikają zasada nieoznaczoności, rozmiar atomów i różnica między bozonami a fermionami.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
III, rozdz. 1–4

W TYM DZIALE

- 0 Prolog: jedyna tajemnica
- 1 Fotony i fale materii
- 2 Doświadczenie z dwiema szczelinami
- 3 Reguły rachunku amplitud
- 4 Zasada nieoznaczoności
- 5 Cząstki identyczne: bozony i fermiony
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: jedyna tajemnica

Feynman zaczyna trzeci tom od doświadczenia, które, jak pisze, „jest niemożliwe, absolutnie niemożliwe do wyjaśnienia w jakimkolwiek klasyczny sposób i zawiera w sobie sedno mechaniki kwantowej”. Elektrony z działu elektronowego lecą na przesłonę z dwiema szczelinami, a za nią na ekran, który rejestruje pojedyncze trafienia. Każdy elektron przychodzi w całości, w jednym punkcie, jak kulka. A jednak po tysiącach trafień układają się one w prążki, jak fala, która przeszła przez obie szczeliny naraz i zinterferowała sama ze sobą. FLP III-1-1

Feynman (1963) przedstawiał je jako doświadczenie myślowe, nie wiedząc, że Jönsson (1961) wykonał już podobne doświadczenie z elektronami na kilku szczelinach. Dziś robi się to rutynowo: Merli, Missiroli i Pozzi (1974) pokazali powstawanie prążków z pojedynczych elektronów, a Tonomura (1989) nakręcił film, na którym punkty pojedynczych elektronów powoli składają się w prążki. Ten dział nie wyjaśni, „jak to możliwe”; Feynman twierdził, że nikt tego nie wie. Pokaże za to, jak dokładnie przewidywać wynik: za pomocą amplitud.

Pytanie na start. Elektron przechodzi przez jedną ze szczelin czy przez obie? Odpowiedź w części 2, choć nie taka, jakiej się spodziewasz.

Fotony i fale materii

Światło jest falą elektromagnetyczną (dział 16 „Indukcja, równania Maxwella i fale elektromagnetyczne”), a mimo to oddaje energię w porcjach. W zjawisku fotoelektrycznym światło wybija elektrony z metalu; ich energia nie zależy od natężenia światła, tylko od częstotliwości, a poniżej pewnej częstotliwości progowej nie ma ich wcale, choćby światło było bardzo silne. Einstein (1905) wyjaśnił to, przyjmując, że światło składa się z **fotonów** o energii proporcjonalnej do częstotliwości; Millikan (1916) potwierdził pomiarami równanie Einsteina, choć chciał je obalić i długo nie wierzył w fotony.

PRAWA · FOTONY I FALE MATERII

$$E = hf = \hbar\omega, \quad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k; \quad \lambda_{\text{de Broglie}} = \frac{h}{p}.$$

$h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J·s (stała Plancka, wartość dokładna z definicji od 2019 r.),
 $\hbar = h/2\pi$. Wygodnie: $hc \approx 1240$ eV·nm, więc foton zielonego światła (530 nm) ma ok. 2,3 eV. De Broglie (1924) zaproponował, że te same wzory obowiązują dla elektronów i każdej innej cząstki. FLP III-2-1

Długość fali elektronu przyspieszonego napięciem 100 V wynosi 0,12 nm, tyle co odstęp między atomami w kryształach. Davisson i Germer (1927) zobaczyli, że elektrony odbite od kryształu niklu tworzą maksima dyfrakcyjne dokładnie tam, gdzie przewiduje wzór de Broglie'a (przykład 17.3). Interferują neutrony, atomy, a od 1999 r. nawet cząsteczki fulerenu C₆₀, złożone z 60 atomów

węgla (Arndt, Zeilinger). Piłka tenisowa ma długość fali rzędu 10^{-34} m, dlatego jej falowej natury nie zobaczymy nigdy. (FLP III-2-3)

SKĄD TO WIEMY?

Fotony liczy się dziś bezpośrednio. Fotopowielacz albo detektor jednofotonowy daje przy słabym świetle pojedyncze „kliknięcia”, wszystkie tej samej wielkości; osłabiając światło, zmniejszamy ich częstość, a nie wielkość. Siatkówka oka reaguje na pojedyncze fotony, a człowiek zauważa błysk złożony z kilku-kilkunastu fotonów.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Jaką energię (w eV) mają fotony światła czerwonego (700 nm) i fioletowego (400 nm)?

- 2 Ile fotonów na sekundę wysyła wskaźnik laserowy o mocy 1 mW i długości fali 650 nm?

- 3 Praca wyjścia cezu wynosi 2,1 eV. Jaka jest najdłuższa fala, która wybija z niego elektrony? Jaką energię mają elektrony wybite światłem 400 nm?

- 4 Jaka jest długość fali de Broglie'a elektronu o energii 1 eV, neutronu termicznego (2200 m/s) i piłki o masie 0,15 kg lecącej z prędkością 40 m/s?

- 5 Pokaż, że dla nierelatywistycznego elektronu przyspieszonego napięciem V (w woltach) $\lambda \approx 1,226/\sqrt{V}$ nm.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Doświadczenie z dwiema szczelinami

Feynman porównuje trzy doświadczenia z tym samym układem: przesłona z dwiema szczelinami, za nią ekran z detektorem. (FLP III-1-2, III-1-3, III-1-4)

- **Kule z karabinu** przychodzą porcjami. Prawdopodobieństwo trafienia przy obu otwartych szczelinach to suma: $P_{12} = P_1 + P_2$. Nie ma interferencji.
- **Fale na wodzie** przychodzą w sposób ciągły, z dowolnym natężeniem. Natężenie to kwadrat sumy amplitud: $I_{12} = |h_1 + h_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$. Jest interferencja.

- **Elektrony** przychodzą porcjami, jak kule, każdy cały w jednym miejscu. Ale rozkład prawdopodobieństwa ma prążki, jak dla fal: $P_{12} \neq P_1 + P_2$.

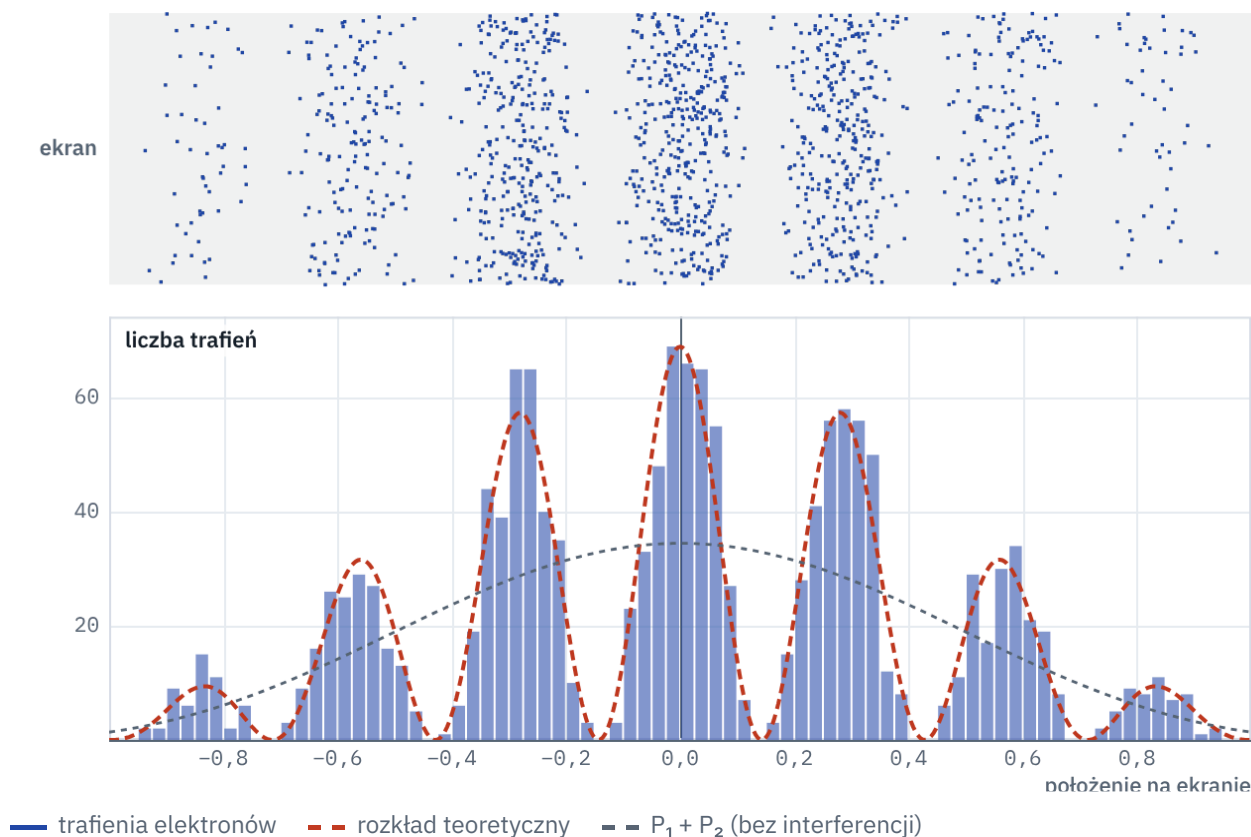
Stąd odpowiedź na pytanie z prologu. Zdanie „każdy elektron przechodzi albo przez szczelinę 1, albo przez 2” prowadzi do $P_{12} = P_1 + P_2$, bo wtedy elektrony dzielą się na dwie grupy, a prawdopodobieństwa dla rozłącznych grup się dodają. Doświadczenie temu przeczy. Nie wolno więc mówić, że elektron przeszedł jedną ze szczelin, a my tylko nie wiemy którą. Można natomiast **sprawdzić**, którędy przeszedł, np. oświetlając szczeliny i patrząc, gdzie błysnie rozproszony foton. Wtedy zawsze widzimy cały elektron przy jednej szczelinie, ale prążki znikają: rozkład staje się sumą $P_1 + P_2$. FLP III-1-6

ZASADY · MECHANIKI KWANTOWEJ (FEYNMAN)

(1) Prawdopodobieństwo zdarzenia to kwadrat modułu liczby zespolonej, **amplitudy prawdopodobieństwa**: $P = |\varphi|^2$. (2) Gdy zdarzenie może zajść na kilka sposobów, których nie da się odróżnić, amplitudy się dodaje: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $P = |\varphi_1 + \varphi_2|^2$. (3) Gdy da się sprawdzić, który sposób zaszedł (nawet jeśli nikt nie patrzy na wynik), dodaje się prawdopodobieństwa: $P = P_1 + P_2$. FLP III-1-7

SYMULACJA 1

Elektrony wystrzeliwane pojedynczo na dwie szczeliny. Na górze punkty trafień, na dole histogram i przewidywanie $|\varphi_1 + \varphi_2|^2$. Podglądaj część elektronów przy szczelinach albo zasłoń jedną szczelinę i obserwuj, co dzieje się z prążkami.



elektronów na ekranie 1 500

widoczność prążków 1,00

podglądane 0%

Z tysięcy pojedynczych trafień wyłaniają się prążki interferencyjne: tam, gdzie amplitudy obu dróg się znoszą, elektrony prawie nie trafiają, choć każdy przeszedł „przez coś”. Rozkład to $|\varphi_1 + \varphi_2|^2$, a nie $|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2$.

Stan na rysunku: 1500 elektronów na ekranie, otwarte obie szczeliny, podglądanych 0% elektronów.

⚠️ PUŁAPKA · „POMIAR POPYCHA ELEKTRON”

Feynman tłumaczy znikanie prążków odrzutem od fotonu: foton, który pozwala rozróżnić szczeliny, musi mieć długość fali mniejszą niż odstęp szczelin, a wtedy jego pęd rozmywa prążki. To poprawny rachunek, ale nie cała prawda. Prążki znikają zawsze, gdy w jakimkolwiek układzie zostaje informacja o drodze, także w doświadczeniach, w których „podglądacz” praktycznie nie zmienia pędu cząstki. Rozstrzyga reguła (3): czy drogi są rozróżnialne, a nie to, czy ktoś coś popchnął.

- 1 W pewnym punkcie ekranu $P_1 = P_2 = p$. Jakie są największe i najmniejsze możliwe P_{12} dla elektronów? A dla kul?
- 2 Elektrony o energii 100 eV padają na dwie szczeliny odległe o 1 μm . Jaki jest kątowy odstęp prążków? Jak daleko trzeba ustawić ekran, by prążki były odległe o 0,1 mm?
- 3 Gdy podglądamy przy szczelinach, ale tylko co drugi elektron jest „przyłapany”, jaki będzie kontrast prążków (różnica maksimum i minimum przez ich sumę)?
- 4 Jaka jest najdłuższa fala światła, przy której można jeszcze rozróżnić szczeliny odległe o d ? Co się dzieje z prążkami, gdy stopniowo wydłużamy falę światła używanego do podglądania?
- 5 Dlaczego dla kul karabinowych nie widać prążków, choć według mechaniki kwantowej też powinny być? Oszacuj odstęp prążków dla kuli o masie 1 g lecącej z prędkością 100 m/s, szczelin odległych o 1 cm i ekranu w odległości 10 m.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

3 Reguły rachunku amplitud

Amplitudę tego, że cząstka wychodząca ze stanu s trafi do stanu x , zapisujemy w notacji Diraca jako $\langle x|s \rangle$ (czytaj od prawej: „z s do x ”). Feynman podaje trzy reguły, które wystarczają do większości rachunków: FLP III-3-1

🔧 REGUŁY · ŁĄCZENIA AMPLITUD

alternatywy: $\langle x|s \rangle = \langle x|s \rangle_{\text{przez 1}} + \langle x|s \rangle_{\text{przez 2}}$; kolejne etapy: $\langle x|s \rangle_{\text{przez 1}} = \langle x|1 \rangle \langle 1|s \rangle$.

Amplitudy nierozróżnialnych dróg się dodaje, amplitudy kolejnych etapów jednej drogi mnoży. Dla dwóch niezależnych cząstek amplituda zdarzenia złożonego to iloczyn amplitud. Prawdopodobieństwo to $|\langle x|s \rangle|^2$.

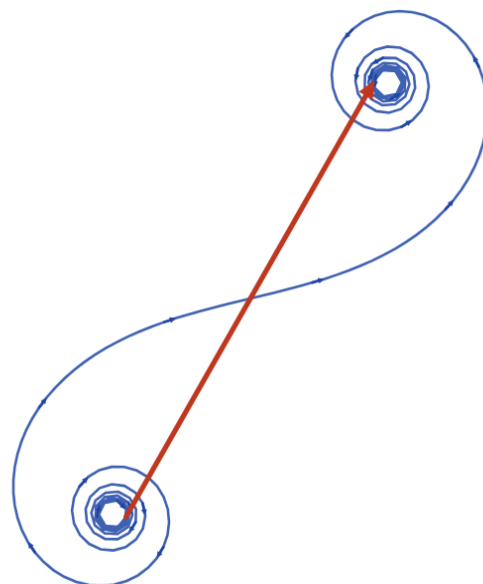
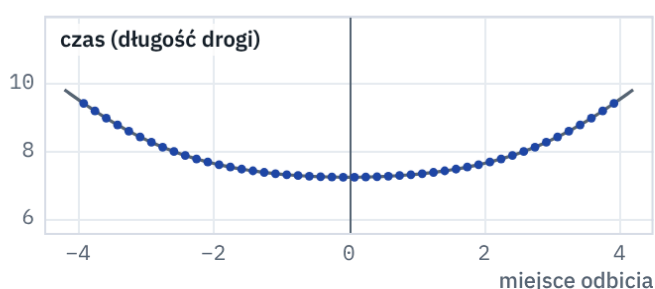
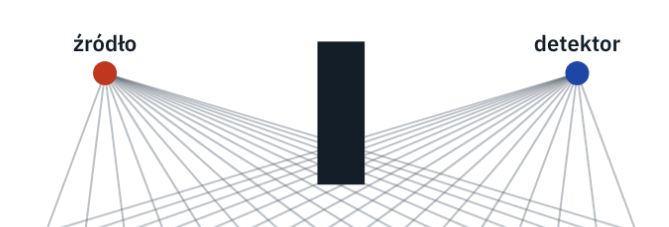
Amplitudy są liczbami zespolonymi (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory): mają długość i fazę. Feynman w popularnej książce *QED* rysuje je jako strzałki: dodawanie amplitud to dodawanie strzałek, mnożenie to obracanie i skracanie. Dla cząstki swobodnej o pędzie $\vec{p}$ i energii E amplituda przelotu z punktu do punktu ma fazę $(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar$: im dłuższa droga w jednostkach

długości fali, tym bardziej obrócona strzałka. To ta sama faza, co w fali o liczbie falowej $k = p/\hbar$ i częstotliwości $\omega = E/\hbar$. FLP III-3-1

Ten obraz tłumaczy optykę geometryczną. Foton biegnący od źródła przez lustro do detektora może odbić się w każdym punkcie lustra. Wszystkie drogi są nierozróżnialne, więc trzeba dodać ich strzałki. Tam, gdzie czas przelotu szybko zmienia się z położeniem punktu odbicia, kolejne strzałki obracają się i wzajemnie znoszą; tam, gdzie czas jest stacjonarny (minimalny), strzałki są prawie zgodne i dają całą wypadkową. Stąd zasada Fermata i prawo odbicia (dział 12 „Optyka: zasada najmniejszego czasu, interferencja, dyfrakcja”). Usuwając część lustra, można jednak sprawić, że strzałki z brzegów przestaną się znosić: to siatka dyfrakcyjna. FLP I-26-6

SYMULACJA 2

Odbicie od lustra jako suma amplitud. Lustro podzielono na kawałki; każdy daje strzałkę obróconą proporcjonalnie do czasu przelotu (wykres pod spodem). W osobnym panelu strzałki dodane jedna za drugą i wypadkowa. Porównaj całe lustro, sam środek, sam skraj i skraj z wytrawionymi paskami.



— drogi (od źródła przez lustro do detektora) — strzałki amplitud — strzałka wypadkowa

kwadrat strzałki wypadkowej 1519,5

względem całego lustra 1,00

użyte kawałki lustra 240 z 240

Każdy kawałek lustra daje strzałkę o kierunku zależnym od czasu przelotu. Na brzegach czas zmienia się szybko i strzałki kręcą się w kółko, znosząc się. W środku, gdzie czas jest najkrótszy i prawie stały, strzałki są zgodne: tam „odbija się” światło, zgodnie z zasadą Fermata.

Stan na rysunku: 240 z 240 kawałków lustra, długość fali 0,30; kwadrat strzałki wypadkowej 1519,5 (1,00 wartości dla całego lustra).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 35 min

- Dwie amplitudy mają długości 0,6 i 0,8. Jakie prawdopodobieństwo daje ich suma, gdy są zgodne, przeciwne i prostopadłe?



- 2 Płytką światłodzielącą przepuszcza foton z amplitudą $1/\sqrt{2}$ i odbija z amplitudą $i/\sqrt{2}$. Jaka jest amplituda, że foton przejdzie przez dwie takie płytki ustawione kolejno (bez odbicia)? A że odbije się od obu?
- 3 Atom może wysłać foton do detektora drogą przez lustro A z amplitudą a i drogą przez lustro B z amplitudą b . Gdy lustro B drga i jego położenie się zmienia, faza b zmienia się chaotycznie. Jakie średnie prawdopodobieństwo zmierzymy?
- 4 Wyjaśnij za pomocą strzałek, dlaczego światło odbija się od lustra pod kątem równym kątowi padania.
- 5 Amplituda przelotu cząstki swobodnej na odległość r ma fazę $pr/\hbar$. Dla elektronu 100 eV o ile musi zmienić się długość drogi, żeby strzałka obróciła się o pełny obrót?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

4 Zasada nieoznaczoności

Cząstka o określonym pędzie ma amplitudę $e^{ipx/\hbar}$: falę rozciągniętą na całą przestrzeń, bez określonego położenia. Żeby cząstka była zlokalizowana, trzeba złożyć wiele takich fal o różnych pędach w **paczke falową**. Funkcja falowa w położeniu i rozkład amplitud pędu to para transformat Fouriera (lekcja 4.3 Transformata Fouriera i delta Diraca): im węższa paczka w x , tym szerszy rozkład w p . FLP III-2-2

🔊 ZASADA · NIEOZNACZONOŚCI HEISENBERGA

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{2}.$$

Δ to odchylenia standardowe; równość osiąga paczka gaussowska w chwili, gdy jest najwęższa (np. dla $t = 0$ w symulacji 3). Druga nierówność ma inny status (czas nie jest obserwabłą, tylko parametrem), ale ma prosty sens: stan żyjący przez czas τ ma energię rozmytą o ok. $\hbar/\tau$ (dział 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe”: $\Delta\omega \cdot \tau \approx 1$).

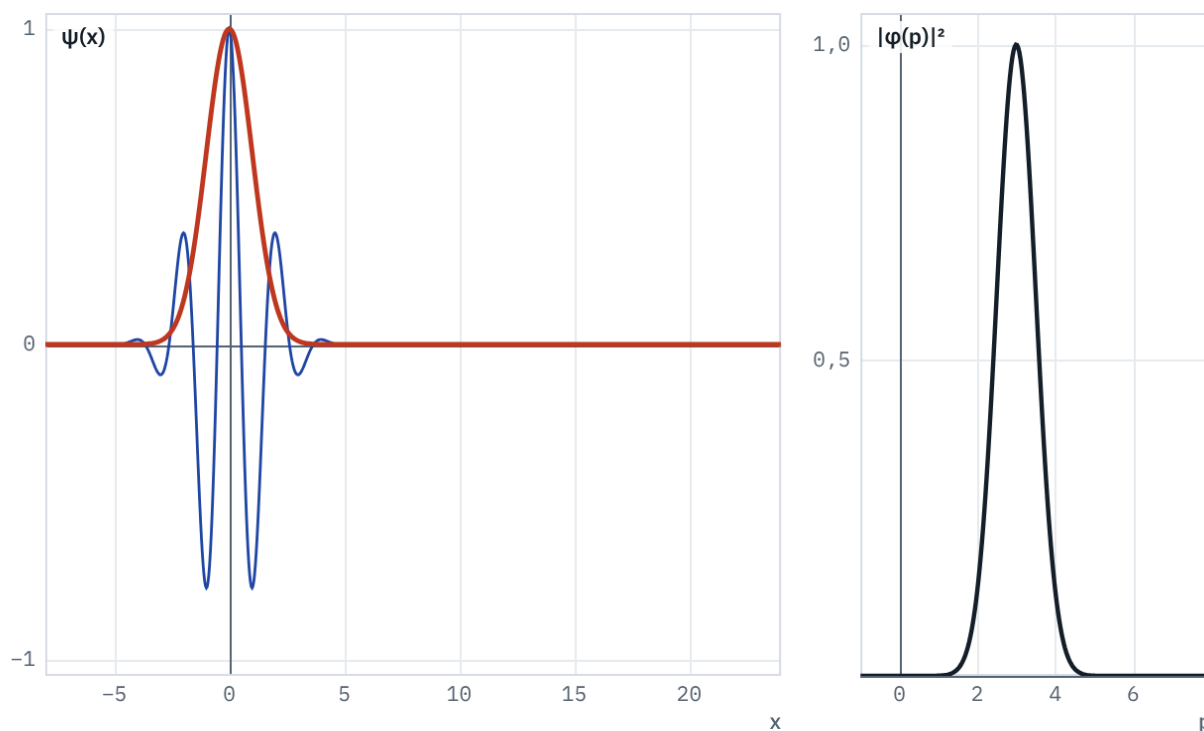
FLP III-1-8

To nie jest ograniczenie przyrządów, tylko własność fal: dźwięk trwający milisekundę nie ma określonej częstotliwości, a elektron zamknięty w obszarze o rozmiarze a nie ma określonego pędu. Feynman wyprowadza z tego **rozmiar atomu**. Elektron w odległości ok. a od protonu ma pęd rzędu $\hbar/a$, więc energię kinetyczną rzędu $\hbar^2/2ma^2$; energia potencjalna to $-e^2/4\pi\epsilon_0 a$. Gdy elektron zbliża się do jądra, potencjalna maleje, ale kinetyczna rośnie szybciej. Minimum sumy

wypada przy promieniu Bohra $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, a energia wynosi $-13,6 \text{ eV}$ (przykład 17.5). Zasada nieoznaczoności wyjaśnia więc, dlaczego atom nie zapada się tak, jak przewiduje fizyka klasyczna (dział 16 „Indukcja, równania Maxwella i fale elektromagnetyczne”).

FLP III-2-4

SYMULACJA 3 Paczka falowa gaussowska cząstki swobodnej: część rzeczywista $\psi(x)$, gęstość prawdopodobieństwa $|\psi|^2$ i rozkład pędu. Zmień szerokość paczki i uruchom ewolucję w czasie: wąska paczka ma szeroki rozkład pędu i szybko się rozmywa.



— $\text{Re } \psi(x)$ — $|\psi(x)|^2$ (gęstość prawdopodobieństwa) — $|\varphi(p)|^2$ (rozkład pędu)

Δx 1,000

Δp 0,500

$\Delta x \cdot \Delta p$ 0,500 $\hbar$

t 0,00

W chwili początkowej paczka gaussowska ma najmniejszy możliwy iloczyn $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$. Węższa paczka w położeniu ma szerszy rozkład pędu: to ta sama matematyka co dla impulsu i jego widma (transformata Fouriera).

Stan na rysunku: paczka gaussowska, $\Delta x_0 = 1,00$, $p_0 = 3,0$, $t = 0,00$ ($\hbar = m = 1$); $\Delta x = 1,000$, $\Delta p = 0,500$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 35 min

- Elektron jest zamknięty w obszarze o rozmiarze $0,1 \text{ nm}$. Jaka jest minimalna nieokreśloność pędu i odpowiadająca jej energia kinetyczna (w eV)?

- 2 Piłka o masie 0,15 kg ma prędkość określoną z dokładnością 1 mm/s. Jak dokładnie może być określone jej położenie?
- 3 Wyprowadź promień Bohra: zminimalizuj $E(a) = \hbar^2/2ma^2 - e^2/4\pi\epsilon_0 a$.
- 4 Stan wzbudzony atomu sodu żyje ok. 16 ns. Jaka jest naturalna szerokość linii (w MHz) i jej względna szerokość dla żółtej linii 589 nm?
- 5 Paczka gaussowska o szerokości Δx_0 rozmywa się tak, że $\Delta x(t) = \Delta x_0 \sqrt{1 + (\hbar t/2m\Delta x_0^2)^2}$. Po jakim czasie podwoi szerokość paczka elektronu o $\Delta x_0 = 0,1$ nm? A paczka ziarenka pyłu o masie 10^{-15} kg i $\Delta x_0 = 1$ μ m?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

5 Cząstki identyczne: bozony i fermiony

Dwie cząstki zderzają się, a detektor pod kątem θ rejestruje jedną z nich. Jeśli cząstki są różne, np. cząstka α i jądro tlenu, da się sprawdzić, którą złapaliśmy, więc dodajemy prawdopodobieństwa: $|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2$ (złapana mogła być α albo jądro tlenu, odrzucone w przeciwnym kierunku). Jeśli cząstki są **identyczne**, np. dwie cząstki α , obu możliwości nie da się odróżnić nawet w zasadzie, więc trzeba dodać amplitudy. (FLP III-3-4)

🔧 ZASADA · CZĄSTKI IDENTYCZNE

$$P_{\text{bozony}} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2, \quad P_{\text{fermiony}} = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2.$$

Przy zamianie dwóch identycznych cząstek amplituda bozonów (spin całkowity: fotony, cząstki α , mezony π) się nie zmienia, a fermionów (spin połówkowy: elektrony, protony, neutrony) zmienia znak. Dla fermionów o przeciwnych spinach, które da się w zasadzie odróżnić po spinie, interferencji nie ma (o ile oddziaływanie nie zmienia spinów). (FLP III-4-1)

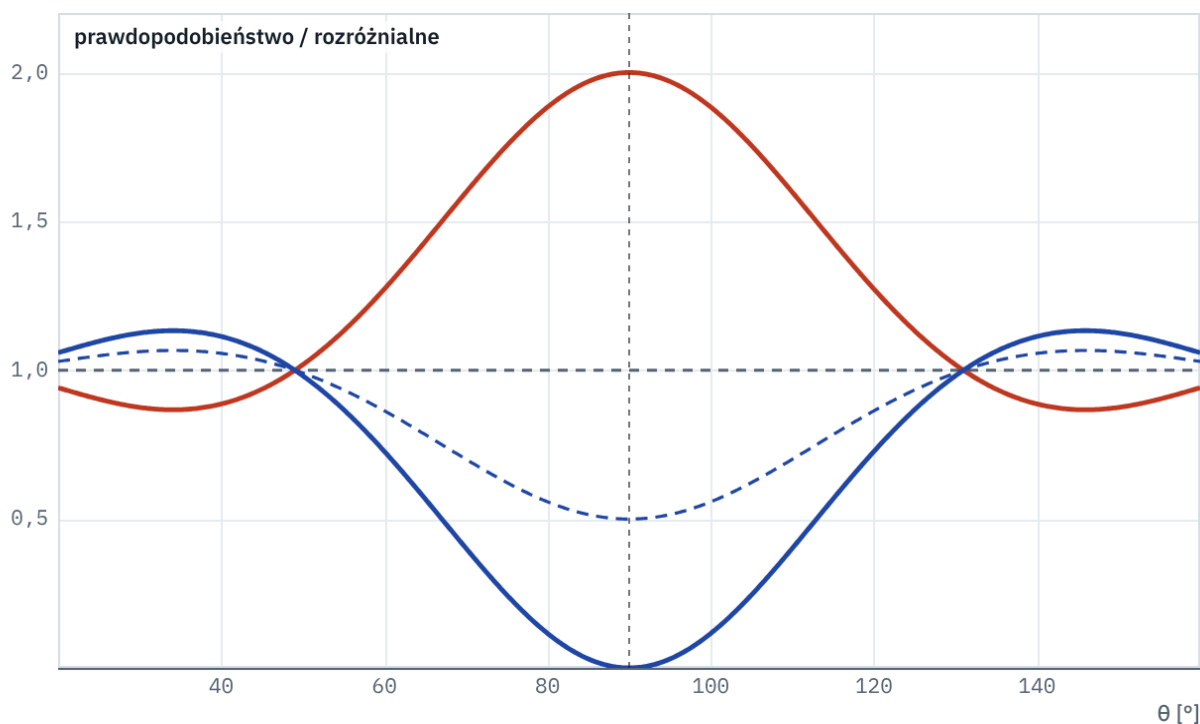
Przy $\theta = 90^\circ$ obie amplitudy są równe. Dla bozonów wychodzi $|2f|^2$, dwa razy więcej niż dla cząstek rozróżnialnych ($2|f|^2$); dla fermionów o zgodnych spinach zero. Doświadczenia z rozpraszaniem cząstek α na helu i protonów na wodorze potwierdzają to w szczególności (wzór Motta, 1930).

Skutki sięgają daleko. Bozony „lubią” być w tym samym stanie: prawdopodobieństwo, że foton zostanie wyemitowany do stanu, w którym jest już n fotonów, jest $n + 1$ razy większe niż do pustego. Na tym działa **laser** (emisja wymuszona), nadciężkość helu i kondensat Bosego-

Einsteina. Dwa fermiony nie mogą być w tym samym stanie, bo amplituda $\varphi - \varphi = 0$: to **zakaz Pauliego**. Z niego wynika budowa powłok elektronowych i układ okresowy (dział 19 „Atom wodoru i układ okresowy”), a także to, że materia jest sztywna i nie zapada się.

FLP III-4-4, III-4-7

SYMULACJA 4 Rozpraszanie dwóch identycznych cząstek naładowanych (wzór Motta): prawdopodobieństwo w danym kierunku podzielone przez wynik dla cząstek rozróżnialnych. Przesuwaj kąt i zmieniaj siłę oddziaływania.



— bozony (np. $\alpha + \alpha$) — fermiony o zgodnych spinach - - - fermiony niespolaryzowane (np. $p + p$)
 - - - cząstki rozróżnialne

bozony 2,000

fermiony, zgodne spiny 0,000

fermiony niespolaryzowane 0,500

rozdzielne 1

Przy 90° obie drogi (cząstka A do detektora albo cząstka B do detektora) mają równe amplitudy. Dla bozonów dodają się: prawdopodobieństwo jest dwa razy większe niż dla cząstek rozróżnialnych. Dla fermionów o zgodnych spinach odejmują się: zero. Niespolaryzowane fermiony dają połowę.

Stan na rysunku: wzór Motta, $\eta = 1,0$, $\theta = 90^\circ$; względem cząstek rozróżnialnych: bozony 2,000, fermiony o zgodnych spinach 0,000, niespolaryzowane 0,500.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Które z cząstek są bozonami, a które fermionami: foton, elektron, proton, cząstka α (2 protony + 2 neutrony), atom ${}^4\text{He}$, atom ${}^3\text{He}$?
■ ■ ■
-
- 2 Przy jakim kącie rozproszenia (w układzie środka masy) prawdopodobieństwo dla dwóch fermionów o zgodnych spinach jest zawsze zerowe? Dlaczego?
■ ■ ■
-
- 3 Wiązka niespolaryzowanych protonów rozprasza się na protonach. Pokaż, że przy 90° prawdopodobieństwo wynosi połowę wyniku dla cząstek rozróżnialnych.
■ ■ ■
-
- 4 Atom może wysłać foton do pustego modu albo do modu, w którym jest już 1000 fotonów. Ile razy większe jest prawdopodobieństwo w drugim przypadku? Do czego to prowadzi w laserze?
■ ■ ■
-
- 5 Dwa identyczne bozony trafiają z dwóch stron na płytkę światłodziącą 50/50 (efekt Hong-Ou-Mandela). Pokaż, że nigdy nie wychodzą różnymi wyjściami. Wskazówka: amplituda przejścia $1/\sqrt{2}$, odbicia $i/\sqrt{2}$.
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

☰ METODA DLA AMPLITUD

1. **Wypisz drogi** od stanu początkowego do końcowego; sprawdź, które są rozróżnialne (choćby w zasadzie).
2. Dla każdej drogi pomnóż amplitudy kolejnych etapów.
3. **Nierozróżnialne drogi:** dodaj amplitudy, potem weź kwadrat modułu. **Rozróżnialne:** dodaj prawdopodobieństwa.
4. **Cząstki identyczne:** dodaj amplitudę zamiany ze znakiem + (bozony) lub – (fermiony).
5. **Oszacowania:** $p \approx \hbar/\Delta x$, $E \approx \hbar/\tau$, $\lambda = h/p$; $hc \approx 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$.
6. **Sprawdzenie:** suma prawdopodobieństw wszystkich wyników to 1.

Przykład 17.1

Ile fotonów daje światło?

Ile fotonów na sekundę pada na metr kwadratowy nad atmosferą (1361 W/m^2 , na powierzchni Ziemi ok. 1000 W/m^2 ; średnia energia fotonu ok. $1,5 \text{ eV}$)? A ile na źrenicę oka (średnica 3 mm) z żarówki 60 W odległej o 100 m , przyjmując, że 3 W wypromieniowuje jako światło widzialne o średniej energii fotonu 2 eV ?

1. Słońce: $1361/(1,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) \approx 5,7 \cdot 10^{21} \text{ fotonów}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$.
2. Żarówka: $3/(2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) \approx 9 \cdot 10^{18} \text{ fotonów/s}$; na źrenicę o polu $7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ w odległości 100 m : $9 \cdot 10^{18} \cdot 7 \cdot 10^{-6}/(4\pi \cdot 10^4) \approx 5 \cdot 10^8 \text{ fotonów/s}$.

Wynik: ogromne liczby. Ziarnistość światła widać dopiero przy bardzo słabych źródłach i czułych detektorach.

Sprawdzenie: oko widzi błysk złożony z ok. 10 fotonów, więc żarówkę dostrzegłoby z odległości wielu kilometrów, gdyby nie tło i rozpraszanie ✓.

Przykład 17.2

Zjawisko fotoelektryczne

Na cez (praca wyjścia 2,1 eV) pada światło o długości 400 nm. Jaka jest maksymalna energia wybitych elektronów i jakie napięcie je zatrzyma? Co się zmieni, gdy natężenie światła wzrośnie dwukrotnie?

- 1 Energia fotonu $hc/\lambda = 1240/400 \approx 3,1$ eV; $E_k = 3,1 - 2,1 = 1,0$ eV.
- 2 Napięcie hamujące 1,0 V. Przy dwa razy silniejszym świetle: dwa razy więcej elektronów, ale z tą samą energią.

Wynik: 1,0 eV i 1,0 V. Energia elektronów zależy od częstotliwości, a nie od natężenia, czego nie da się wyjaśnić falą klasyczną.

Sprawdzenie: nachylenie zależności napięcia hamującego od częstotliwości to h/e ; tak Millikan zmierzył h ✓.

Przykład 17.3

Doświadczenie Davissona i Germera

Elektrony o energii 54 eV odbijają się od powierzchni kryształu niklu, w którym odstęp rzędów atomów wynosi $d = 0,215$ nm. Wiązka pada prostopadle do powierzchni. Pod jakim kątem do normalnej (czyli do wiązki padającej, mierzonym wstecz) wystąpi maksimum pierwszego rzędu?

- 1 $\lambda = h/\sqrt{2mE} \approx 0,167$ nm.
- 2 Atomy powierzchni działają jak siatka dyfrakcyjna: $d \sin \theta = \lambda$, $\sin \theta \approx 0,776$, $\theta \approx 51^\circ$.

Wynik: ok. 51° ; Davisson i Germer zmierzili 50° . Elektrony uginają się jak fale o długości h/p .

Sprawdzenie: $\lambda < d$, więc maksimum pierwszego rzędu istnieje ✓.

Przykład 17.4

Mikroskop elektronowy

Mikroskop elektronowy przyspiesza elektrony napięciem 100 kV. Jaka jest ich długość fali? Ile wynosi błąd, jeśli pominąć teorię względności?

- 1 Relatywistycznie: $pc = \sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2} = \sqrt{100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 511} \text{ keV} \approx 335 \text{ keV}$; $\lambda = hc/pc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm} / 335 \text{ keV} \approx 3,7 \text{ pm}$.
- 2 Nierelatywistycznie $\lambda = h/\sqrt{2mE_k} \approx 3,9 \text{ pm}$, błąd ok. 5%.

Wynik: 3,7 pm, sto tysięcy razy mniej niż światło widzialne. Rozdzielczość ogranicza nie długość fali, tylko wady soczewek magnetycznych; najlepsze mikroskopy rozróżniają ułamki angstromów.

Sprawdzenie: $E_k/mc^2 \approx 0,2$, więc poprawka rzędu kilku procent jest rozsądna ✓.

Przykład 17.5

Rozmiar atomu wodoru z zasady nieoznaczoności

Oszacuj rozmiar i energię atomu wodoru, przyjmując, że elektron w odległości a od protonu ma pęd $\hbar/a$.

- 1 $E(a) = \hbar^2/2ma^2 - e^2/4\pi\epsilon_0 a$; minimum przy $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2/me^2 \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.
- 2 $E(a_0) = -e^2/(8\pi\epsilon_0 a_0) \approx -13,6 \text{ eV}$.

Wynik: 0,53 Å i -13,6 eV. Atom ma taki rozmiar, bo dalsze ściśnięcie elektronu kosztowałoby więcej energii kinetycznej, niż dałoby energii potencjalnej.

Sprawdzenie: z doświadczenia energia jonizacji wodoru to 13,6 eV ✓ (dokładna zgodność to po części przypadek oszacowania). FLP III-2-4

Przykład 17.6

Dlaczego w jądrze nie ma elektronów

Kiedys sądzono, że jądro zawiera protony i elektrony. Oszacuj energię elektronu zamkniętego w obszarze 10^{-14} m i porównaj z energiami wiązania w jądrach (kilka MeV na nukleon) oraz z energią protonu w tym samym obszarze.

- 1 $p \approx \hbar/\Delta x \approx 1,05 \cdot 10^{-20}$ kg·m/s, $pc \approx 20$ MeV: elektron jest ultrarelatywistyczny, $E \approx pc \approx 20$ MeV.
- 2 Proton: $p^2/2m \approx 0,2$ MeV, mało w porównaniu z energią wiązania.

Wynik: elektronu nie da się utrzymać w jądrze siłami elektrycznymi (ok. 1 MeV), a ciężkie nukleony mieszczą się tam bez trudu. Elektrony z rozpadu β powstają w chwili rozpadu, a nie siedzą wcześniej w jądrze.

Sprawdzenie: energie elektronów z rozpadu β to rzeczywiście rząd MeV ✓.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Elektron przechodzi przez jedną szczelinę, tylko nie wiemy przez którą.”

Wtedy rozkład byłby sumą $P_1 + P_2$, bez prążków. Doświadczenie temu przeczy.

× „Zasada nieoznaczoności wynika z niedoskonałości przyrządów.”

Wynika z tego, że stan opisuje fala: paczka nie może być jednocześnie wąska w położeniu i w pędzie, tak jak krótki dźwięk nie ma określonej wysokości.

× „Funkcja falowa to rozmazany elektron.”

Detektor zawsze rejestruje cały elektron w jednym miejscu. Kwadrat modułu funkcji falowej to gęstość prawdopodobieństwa, gdzie to nastąpi.

× „Mechanika kwantowa dotyczy tylko mikroświata.”

Bez niej nie da się wyjaśnić, dlaczego stół jest twardy, metal przewodzi, dioda świeci, a laser daje spójną wiązkę.

× „Foton to kulka światła lecąca po określonym torze.”

Między źródłem a detektorem nie ma toru: są amplitudy dla wszystkich dróg, które się sumuje.

× „Interferencja to oddziaływanie między elektronami.”

Prążki powstają także wtedy, gdy w aparaturze jest naraz tylko jeden elektron. Każdy interferuje sam ze sobą.

8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

- 1 Jeden foton naraz.** W 1909 r. G. I. Taylor fotografował prążki dyfrakcyjne w bardzo słabym świetle, naświetlając kliszę przez miesiąc. Przyjmij, że do aparatu docierało 10^6 fotonów na sekundę. Jaka była średnia odległość między kolejnymi fotonami? Czy prążki mogły powstać z „oddziaływania fotonów”?
- 2 Mikroskop Heisenberga.** Elektron oglądamy w mikroskopie przy świetle o długości λ , przez obiektyw o kącie aperturowym θ . Oszacuj nieokreśloność położenia i pędu po rozproszeniu jednego fotonu.
- 3 Interferometr Macha-Zehndera.** Foton trafia na płytkę 50/50, potem dwie drogi o równej długości spotykają się na drugiej płytce 50/50 przed dwoma detektorami. Amplituda przejścia przez płytkę to $1/\sqrt{2}$, odbicia $i/\sqrt{2}$. Do którego detektora trafia foton? Co się stanie, gdy zasłonimy jedną drogę?
- 4 Energia drgań zerowych.** Oscylator harmoniczny o masie m i częstości ω ma energię $p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$. Korzystając z $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, znajdź najmniejszą możliwą energię. Dlaczego hel nie krzepnie pod ciśnieniem atmosferycznym nawet w zerze bezwzględnym?
- 5 Rezonans Δ .** Cząstka $\Delta(1232)$ widziana jest jako maksimum w rozpraszaniu pionów na protonach o szerokości ok. 117 MeV. Jaki jest jej czas życia? Ile czasu potrzebuje światło, by przelecieć przez proton (średnica ok. 1,7 fm)?

- 6 **Dlaczego stół jest twardy?** Atomy to głównie pusta przestrzeń. Dlaczego ręka nie przenika przez stół? Wyjaśnij rolę zakazu Pauliego i zasady nieoznaczoności.
- 7 **Co to znaczy „nie da się odróżnić”?** Rozpraszamy cząstki α na ${}^4\text{He}$ i mierzymy przy 90° . Ktoś proponuje: „pomalujmy” jedną z cząstek, np. użyjmy ${}^3\text{He}$ zamiast ${}^4\text{He}$. Co się zmieni w wyniku i dlaczego?
- 8 **Fulereny w interferometrze.** W 1999 r. cząsteczki C_{60} (masa 720 u) o prędkości ok. 220 m/s dały prążki na siatce o okresie 100 nm. Jaka jest ich długość fali i odstęp kątowy prążków? Dlaczego ciepłe cząsteczki tracą interferencję, gdy temperatura rośnie powyżej ok. 3000 K?

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jaką energię ma foton o częstotliwości f i jaką długość fali ma cząstka o pędzie p ?

$$E = hf; \lambda = h/p.$$

- 2 Kiedy dodaje się amplitudy, a kiedy prawdopodobieństwa?

Amplitudy, gdy drogi są nierozróżnialne (nawet w zasadzie); prawdopodobieństwa, gdy da się sprawdzić, która zaszła.

- 3 Co się dzieje z prążkami, gdy sprawdzamy, którą szczeliną przeszedł elektron?

Znikają; rozkład staje się sumą $P_1 + P_2$.

- 4 Jak łączy się amplitudy kolejnych etapów jednej drogi?

Mnoży się je: $\langle x|s \rangle = \langle x|1 \rangle \langle 1|s \rangle$.

5 Co mówi zasada nieoznaczoności i skąd się bierze?

$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$; z tego, że funkcja falowa w położeniu i rozkład amplitud pędu tworzą parę transformat Fouriera.

6 Dlaczego atom ma rozmiar ok. 0,5 Å?

Ścisnięcie elektronu zwiększa jego energię kinetyczną $\sim \hbar^2/ma^2$ szybciej, niż maleje energia potencjalna; minimum przy promieniu Bohra.

7 Czym różnią się bozony od fermionów?

Przy zamianie dwóch identycznych cząstek amplituda bozonów się nie zmienia, a fermionów zmienia znak.

8 Skąd zakaz Pauliego?

Dla dwóch fermionów w tym samym stanie amplituda z zamianą i bez niej się odejmują: wynik zero.

KWANTY I FALE

$E = hf = \hbar\omega$; $p = h/\lambda = \hbar k$; $hc \approx 1240$
eV·nm; $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J·s

fotoefekt: $E_k = hf - W$; elektron: $\lambda \approx$
 $1,226/\sqrt{V}$ nm (nierel.)

$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$; $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar/2$; $a_0 =$
 $4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$

AMPLITUDE

$P = |\varphi|^2$; nierozróżnialne: $\varphi_1 + \varphi_2$;
rozróżnialne: $P_1 + P_2$

kolejne etapy: $\langle x|s \rangle = \sum_i \langle x|i \rangle \langle i|s \rangle$;
cząstka swobodna: faza $(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar$

identyczne: $f(\theta) \pm f(\pi - \theta)$ (+ bozony, -
fermiony); emisja do modu z n fotonami:
 $\times (n + 1)$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. III, rozdz. 1 (zachowanie kwantowe), 2 (fale i cząstki), 3 (amplitudy prawdopodobieństwa).
- **Dla chętnych:** t. III, rozdz. 4 (cząstki identyczne); R. P. Feynman, *QED: osobliwa teoria światła i materii* (strzałki w wersji popularnej).

Następny dział: **Stany kwantowe, układy dwustanowe i spin**. Amplitudy tworzą wektory w przestrzeni stanów, a ich zmianę w czasie opisuje macierz, hamiltonian. Najprostszy przypadek, układ z dwoma stanami, wyjaśnia cząsteczkę amoniaku, maser, spin elektronu w polu magnetycznym i rezonans magnetyczny.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $E = hc/\lambda$: 1,77 eV i 3,10 eV.
2. $P\lambda/hc \approx 3,3 \cdot 10^{15}$ fotonów na sekundę.
3. $\lambda_{\max} = hc/W \approx 590$ nm (żółte). Dla 400 nm: $3,1 - 2,1 = 1,0$ eV.
4. Elektron: $h/\sqrt{2mE} \approx 1,23$ nm. Neutron: $h/mv \approx 0,18$ nm (dlatego neutrony termiczne nadają się do badania kryształów). Piłka: $\approx 1,1 \cdot 10^{-34}$ m.
5. $\lambda = h/\sqrt{2meV}$; podstawienie stałych daje $1,226 \cdot 10^{-9}$ m/ $\sqrt{V}$.

Zadania • część 2

1. Elektrony: od 0 (amplitudy przeciwne) do $4p$ (zgodne). Kule: zawsze $2p$.
2. $\lambda \approx 0,123$ nm, odstęp kątowy $\lambda/d \approx 1,2 \cdot 10^{-4}$ rad. Ekran w odległości ok. 0,8 m.
3. Połowa elektronów daje $P_1 + P_2$, połowa $|\varphi_1 + \varphi_2|^2$. Przy $P_1 = P_2$ rozkład jest proporcjonalny do $1 + \frac{1}{2} \cos \delta$: kontrast 0,5.
4. Rozdzielczość jest rzędu λ , więc potrzeba $\lambda \lesssim d$. Gdy λ rośnie powyżej d , coraz częściej nie wiadomo, przy której szczelinie błysnęło, a odrzut fotonu (h/λ) jest coraz mniejszy: prążki stopniowo wracają.
FLP III-1-6
5. $\lambda = h/mv \approx 6,6 \cdot 10^{-33}$ m, odstęp prążków $\lambda L/d \approx 7 \cdot 10^{-30}$ m. Każdy detektor uśrednia po ogromnej liczbie prążków i widzi gładkie $P_1 + P_2$. FLP III-1-6

Zadania • część 3

1. Zgodne: $1,4^2 = 1,96$; przeciwne: $0,2^2 = 0,04$; prostopadłe: $0,36 + 0,64 = 1$. (Wartości ponad 1 oznaczają, że to nie są amplitudy całego zdarzenia, tylko jego składniki w jakimś punkcie.)
2. Etapy się mnoży: $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$; $(i/\sqrt{2})^2 = -1/2$. Prawdopodobieństwa po $1/4$.
3. $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(a\bar{b})$; człon interferencyjny uśrednia się do zera: $|a|^2 + |b|^2$. Tak traci się koherencję bez „patrzenia”.
4. Faza strzałki jest proporcjonalna do długości drogi; długość drogi jest stacjonarna (minimalna) dla punktu, w którym kąty są równe. W jego otoczeniu strzałki są prawie zgodne, a dalej obracają się coraz szybciej i znoszą.
5. Faza zmienia się o 2π , gdy $\Delta r = h/p = \lambda \approx 0,12$ nm.

Zadania • część 4

1. $\Delta p \geq \hbar/2\Delta x \approx 5,3 \cdot 10^{-25}$ kg·m/s; $\Delta p^2/2m \approx 1$ eV. Typowe energie elektronów w atomach są tego rzędu.
2. $\Delta x \geq \hbar/(2m\Delta v) \approx 3,5 \cdot 10^{-31}$ m, nieskończenie lepiej, niż da się zmierzyć.

3. $dE/da = -\hbar^2/ma^3 + e^2/4\pi\epsilon_0 a^2 = 0$ daje $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$; podstawienie: $E = -me^4/[2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2] \approx -13,6$ eV. To, że wynik jest dokładny, jest po części szczęśliwym trafem: oszacowanie gwarantuje tylko rząd wielkości.
4. $\Delta f \approx 1/(2\pi\tau) \approx 10$ MHz; $f = c/\lambda \approx 5,1 \cdot 10^{14}$ Hz, względnie ok. $2 \cdot 10^{-8}$.
5. Gdy $\hbar t/2m\Delta x_0^2 = \sqrt{3}$: $t = 2\sqrt{3} m\Delta x_0^2/\hbar$. Elektron: ok. $3 \cdot 10^{-16}$ s. Ziarnko: ok. $3 \cdot 10^7$ s, mniej więcej rok.

Zadania · część 5

1. Bozony: foton, α , ^4He (parzysta liczba fermionów). Fermiony: elektron, proton, ^3He (nieparzysta liczba: 2 protony, 1 neutron, 2 elektrony). Dlatego ^4He staje się nadciekły w 2,2 K, a ^3He dopiero w milikelwinach.
2. Przy 90° : $f(\theta) = f(\pi - \theta)$, więc $f - f = 0$.
3. W 1/4 przypadków para ma stan singletowy (amplituda przestrzenna symetryczna: $|2f|^2 = 4|f|^2$), w 3/4 tripletowy (antysymetryczna: 0). Średnio $|f|^2$, a rozróżnialne dają $2|f|^2$.
4. $n + 1 = 1001$ razy. Fotony „ciągną” kolejne do tego samego stanu: powstaje silna, spójna wiązka w jednym modzie. (FLP III-4-4)
5. Różne wyjścia osiąga się na dwa nierozróżnialne sposoby: oba przechodzą ($\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$) albo oba się odbijają ($\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$). Dla bozonów amplitudy się dodaje: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Fotony zawsze wychodzą razem.

Zadania feynmanowskie

1. 1. Odległość $c/10^6 \approx 300$ m, a aparat miał długość rzędu metra: niemal zawsze był w nim co najwyżej jeden foton.
2. Prążki były takie same jak w silnym świetle. Każdy foton interferuje sam ze sobą; amplitudy dotyczą jednej cząstki.
2. 1. Rozdzielczość mikroskopu: $\Delta x \approx \lambda/\sin\theta$.
2. Foton wpada do obiektywu pod nieznanym kątem w zakresie $\pm\theta$, więc poprzeczny pęd przekazany elektronowi jest nieznaną $\Delta p \approx (h/\lambda)\sin\theta$. Iloczyn $\approx h$, niezależnie od λ i θ . (FLP III-1-8)
3. 1. Do detektora A (wyjście równoległe do wiązki wejściowej) prowadzą: przejście-odbicie i odbicie-przejście, każda z amplitudą $i/2$: suma i , prawdopodobieństwo 1. Do drugiego: przejście-przejście (1/2) i odbicie-odbicie ($-1/2$): suma 0.
2. Po zasłonięciu jednej drogi zostaje po jednej amplitudzie do każdego detektora: po 1/4, a w połowie przypadków foton jest pochłonięty przez zasłonę. Zasłonięcie drogi sprawia, że foton czasem trafia do detektora, do którego wcześniej nie trafiał nigdy.
4. 1. $E \geq \hbar^2/(8m\Delta x^2) + m\omega^2\Delta x^2/2$; minimum przy $\Delta x^2 = \hbar/2m\omega$ daje $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, dokładnie wynik mechaniki kwantowej (ta sama metoda co dla atomu). (FLP III-2-4)
2. Atomy helu są lekkie, a siły między nimi słabe: energia drgań zerowych jest większa niż głębokość dołka potencjału w kryształach, więc hel zostaje cieczą.
5. 1. $\tau \approx \hbar/\Gamma = 6,58 \cdot 10^{-22}$ MeV·s/117 MeV $\approx 5,6 \cdot 10^{-24}$ s.
2. Światło przelatuje przez proton w ok. $6 \cdot 10^{-24}$ s: cząstka Δ żyje mniej więcej tyle, ile światło potrzebuje na przelot przez proton. Takich cząstek nie widać jako śladów w detektorze, tylko jako maksima w prawdopodobieństwie rozpraszania.

6. 1. Zbliżenie dwóch atomów wymagałoby upchnięcia ich elektronów w mniejszym obszarze. Zakaz Pauliego nie pozwala im zająć tych samych stanów, więc muszą przejść do stanów o krótszej długości fali, czyli większym pędzie.
2. Zasada nieoznaczoności każe za to zapłacić energią kinetyczną $\sim \hbar^2/ma^2$, która szybko rośnie przy ściskaniu. To ta energia (skutek zakazu Pauliego i zasady nieoznaczoności), a nie odpychanie elektryczne (które jest ekranowane), daje twardość materii. Dyson i Lenard (1967) udowodnili, że dzięki zakazowi Pauliego energia wiązania rośnie tylko proporcjonalnie do liczby cząstek, więc materia jest stabilna; Dyson pokazał też, że naładowane bozony takiej stabilności nie mają. FLP III-4-7
7. 1. ${}^4\text{He}$ i ${}^3\text{He}$ różnią się masą, więc da się sprawdzić, która cząstka trafiła do detektora (choćby mierząc jej energię). Drogi są rozróżnialne: prawdopodobieństwa się dodaje i znika podwojenie przy 90° .
2. Wystarczy, że rozróżnienie jest możliwe w zasadzie; nie trzeba go wykonywać. Jądro ${}^4\text{He}$ z kolei nie ma żadnej cechy, która odróżniałaby egzemplarze.
8. 1. $\lambda = h/mv \approx 2,5 \text{ pm}$, odstęp kątowy $\lambda/d \approx 25 \text{ } \mu\text{rad}$: przy detektorze odległym o $1,25 \text{ m}$ to ok. $31 \text{ } \mu\text{m}$.
2. Gorąca cząsteczka emituje fotony podczerwone; gdy jest ich dużo i mają krótką falę, każdy niesie informację o drodze (reguła 3), więc interferencja zanika (dekoherencja). Tak to zmierzono w 2004 r. dla cząsteczek C_{70} .

Fizyka · Dział 17: Amplitudy prawdopodobieństwa · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. III (Addison-Wesley 1965; New Millennium Edition 2011), rozdz. 1–4; t. I, rozdz. 26. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.