

Potencjał, przewodniki i kondensatory

Pole elektrostatyczne jest potencjalne, więc zamiast trzech składowych wektora wystarczy jedna funkcja: potencjał. Ten dział pokazuje, jak z potencjału odczytać pole i pracę, dlaczego przewodnik jest jedną ekwipotencjałą, skąd się bierze siła ostrzy, jak działa metoda obrazów i ile energii mieści się w polu między okładkami kondensatora, także wtedy, gdy wypełnia je dielektryk.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
II, rozdz. 4, 6, 8,
10

W TYM DZIALE

- 0 Prolog: ptak na przewodzie 400 kV
- 1 Potencjał i napięcie
- 2 Potencjał rozkładów i równanie Laplace'a
- 3 Przewodniki, ostrza i obrazy
- 4 Kondensatory i energia pola
- 5 Dielektryki
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: ptak na przewodzie 400 kV

Na linii wysokiego napięcia siedzi wróbel. Przewód ma względem ziemi napięcie kilkuset tysięcy woltów, a ptak nic sobie z tego nie robi. Człowiek na metalowej drabinie, który dotknie tego samego przewodu, zginie na miejscu. Różnica nie polega na tym, że wróbel jest „izolowany”: jego nogi przewodzą prąd całkiem dobrze.

Chodzi o to, że prąd płynie tylko wtedy, gdy między dwoma punktami ciała jest **różnica potencjałów**. Nogi wróbla stoją na tym samym przewodzie kilka centymetrów od siebie. Nawet przy prądzie 1000 A spadek napięcia na 5 cm przewodu wynosi kilka miliwoltów (zadanie 1.5). Człowiek na drabinie łączy przewód z ziemią: na jego ciele odkłada się całe napięcie linii.

Ten dział jest o tej właśnie wielkości: **potencjale**, czyli energii potencjalnej na jednostkę ładunku. Liczy się nie jego wartość, lecz różnice. Zobaczmy też, dlaczego przewodnik ma wszędzie ten sam potencjał i co z tego wynika: siła ostrzy, ekranowanie i kondensatory.

Pytanie na start. Ziemia ma ładunek rzędu $-6 \cdot 10^5$ C (dział 13 „Pole elektryczne i prawo Gaussa”). Jaki ma potencjał względem nieskończoności i dlaczego zupełnie tego nie zauważamy? Odpowiedź w zadaniu feynmanowskim 1.

Potencjał i napięcie

Pole ładunku punktowego jest radialne i zależy tylko od odległości. Praca, jaką wykonuje nad ładunkiem próbnym przy przejściu z punktu A do B , zależy więc tylko od odległości początkowej i końcowej, a nie od drogi: przesunięcia wzdłuż sfery nie dają pracy, a przesunięcia radialne dają tyle samo przy każdej drodze. Z zasady superpozycji to samo dotyczy pola dowolnego układu ładunków nieruchomych. Takie pole nazywamy **potencjalnym** (lekcja 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne): jego cyrkulacja po każdej zamkniętej drodze jest zerowa, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. (FLP II-4-3)

DEFINICJA · POTENCJAŁ ELEKTRYCZNY I NAPIĘCIE

$$\varphi(B) - \varphi(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi, \quad W_{A \rightarrow B} = q[\varphi(A) - \varphi(B)].$$

Potencjał to energia potencjalna na jednostkę ładunku; jednostka: wolt, $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.
Napięcie $V_{AB} = \varphi(A) - \varphi(B)$ to praca pola na jednostkę ładunku przy przejściu z A do B . Pole wskazuje kierunek najszybszego spadku potencjału (gradient, lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce). (FLP II-4-4)

Uwaga o oznaczeniach: w tym dziale napięcie oznaczamy V , a literę U rezerwujemy dla energii. Dla ładunku punktowego, z zerem w nieskończoności, $\varphi = kq/r$. Dla wielu ładunków potencjały

się po prostu dodają, i to jako liczby, nie wektory: to główna zaleta potencjału. Pole odzyskujemy, licząc trzy pochodne cząstkowe.

Powierzchnie stałego potencjału to **powierzchnie ekwipotencjalne**. Są wszędzie prostopadłe do linii pola, bo przesunięcie wzdłuż ekwipotencjali nie zmienia energii, więc pole nie ma składowej w tym kierunku. Narysowane w równych odstępach potencjału zagęszczają się tam, gdzie pole jest silne, jak poziomicie na mapie stromego zbocza.

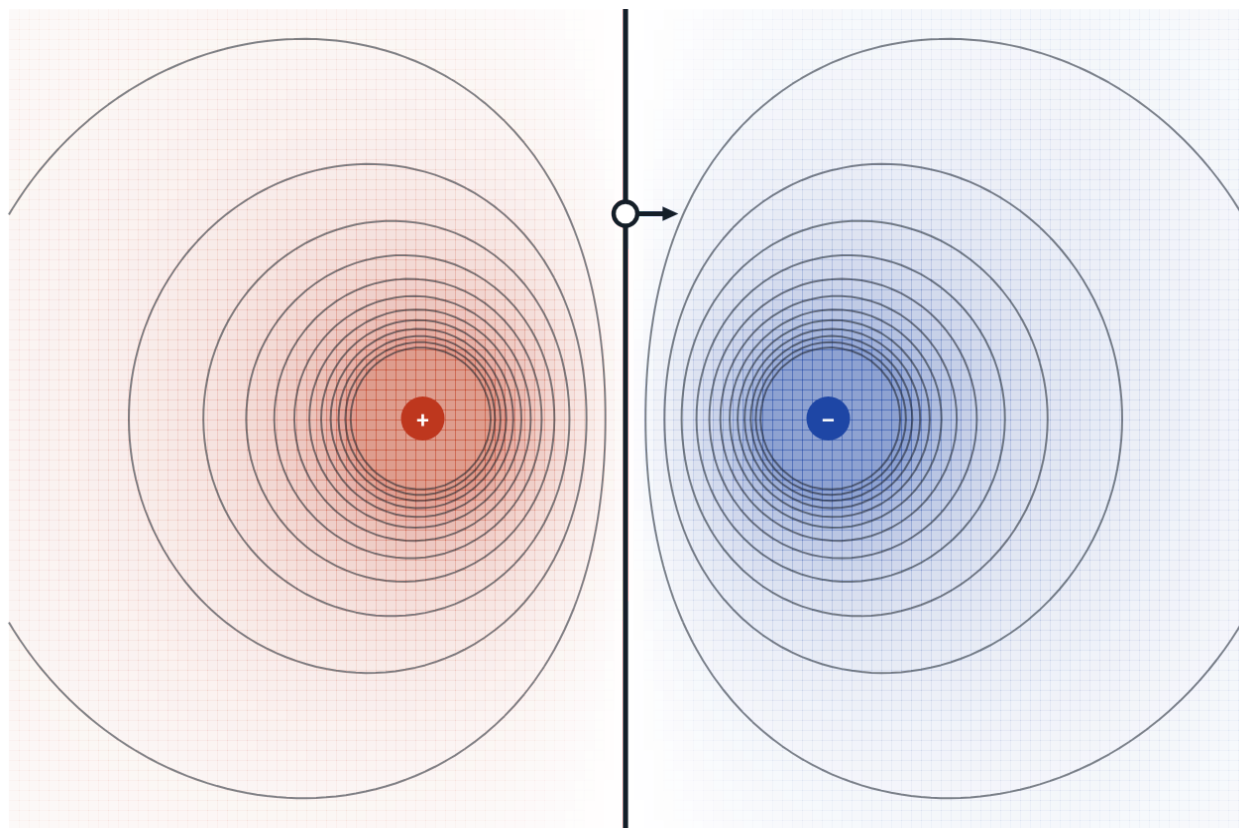
W fizyce atomowej wygodną jednostką energii jest **elektronowolt**: energia, jaką zyskuje ładunek e po przebyciu różnicy potencjałów 1 V, $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Bateria 9 V daje każdemu przepływającemu elektronowi 9 eV; energia wiązania elektronu w atomie wodoru to 13,6 eV, a w odległości promienia Bohra potencjał protonu wynosi 27,2 V.

⚠ PUŁAPKA · GDZIE JEST ZERO

Wartość potencjału zależy od umowy, gdzie przyjęto zero: w nieskończoności, na ziemi, na obudowie urządzenia. Fizyczne znaczenie mają tylko różnice. Ptak na przewodzie ma potencjał setek kilowoltów względem ziemi, a mimo to nic mu się nie dzieje. Druga pułapka: zerowy potencjał nie oznacza zerowego pola. Na płaszczyźnie symetrii dipola $\varphi = 0$, ale pole jest tam niezerowe.

SYMULACJA 1

Potencjał kilku ładunków punktowych: kolor pokazuje znak i wielkość potencjału, linie to poziomice co $0,1 \text{ kq/a}$. Przeciągaj ładunki i punkt pomiaru; strzałka w punkcie pomiaru to pole $\vec{E} = -\nabla\varphi$.



— $\varphi > 0$ — $\varphi < 0$ — poziomice φ co $0,1 \text{ kq/a}$ — $\varphi = 0$ (linia pogrubiona)

φ w punkcie pomiaru $0,000 \text{ kq/a}$

$|\vec{E}| = |\nabla\varphi|$ tam $0,177 \text{ kq/a}^2$

napięcie względem $(0; 0)$ $0,000 \text{ kq/a}$

praca na przeniesienie $+q$ z nieskończoności $0,000 \text{ kq}^2/\text{a}$

Płaszczyzna symetrii dipola (linia pogrubiona) ma potencjał zero: ładunek próbny można przenieść wzdłuż niej z nieskończoności bez pracy, choć pole na niej nie znika. Strzałka pola jest zawsze prostopadła do poziomicy i wskazuje w stronę niższego potencjału; gdzie poziomice są gęstsze, pole jest silniejsze.

Stan na rysunku: ładunki $+1$ w $(-2,0; 0,0)$, -1 w $(2,0; 0,0)$; punkt pomiaru $(0,0; 2,0)$, $\varphi = 0,000 \text{ kq/a}$, $|\vec{E}| = 0,177 \text{ kq/a}^2$.

SKĄD TO WIEMY?

Że praca pola elektrostatycznego nie zależy od drogi, sprawdzamy codziennie: na tym opiera się prawo napięć Kirchhoffa, według którego suma napięć w zamkniętym oczku obwodu jest zerowa. Volta (ok. 1800) mierzył napięcia elektrometrem, zanim istniało pojęcie pola. Uwaga: prawo to obowiązuje tylko dla pól statycznych. Gdy pole magnetyczne się zmienia, cyrkulacja $\vec{E}$ przestaje być zerowa i na tym działa każda prądnicą (dział 16 „Indukcja, równania Maxwella i fale elektromagnetyczne”).

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Elektron startuje ze spoczynku i jest przyspieszany napięciem 100 V. Jaką ma energię (w eV i w dżulach) i prędkość?
- 2 Jaki jest potencjał w odległości 1 m od ładunku 1 μC ? Jaką pracę trzeba wykonać, żeby przenieść ładunek 1 nC z nieskończoności do tego punktu?
- 3 W pewnym obszarze $\varphi(x, y) = 3x^2 - y$ (w woltach, x, y w metrach). Jakie jest pole w punkcie (1; 2)? Czy w tym obszarze są ładunki?
- 4 Między dwiema płytami jest jednorodne pole 2000 V/m, a odległość płyt wynosi 5 mm. Jakie jest napięcie? Jaką energię zyska proton, przechodząc od płyty dodatniej do ujemnej?
- 5 Przewodem linii wysokiego napięcia o oporze 0,05 Ω/km płynie prąd 1000 A. Jakie napięcie jest między nogami ptaka rozstawionymi na 5 cm?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Potencjał rozkładów i równanie Laplace'a

Dla ciągłego rozkładu ładunku potencjał to całka $\varphi(\vec{r}) = k \int \rho(\vec{r}') dV' / |\vec{r} - \vec{r}'|$, prostsza od całki na pole, bo bez wektorów. Dwa ważne wyniki:

- **Dipol:** $\varphi = kp \cos \theta / r^2$. Pole, $2kp \cos \theta / r^3$ radialnie i $kp \sin \theta / r^3$ poprzecznie, dostajemy z gradientu w kilku liniijkach. FLP II-6-4

- **Kula o ładunku Q :** na zewnątrz $\varphi = kQ/r$; na powierzchni kQ/R . W środku jednorodnie naładowanej kuli $\varphi = \frac{3}{2}kQ/R$, a wewnątrz powłoki potencjał jest stały i równy kQ/R .

2.1 Energia układu ładunków

Żeby zbudować układ ładunków, trzeba wykonać pracę przeciw ich odpychaniu. Ta praca to **energia elektrostatyczna** układu:

⚡ WZÓR · ENERGIA ELEKTROSTATYCZNA

$$U = \sum_{\text{pary } i < j} k \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad U_{\text{kuli jednorodnej}} = \frac{3}{5} \frac{kQ^2}{R}.$$

φ_i to potencjał w miejscu ładunku q_i od wszystkich pozostałych; czynnik $\frac{1}{2}$ usuwa podwójne liczenie par. FLP II-8-1

2.2 Równania Poissona i Laplace'a

Łącząc $\vec{E} = -\nabla\varphi$ z prawem Gaussa w postaci różniczkowej $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, dostajemy jedno równanie na jedną funkcję skalarną (laplasjan, lekcja 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja):

FLP II-6-1

⚡ PRAWO · RÓWNANIE POISSONA

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{a tam, gdzie nie ma ładunku: } \nabla^2 \varphi = 0 \text{ (równanie Laplace'a).}$$

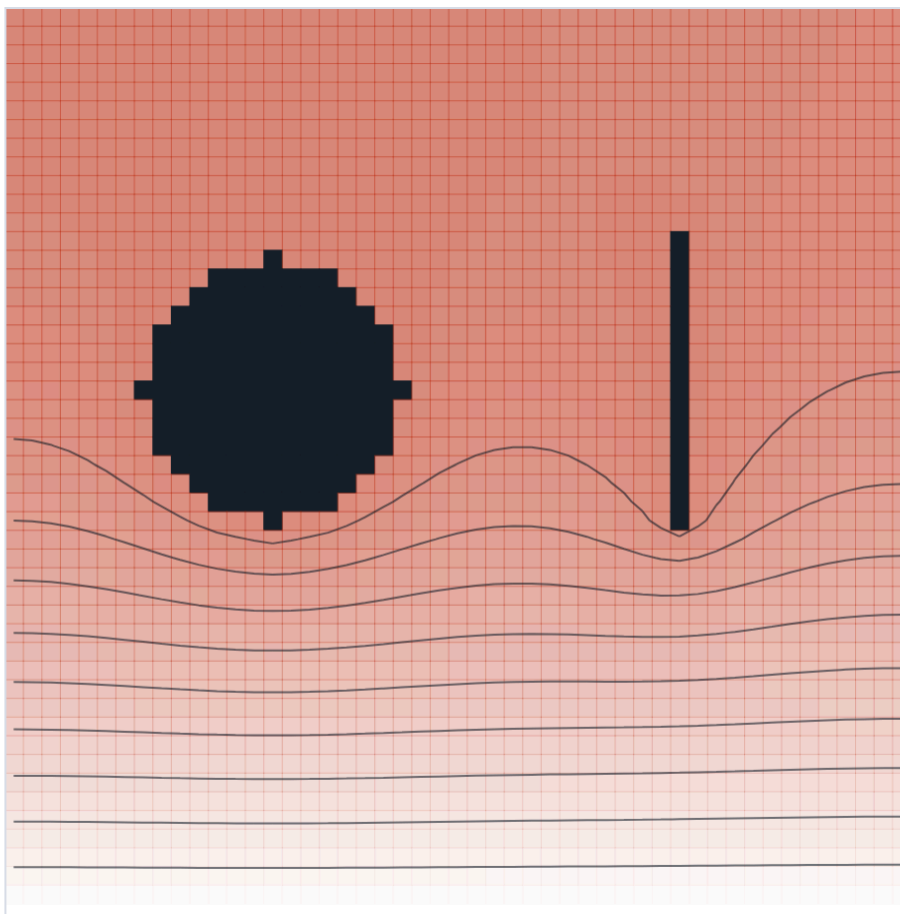
Rozwiązanie jest jednoznaczne, jeśli zadamy potencjał (lub ładunek) na wszystkich przewodnikach i warunek w nieskończoności: **twierdzenie o jednoznaczności**.

Każda funkcja, która spełnia równanie i warunki brzegowe, jest tą właściwą, nawet zgadnięta.

Równanie Laplace'a ma prostą interpretację: **potencjał w każdym punkcie jest średnią potencjału na dowolnej sferze wokół tego punktu** (byle wewnątrz sfery nie było ładunków). Na siatce: wartość w węźle to średnia z czterech sąsiadów (w 2D) lub sześciu (w 3D). Wynikają z tego dwie rzeczy. Po pierwsze, w obszarze bez ładunków potencjał nie ma maksimów ani minimów, tylko siodła, więc ładunek nie ma gdzie znaleźć trwałej równowagi (twierdzenie Earnshawa, dział 13 „Pole elektryczne i prawo Gaussa”). Po drugie, daje to sposób liczenia: zacznij od byle czego i powtarzaj uśrednianie. Ta **metoda relaksacji** zbiega do rozwiązania dla dowolnego kształtu elektrod. FLP II-7-1

SYMULACJA 2

Równanie Laplace'a metodą relaksacji: elektrody mają stały potencjał, a każdy wolny węzeł siatki zastępujemy średnią z czterech sąsiadów. Na starcie widać rozwiązanie końcowe; przycisk „Od zera” pozwala obejrzeć, jak do niego dochodzi, z nadrelaksacją i bez niej. W układzie „ostrze i kula” obie elektrody mają potencjał V_0 , a dolna krawędź to uziemiona płyta; porównaj pole tuż pod ostrzem i tuż pod kulą (L to bok pudła). Siatka jest dwuwymiarowa: „kula” to przekrój długiego walca, a „ostrze” to krawędź blachy.



— $V > 0$ — $V < 0$ — ekwipotencjałe co $0,1 V_0$ — elektrody (stały potencjał)

przebiegi siatki 3000

największa zmiana w ostatnim 0,00000

E tuż pod ostrzem 5,64 V_0/L

E tuż pod kulą 4,10 V_0/L

stosunek 1,38

Ostrze i kula mają ten sam potencjał, ale pole pod ostrzem jest 1,4 razy silniejsze niż pod kulą. Na tej siatce ostrze ma grubość jednego węzła; pole liczymy z różnicy potencjałów sąsiednich węzłów, więc wzmocnienie wychodzi mocno zaniżone. Prawdziwe ostrze o promieniu mikrometrów ma przy sobie pole tysiące razy silniejsze niż kula.

Stan na rysunku: siatka 49×49 , 3000 przebiegów z nadrelaksacją; E tuż pod ostrzem: 5,64 V_0/L , E tuż pod kulą: 4,10 V_0/L .

DLACZEGO TO DZIAŁA?

Nadrelaksacja przesuwą węzeł nie do średniej, lecz trochę za nią (ω razy dalej, zwykle $1 < \omega < 2$). Rozwiązanie końcowe jest to samo (w nim średnia już się zgadza), ale błędy o dużej skali giną dziesiątki razy szybciej. Tak liczone pola w lampach elektronowych, a dziś podobnie, tylko szybszymi metodami, liczą je programy do projektowania układów scalonych i izolatorów wysokiego napięcia.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 35 min

- 1 W wierzchołkach kwadratu leżą ładunki $+q, +q, -q, -q$ (jednoimienne sąsiadują ze sobą). Ile wynosi potencjał w środku kwadratu? A pole?

- 2 Jaką pracę trzeba wykonać, żeby z nieskończoności złożyć trzy ładunki q w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a ?

- 3 Z potencjału dipola $\varphi = kp \cos \theta / r^2$ wyprowadź radialną i poprzeczną składową pola.

- 4 Pokaż, że potencjał w środku jednorodnie naładowanej kuli jest równy $\frac{3}{2}kQ/R$.

- 5 Sprawdź, że $\varphi = x^2 - y^2$ spełnia równanie Laplace'a w 2D. Gdzie ma punkt krytyczny i jakiego typu? Na siatce o kroku 1 sprawdź regułę średniej w punkcie $(1; 1)$.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

3 Przewodniki, ostrza i obrazy

W przewodniku w równowadze pole jest zerowe (dział 13 „Pole elektryczne i prawo Gaussa”), więc między dowolnymi dwoma jego punktami nie ma napięcia: **cały przewodnik jest jedną ekwipotencjałą**. Jego powierzchnia jest powierzchnią ekwipotencjalną, a pole tuż przy niej jest do niej prostopadłe i wynosi σ/ϵ_0 . FLP II-6-6

3.1 Dlaczego ostrza

Połączmy przewodem dwie odległe kule o promieniach R_1 i R_2 . Mają ten sam potencjał $kQ_1/R_1 = kQ_2/R_2$, więc ładunki są proporcjonalne do promieni, a pola przy powierzchni $E = kQ/R^2 = \varphi/R$ są **odwrotnie proporcjonalne do promieni**. Mała kula ma mniej ładunku, ale

silniejsze pole. Ostrze to „kula” o bardzo małym promieniu: przy potencjale 1 kV ostrze o promieniu 1 μm ma przy sobie pole rzędu 10^9 V/m.

Skutki: z ostrzy ładunek ucieka do powietrza (wyładowanie koronowe, ognie świętego Elma na masztach); przewody wysokiego napięcia i elektrody generatorów są gładkie i grube; piorunochron jest wysoki i dobrze uziemiony, by to od niego, a nie od dachu, wychodziło wyładowanie oddolne na spotkanie piorunowi (pomiar Moore’a i współpracowników (ok. 2000 r.) sugerują zresztą, że tępe, zaokrąglone zwody działają lepiej od ostrych). Mikroskop polowy (Müller, 1936) to ostra igła, z której silne pole wyrzuca elektrony; w jego wersji jonowej pole rzędu 10^{10} V/m jonizuje atomy gazu tuż przy ostrzu i w 1955 r. pozwoliło po raz pierwszy zobaczyć pojedyncze atomy. (FLP II-6-12)

3.2 Metoda obrazów

Ładunek q w odległości h nad uziemioną płaszczyzną metalową indukuje w niej ładunek przeciwnego znaku. Rozkład tego ładunku nie jest znany z góry, ale twierdzenie o jednoznaczności pozwala go zgadnąć. Para: q oraz fikcyjny ładunek $-q$ w odbiciu lustrzanym, daje na płaszczyźnie potencjał zero, czyli dokładnie warunek brzegowy. W obszarze nad płaszczyzną pole jest więc takie jak pole tej pary. (FLP II-6-7)

WYNIK · ŁADUNEK PRZY UZIEMIIONEJ PŁASZCZYŹNIE I KULI

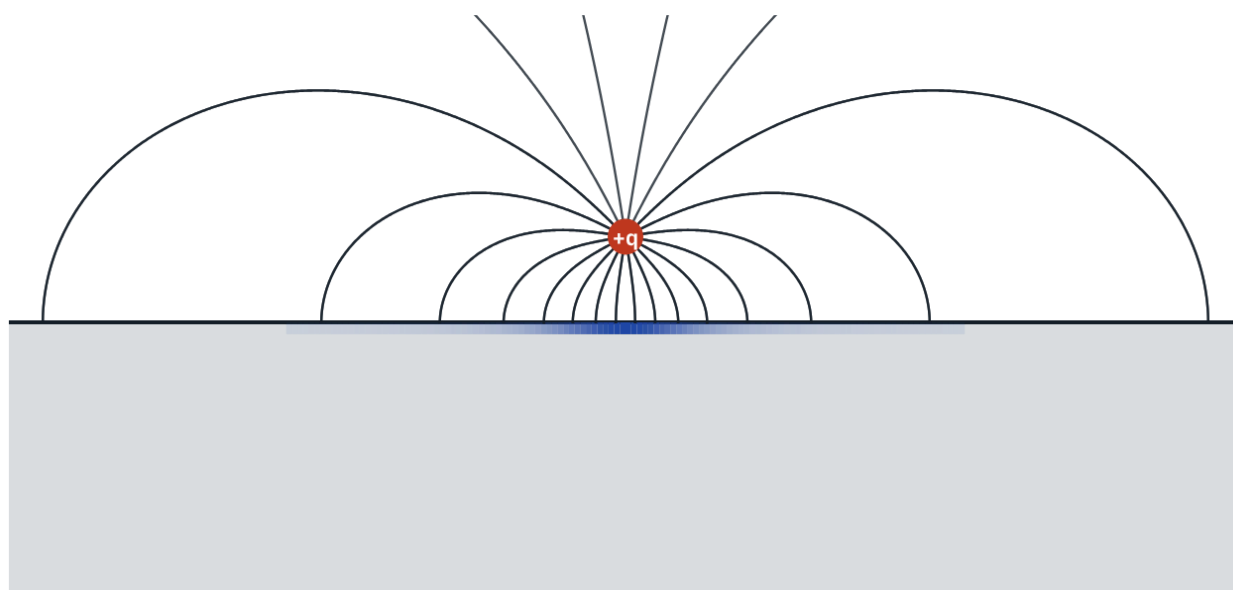
$$F = \frac{kq^2}{(2h)^2}, \quad \sigma(x) = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}, \quad \text{kula: } q' = -q \frac{R}{d} \text{ w odległości } \frac{R^2}{d} \text{ od środka.}$$

Całkowity ładunek indukowany na płaszczyźnie to $-q$; na uziemionej kuli $-qR/d$.

(FLP II-6-8, II-6-9)

SYMULACJA 3

Metoda obrazów. Ładunek $+q$ nad uziemioną płaszczyzną lub obok uziemionej kuli: linie pola, rozkład indukowanego ładunku (pod spodem jako wykres) i siła. Włącz ładunek obrazowy, żeby zobaczyć, że linie „wpadające” w metal prowadzą do niego.



— ładunek $+q$ - - - ładunek obrazowy (fikcyjny) — indukowany ładunek powierzchniowy — linie pola

siła przyciągania $0,250 \text{ kq}^2/\text{a}^2$

ładunek indukowany (całka σ) $-1,000 \text{ q}$

σ najbliższej ładunku $-0,159 \text{ q}/\text{a}^2$

Pole nad płaszczyzną jest dokładnie takie jak pole pary ładunków: $+q$ i fikcyjnego $-q$ po drugiej stronie, w tej samej odległości. Linie pola trafiają w przewodnik prostopadle, a całkowity ładunek indukowany to dokładnie $-q$.

Stan na rysunku: ładunek $+q$ w odległości $1,00 \text{ a}$ od uziemionej płaszczyzny; siła $0,250 \text{ kq}^2/\text{a}^2$, ładunek indukowany $-1,000 \text{ q}$.

⚠️ PUŁAPKA · ŁADUNEK OBRAZOWY NIE ISTNIEJE

Wewnątrz metalu pole jest zerowe. Ładunek obrazowy to narzędzie rachunkowe, ważne tylko po stronie, w której leży ładunek rzeczywisty. Fizycznie istnieje ładunek indukowany na powierzchni, rozłożony według $\sigma(x)$.

- 1 Kule o promieniach 1 cm i 5 cm, daleko od siebie, połączono cienkim przewodem i naładowano łącznie ładunkiem 12 nC. Jak ładunek się rozdzieli? Jaki jest potencjał i stosunek pól przy powierzchniach?
- 2 Powietrze ulega przebiciu przy ok. 3 MV/m. Do jakiego największego potencjału można naładować gładką kulę o promieniu 15 cm?
- 3 Kulka z ładunkiem 1 nC wisi 1 cm nad uziemioną blachą. Jaka siła ją przyciąga? Jaka jest największa gęstość ładunku indukowanego?
- 4 Dlaczego linie pola zawsze dochodzą do powierzchni przewodnika prostopadle? Co by się stało, gdyby miały składową styczną?
- 5 Ładunek q leży w odległości $d = 2R$ od środka uziemionej kuli o promieniu R . Ile ładunku indukuje się na kuli i gdzie leży obraz?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

4 Kondensatory i energia pola

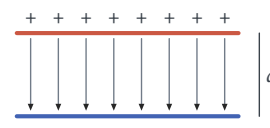
Dwa przewodniki z ładunkami $+Q$ i $-Q$ to **kondensator**. Napięcie między nimi jest proporcjonalne do Q , bo pole (a więc i całka z pola) jest proporcjonalne do ładunku. Stała proporcjonalności zależy tylko od geometrii. (FLP II-6-10)

DEFINICJA · POJEMNOŚĆ

$$C = \frac{Q}{V}, \quad C_{\text{płaski}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad C_{\text{kuli}} = 4\pi\epsilon_0 R, \quad C_{\text{kulisty}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

Jednostka: farad, $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$. Równolegle pojemności się dodają, szeregowo dodają się ich odwrotności.

Farad to ogromna pojemność. Płaski kondensator o pojemności 1 F z odstępem 1 mm musiałby mieć okładki o powierzchni ponad 100 km², a cała Ziemia jako odosobniona kula ma pojemność ok. 710 μF. Typowe kondensatory w elektronice mają od pikofaradów do milifaradów; superkondensatory osiągają tysiące faradów dzięki



warstwie podwójnej o grubości nanometrów na węglu o powierzchni rzędu tysiąca m² na gram (przykład 14.4).

4.1 Energia w polu

Ładowanie kondensatora to przenoszenie kolejnych porcji dq z okładki ujemnej na dodatnią przy rosnącym napięciu q/C . Całka daje energię:

⚡ WZÓR · ENERGIA KONDENSATORA I GĘSTOŚĆ ENERGII POLA

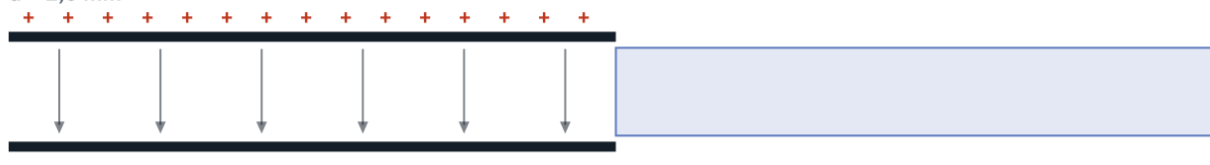
$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV, \quad u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Dla kondensatora płaskiego $\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot Ad$: energia jest „rozlana” w objętości pola z gęstością u . Wzór na u obowiązuje dla każdego pola elektrycznego, nie tylko w kondensatorach. FLP II-8-5

Siłę między okładkami najprościej liczyć z energii. Przy stałym ładunku (bateria nie pracuje) praca przy rozsuwaniu okładek o dx idzie w całości na energię pola: $|F| = dU/dx = Q^2/(2\varepsilon_0 A) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A$. Okładki przyciągają się z „ciśnieniem” równym gęstości energii pola. Siła nie zależy od tego, czy kondensator jest podłączony do baterii; zależy od tego tylko bilans energii przy przesuwaniu okładek. FLP II-8-2

SYMULACJA 4

Kondensator płaski $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Zmieniaj odległość okładek i wsuwaj płytkę dielektryka, raz z kondensatorem podłączonym do baterii, raz odłączonym. Słupki pokazują bilans energii względem zapamiętanego stanu: zmianę energii pola, pracę baterii i pracę, którą wykonujesz Ty.

 $d = 2,0\text{ mm}$ zmiana energii pola ΔU : 0,000 μJ praca baterii: 0,000 μJ Twoja praca: 0,000 μJ

— ładunek swobodny na okładkach — ładunek związany w dielektryku — linie pola

C 44,3 pF

Q 4,43 nC

V 100,0 V

E 50,0 kV/m

 $U = \frac{1}{2}CV^2$ 0,221 μJ

siła między okładkami 0,111 mN

siła wciągająca dielektryk 0,009 mN

Zmień odległość okładek albo wsuń dielektryk i obserwuj bilans energii względem zapamiętanego stanu. Pole $E = V/d$ jest takie samo w powietrzu i w dielektryku; nad dielektrykiem okładki niosą κ razy więcej ładunku.

Stan na rysunku: okładki $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$, $d = 2,0\text{ mm}$, dielektryk $\kappa = 5,0$ wsunięty w 0%, podłączony do baterii; $C = 44,3\text{ pF}$, $V = 100,0\text{ V}$, $Q = 4,43\text{ nC}$, $U = 0,221\text{ }\mu\text{J}$.

⚠️ PUŁAPKA · GDZIE ZNIKA POŁOWA ENERGII

Bateria o napięciu V , ładując kondensator, przenosi ładunek $Q = CV$ i wykonuje pracę $QV = CV^2$. W kondensatorze zostaje tylko połowa, $\frac{1}{2}CV^2$. Druga połowa zawsze zamienia się w ciepło w przewodach (i trochę w promieniowanie), niezależnie od ich oporu: przy mniejszym oporze płynie większy prąd przez krótszy czas.

- 1 Jaka powierzchnię musiałyby mieć okładki kondensatora płaskiego o pojemności 1 F i odstępie 1 mm?
- 2 Kondensatory 2 μF i 3 μF połączono szeregowo i podłączono do 10 V. Jaka jest pojemność zastępcza, ładunek i napięcie na każdym? A przy połączeniu równoległym?
- 3 Ile energii mieści kondensator elektrolityczny 1000 μF naładowany do 16 V?
- 4 Jaka jest gęstość energii pola elektrycznego tuż poniżej progu przebicia powietrza (3 MV/m)? Porównaj z benzyną (ok. 34 MJ/l).
- 5 Wyprowadź pojemność kondensatora kulistego (kule o promieniach $a < b$). Co dostajesz dla $b \rightarrow \infty$ i dla $b - a \ll a$?

podstawowe średnie feynmanowskie

5 Dielektryki

Faraday zauważył (1837), że wypełnienie kondensatora izolatorem, np. szelakiem albo szkłem, zwiększa jego pojemność. Izolator nie przewodzi, ale jego cząsteczki się **polaryzują**: pole przesuwca nieco elektrony względem jąder (polaryzacja elektronowa) albo obraca cząsteczki, które już mają moment dipolowy, jak woda (polaryzacja orientacyjna). Wewnątrz materiału ładunki dipoli się kompensują, ale na powierzchniach przy okładkach zostaje **ładunek związany** o znaku przeciwnym do ładunku okładki. Częściowo kompensuje on ładunek swobodny i osłabia pole. (FLP II-10-1, II-10-3)

WYNIK · KONDENSATOR Z DIELEKTRYKIEM

$$C = \kappa C_0, \quad E = \frac{E_0}{\kappa} \text{ (przy stałym ładunku),} \quad \sigma_{\text{zw}} = -\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\sigma.$$

κ to **przenikalność elektryczna względna** (stała dielektryczna): dla powietrza 1,0006, dla teflonu 2,1, szkła 4–10, wody ok. 80, ceramiki z tytanianu baru nawet kilka tysięcy. W ośrodku siła między ładunkami jest κ razy mniejsza niż w próżni, o ile ładunki są daleko od siebie w skali cząsteczek. (FLP II-10-4)

Duża przenikalność wody ($\kappa \approx 80$) wynika z tego, że jej cząsteczki są silnie polarne i łatwo się obracają. Ma ogromne znaczenie dla chemii życia: energia przyciągania jonów Na^+ i Cl^- w wodzie jest 80 razy mniejsza niż w próżni, porównywalna z energią ruchów cieplnych, dlatego sól się rozpuszcza (przykład 14.6). (FLP II-11-3)

Każdy dielektryk ma **wytrzymałość elektryczną**, czyli pole, przy którym ulega przebiciu: powietrze ok. 3 MV/m, papier olejowy kilkadziesiąt MV/m, folia polipropylenowa kilkaset MV/m. Dobry materiał na kondensator łączy dużą przenikalność z dużą wytrzymałością, bo gęstość energii to $\frac{1}{2}\kappa\epsilon_0 E^2$.

Dielektryk jest **wciągany** do kondensatora. Siła pochodzi od pola brzegowego przy krawędzi okładek, które polaryzuje wystającą część płytki; łatwiej jednak policzyć ją z energii (symulacja 4). Tak samo ciecz dielektryczna podnosi się między pionowymi okładkami (zadanie feynmanowskie 7). (FLP II-10-5)

SKĄD TO WIEMY?

Faraday zmierzył stosunek pojemności dwóch identycznych kondensatorów kulistych, jednego z powietrzem, drugiego z badanym materiałem, ładując jeden i dzieląc ładunek z drugim. Nazwał tę wielkość „specific inductive capacity”.

Mikroskopowo przenikalność da się policzyć z polaryzowalności cząsteczek (wzór Clausiusa-Mossottiego), a jej zależność od temperatury odróżnia cząsteczki polarne od niepolarnych: orientacja dipoli maleje z temperaturą jak $1/T$.

(FLP II-11-3, II-11-5)

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Kondensator powietrzny 100 pF naładowano do 100 V i odłączono. Potem wsunięto do niego szkło ($\kappa = 5$) wypełniające całą przestrzeń. Jakie jest nowe napięcie i energia? Gdzie się podzieliła różnica?
- 2 Ten sam kondensator, ale podłączony do baterii 100 V. Jak zmieni się ładunek i energia? Jaką pracę wykona bateria i jaką siły zewnętrzne?
- 3 Jony Na^+ i Cl^- są odległe o 0,5 nm. Jaka jest energia ich przyciągania w próżni, a jaka w wodzie ($\kappa = 80$)? Porównaj z $k_B T \approx 0,026$ eV.
- 4 Folia polipropylenowa ma $\kappa \approx 2,2$ i wytrzymałość ok. 600 MV/m. Jaka jest największa gęstość energii w kondensatorze foliowym? Porównaj z akumulatorem litowo-jonowym (ok. 700 Wh/l).

- 5 Między okładkami kondensatora płaskiego (odstęp d) leży płytka dielektryka o grubości $d/2$ zakrywająca całą powierzchnię. Jaka jest pojemność w porównaniu z pustym kondensatorem C_0 ?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

☰ METODA DLA POTENCJAŁU I KONDENSATORÓW

1. **Potencjał zamiast pola**, gdy nie ma symetrii: dodawaj liczby kq/r , a pole licz z gradientu.
2. **Pole z symetrii** (prawo Gaussa), a potencjał z całki $-\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$, gdy symetria jest.
3. **Pojemność**: przyjmij ładunek $\pm Q$, znajdź pole, scałkuj do napięcia, podziel: $C = Q/V$.
4. **Energia**: $\frac{1}{2}CV^2$ albo całka z $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ po objętości; siły z pochodnej energii przy stałym Q .
5. **Bateria podłączona czy nie?** Stałe V czy stałe Q decyduje o bilansie energii.
6. **Sprawdzenie**: jednostki ($V = J/C$, $F = C/V$), znaki i przypadki graniczne (cienka szczelina $\rightarrow$ kondensator płaski).

Przykład 14.1

Elektron w kineskopie

W kineskopie kolorowego telewizora elektrony przyspieszało napięcie ok. 25 kV. Jaką osiągały prędkość? Czy rachunek nierelatywistyczny wystarcza?

1. Energia kinetyczna: $E_k = e \cdot 25 \text{ kV} = 25 \text{ keV}$. Nierelatywistycznie $v = \sqrt{2E_k/m} \approx 0,313c$.
2. Relatywistycznie (dział 7 „Układy odniesienia i szczególna teoria względności”): $\gamma = 1 + E_k/mc^2 = 1 + 25/511 \approx 1,049$, $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} \approx 0,302$.

Wynik: ok. $0,30c$, czyli 90 000 km/s. Wzór nierelatywistyczny zawyża prędkość o ok. 4%.

Sprawdzenie: $E_k/mc^2 \approx 5\%$, a poprawka do prędkości jest tego samego rzędu ✓.

Przykład 14.2

Kopuła generatora Van de Graaffa

Kopuła generatora ma promień 20 cm. Do jakiego potencjału można ją naładować w powietrzu i jaki ładunek wtedy niesie? Co zrobi zadziór o promieniu 1 mm na jej powierzchni?

- 1 Pole przy powierzchni kuli $E = \varphi/R$; przebicie przy 3 MV/m, więc $\varphi_{\max} = 3 \cdot 10^6 \cdot 0,2 = 600$ kV.
- 2 $Q = R\varphi/k \approx 13$ μC .
- 3 Zadziór to lokalnie mały promień krzywizny: pole przy nim jest rzędu φ/r z $r = 1$ mm, setki razy powyżej progu przebicia (w praktyce mniej, bo zadziór nie jest odosobnioną kulą, ale wciąż wielokrotnie więcej). Ładunek zacznie z niego uciekać już przy kilku-kilkudziesięciu kilowoltach.

Wynik: ok. 600 kV i 13 μC . Kopuła musi być gładka i duża.

Sprawdzenie: szkolne generatory z kopułą o promieniu ok. 10 cm dają ok. 200–300 kV, co zgadza się z oszacowaniem ✓.

Przykład 14.3

Kondensator z dwóch płytek

Okładki $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ odległe o 1 mm podłączono do 100 V. Oblicz pojemność, ładunek, pole, energię i siłę przyciągania okładek.

- 1 $C = \epsilon_0 A/d = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01/0,001 \approx 88,5$ pF.
- 2 $Q = CV \approx 8,85$ nC; $E = V/d = 10^5$ V/m.
- 3 $U = \frac{1}{2}CV^2 \approx 0,44$ μJ ; $F = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 A \approx 0,44$ mN.

Wynik: 88,5 pF, 8,85 nC, 0,44 μJ , 0,44 mN, siła jak ciężar 45 mg.

Sprawdzenie: $u \cdot Ad = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \approx 0,44$ μJ ✓; dla płaskiego kondensatora $F = U/d$ ✓.

Przykład 14.4

Superkondensator kontra akumulator

Superkondensator 3000 F na napięcie 2,7 V waży ok. 0,5 kg. Ile energii mieści? Porównaj z akumulatorem litowo-jonowym (ok. 250 Wh/kg).

- 1 $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 3000 \cdot 2,7^2 \approx 10,9 \text{ kJ} \approx 3 \text{ Wh}$.
- 2 Na kilogram: ok. 6 Wh/kg, ok. 40 razy mniej niż w akumulatorze.
- 3 Skąd 3000 F? Warstwa podwójna jonów na powierzchni węgla aktywnego ma grubość ok. 1 nm i pojemność rzędu 0,1 F na m²; węgiel ma ok. 1000 m² powierzchni na gram. Dwie elektrody działają jak dwa kondensatory połączone szeregowo, więc potrzeba czterokrotnie więcej powierzchni: wychodzi ok. 100 g węgla.

Wynik: ok. 11 kJ. Superkondensator przegrywa z akumulatorem gęstością energii, ale wygrywa mocą i trwałością: oddaje energię w sekundy i znosi setki tysięcy cykli.

Sprawdzenie: niskie napięcie (2,7 V) wynika z rozkładu elektrolitu, a energia rośnie jak V^2 , stąd mała gęstość energii ✓.

Przykład 14.5

Energia elektrostatyczna jądra uranu

Jądro uranu-238 (92 protony) ma promień ok. $R = 1,2 \cdot 238^{1/3} \text{ fm}$. Oszacuj jego energię elektrostatyczną, traktując je jak jednorodnie naładowaną kulę, i porównaj z energią dwóch połówek po rozszczepieniu. Przyda się $ke^2 = 1,44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$.

- 1 $R \approx 7,4 \text{ fm}$; $U = \frac{3}{5}kZ^2e^2/R = 0,6 \cdot 1,44 \cdot 92^2/7,4 \approx 980 \text{ MeV}$.
- 2 Dwie połówki: $Z = 46$, $R = 1,2 \cdot 119^{1/3} \approx 5,9 \text{ fm}$, razem $2 \cdot 310 \approx 620 \text{ MeV}$.
- 3 Różnica ok. 360 MeV. Część pochłania wzrost energii powierzchniowej (dwie mniejsze kule mają większą łączną powierzchnię; ze wzoru półempirycznego wychodzi ok. 180 MeV). (FLP II-8-4)

Wynik: rozszczepienie uwalnia w praktyce ok. 200 MeV, i to właśnie energia elektrostatyczna odpychania protonów. „Energia jądrowa” bomby i reaktora to w dużej mierze energia elektryczna.

Sprawdzenie: po rozszczepieniu fragmenty rozlatują się z energią kinetyczną ok. 170 MeV, porównywalną z ich odpychaniem w chwili rozdzielania ✓.

Przykład 14.6

Dlaczego sól rozpuszcza się w wodzie

Porównaj energię wiązania pary jonów $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ oddległych o 0,5 nm w próżni i w wodzie ($\kappa \approx 80$) z energią ruchów cieplnych $k_B T \approx 0,026 \text{ eV}$.

- 1 W próżni: $ke^2/r = 1,44 \text{ eV} \cdot \text{nm} / 0,5 \text{ nm} \approx 2,9 \text{ eV}$.
- 2 W wodzie: $2,9/80 \approx 0,036 \text{ eV}$.

Wynik: w wodzie przyciąganie jest porównywalne z $k_B T$, więc zderzenia cieplne rozdzielają jony. W benzynie ($\kappa \approx 2$) sól się nie rozpuszcza.

Sprawdzenie: w kryształach soli jon ma wielu sąsiadów i energia sieci to ok. 8 eV na parę (stała Madelunga 1,75); przy rozpuszczaniu energię sieci niemal w całości oddaje hydratacja jonów (otaczanie ich przez dipole wody), więc bilans jest bliski zera; rząd wielkości się zgadza ✓. FLP II-8-3

7

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

✗ „Ptak na przewodzie jest bezpieczny, bo ma izolowane nogi.”

Nogi przewodzą. Ptak jest bezpieczny, bo między jego nogami prawie nie ma różnicy potencjałów.

✗ „Wysokie napięcie zawsze zabija.”

Iskra z klamki po przejściu po dywanie to kilka do kilkunastu kilowoltów, ale energia rzędu milidżuli (ciało ma pojemność ok. 100 pF). Groźny jest prąd płynący przez ciało przez dłuższy czas, a to zależy od źródła, nie tylko od napięcia.

✗ „Tam, gdzie potencjał jest zerowy, pole też jest zerowe.”

Pole to spadek potencjału, nie jego wartość. Na płaszczyźnie symetrii dipola $\varphi = 0$, a pole jest niezerowe.

✗ „Kondensator przechowuje ładunek.”

Całkowity ładunek naładowanego kondensatora jest zerowy: $+Q$ i $-Q$. Kondensator przechowuje energię w polu między rozdzielonymi ładunkami.

× „Dielektryk zwiększa ładunek na okładkach.”

Tylko gdy kondensator jest podłączony do baterii. Odłączony ma stały ładunek; dielektryk zmniejsza wtedy napięcie, pole i energię.

× „Piorunochron rozładowuje chmurę i zapobiega piorunom.”

Tak myślał Franklin. W rzeczywistości piorunochron przechwytuje wyładowanie i odprowadza prąd do ziemi z pominięciem budynku; prądu koronowego z ostrza jest o wiele rzędów za mało, by rozładować chmurę.

8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

- 1 **Potencjał Ziemi.** Ziemia ma ładunek ok. $-6 \cdot 10^5$ C. Jaka jest jej pojemność jako odosobnionej kuli i jaki ma potencjał względem nieskończoności? Dlaczego tego nie zauważamy?
- 2 **Kule na przewodzie.** Dlaczego w zadaniu o dwóch połączonych kulach ważne jest, że są „daleko od siebie”? Co się zmieni, gdy się zbliżą? Jak to się ma do ostrza na kuli, które nie jest odosobnione?
- 3 **Rozsuwanie okładek.** Kondensator płaski jest podłączony do baterii. Rozsuwasz okładki z d do $2d$. Energia pola spada o połowę, a jednak musisz wykonać dodatnią pracę. Gdzie idzie energia?
- 4 **Energia ładunku punktowego.** Policz energię pola $\int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dV$ wokół kulki o ładunku e i promieniu a . Co się dzieje dla $a \rightarrow 0$? Przy jakim a ta energia równałaby się $m_e c^2$?
- 5 **Odrywanie od lustra.** Ładunek q leży w odległości h od uziemionej płaszczyzny. Jaka pracę trzeba wykonać, żeby odsunąć go do nieskończoności? Dlaczego nie $kq^2/2h$, jak dla pary q i $-q$?

6 **Kondensator Ziemia-jonosfera.** Między powierzchnią Ziemi a dobrze przewodzącą warstwą atmosfery na wysokości ok. 50 km jest napięcie ok. 300 kV. Oszacuj pojemność tego kondensatora i zgromadzoną w nim energię.

7 **Ciecz wciągana w pole.** Dwie pionowe okładki zanurzone w oleju ($\kappa = 2,2$, gęstość 900 kg/m^3) i podłączono do napięcia dającego pole 1 MV/m . O ile olej podniesie się między nimi?

8 **Klatka z siatki.** Dlaczego siatka metalowa z oczkami o boku $1\text{--}2 \text{ mm}$ (np. w drzwiczkach kuchenki mikrofalowej) zatrzymuje fale o długości 12 cm , a przepuszcza światło? Wykorzystaj wynik symulacji 2 dla klatki z prętów.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Jak związane są pole i potencjał?

$$\vec{E} = -\nabla\varphi; \varphi(B) - \varphi(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

2 Dlaczego poziomice potencjału są prostopadłe do linii pola?

Przesunięcie wzdłuż ekwipotencjali nie zmienia energii, więc pole nie ma składowej wzdłuż niej.

3 Co mówi równanie Laplace'a o potencjale w obszarze bez ładunków?

Potencjał w każdym punkcie jest średnią z otoczenia; nie ma lokalnych maksimów ani minimów wewnątrz obszaru.

4 Dwie połączone kule mają promienie R i $10R$. Przy której pole jest silniejsze?

Przy mniejszej, 10 razy: $E = \varphi/R$.

5 Jaka siła działa na ładunek q w odległości h od uziemionej płaszczyzny?

$kq^2/(2h)^2$, przyciągająca.

6 Ile wynosi energia kondensatora i gęstość energii pola?

$$\frac{1}{2}CV^2; \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

7 Odłączony kondensator wypełniono dielektrykiem o $\kappa = 4$. Co się stanie z napięciem i energią?

Oba spadną 4 razy; ładunek się nie zmieni.

8 Dlaczego sól rozpuszcza się w wodzie?

Przenikalność wody ($\kappa \approx 80$) osłabia przyciąganie jonów do poziomu energii ruchów cieplnych.

POTENCJAŁ

$$\vec{E} = -\nabla\varphi; \varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s};$$

$$W_{A \rightarrow B} = q(\varphi_A - \varphi_B)$$

ładunek punktowy kq/r ; dipol $kp \cos \theta / r^2$;

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$; bez ładunków $\nabla^2\varphi = 0$
(średnia z otoczenia)

energia układu $\frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$; kula jednorodna
 $\frac{3}{5} kQ^2/R$

przewodnik: ekwipotencjała; kula $E =$
 φ/R ; obraz w płaszczyźnie: $-q$, $F =$
 $kq^2/4h^2$

KONDENSATORY I DIELEKTRYKI

$C = Q/V$; płaski $\epsilon_0 A/d$; kula $4\pi\epsilon_0 R$;
kulisty $4\pi\epsilon_0 ab/(b-a)$

równoległe $C_1 + C_2$; szeregowo $1/C =$
 $1/C_1 + 1/C_2$

$U = \frac{1}{2} CV^2 = Q^2/2C$; $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$; siła
okładek $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A$

dielektryk: $C = \kappa C_0$; przy stałym Q : $E =$
 E_0/κ ; $u = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 E^2$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. II, rozdz. 4 (części 3–4: potencjał), 6 (przewodniki, obrazy, kondensatory), 8 (energia elektrostatyczna), 10 (dielektryki).
- **Dla chętnych:** t. II, rozdz. 7 (metody liczenia pól, siatka), 9 (elektryczność atmosfery), 11 (dielektryki od środka).

Następny dział: **Prąd i pole magnetyczne**. Gdy ładunki zaczynają płynąć, pojawia się nowe pole, które działa tylko na ładunki w ruchu. Zobaczymy, że jest ono w dużej mierze relatywistycznym skutkiem pola elektrycznego, a do jego opisu potrzebna będzie rotacja i twierdzenie Stokesa.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $100 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$; $v = \sqrt{2E/m} \approx 5,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, ok. 2% prędkości światła.
2. $\varphi = kq/r \approx 8990 \text{ V}$; $W = q\varphi \approx 9 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.
3. $\vec{E} = -\nabla\varphi = (-6x; 1)$, w punkcie $(1; 2)$: $(-6; 1) \text{ V/m}$. $\nabla^2\varphi = 6 \neq 0$, więc są: gęstość $\rho = -6\varepsilon_0 \approx -5,3 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^3$ (część 2).
4. $V = Ed = 10 \text{ V}$; proton zyskuje 10 eV.
5. Opór 5 cm przewodu to $2,5 \cdot 10^{-6} \Omega$; $V = IR = 2,5 \text{ mV}$. Przez ptaka popłynie znikomy prąd. (Przy prądzie przemiennym ciało ptaka co pół okresu ładuje się i rozładowuje do potencjału linii, ale ten prąd też jest bardzo mały.)

Zadania • część 2

1. $\varphi = 0$ (wszystkie odległości równe, suma ładunków zero). Pole nie jest zerowe: skierowane od pary dodatniej do ujemnej, o wartości $4\sqrt{2}kq/a^2$ dla boku a .
2. Trzy pary: $U = 3kq^2/a$.
3. $E_r = -\partial\varphi/\partial r = 2kp \cos\theta/r^3$; $E_\theta = -\frac{1}{r}\partial\varphi/\partial\theta = kp \sin\theta/r^3$. Na osi ($\theta = 0$) $2kp/r^3$, w płaszczyźnie prostopadłej kp/r^3 , jak w dziale 13.
4. $\varphi(0) = \varphi(R) + \int_0^R E dr = kQ/R + \int_0^R kQr/R^3 dr = kQ/R + kQ/2R$.
5. $\partial_{xx} + \partial_{yy} = 2 - 2 = 0$. Punkt krytyczny $(0; 0)$ to siodło. Sąsiedzi $(0; 1)$, $(2; 1)$, $(1; 0)$, $(1; 2)$ mają wartości $-1, 3, 1, -3$, średnia 0, równa $\varphi(1; 1) = 0$.

Zadania • część 3

1. $Q_1 : Q_2 = 1 : 5$; 2 nC i 10 nC. $\varphi = kQ_1/R_1 \approx 1800 \text{ V}$. Pole przy małej kuli 5 razy silniejsze: ok. 180 kV/m wobec 36 kV/m.
2. $\varphi_{\max} = E_b R = 450 \text{ kV}$. Duże generatory Van de Graaffa mają kopuły o promieniu metra i więcej albo pracują w sprężonym gazie.
3. $F = kq^2/(2h)^2 \approx 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ N}$. $|\sigma|_{\max} = q/(2\pi h^2) \approx 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, pod kulą.
4. Składowa styczna przesuwalaby swobodne ładunki wzdłuż powierzchni; ruch trwa, dopóki jej nie wyzeruje. W równowadze powierzchnia jest ekwipotencjałą, a pole jest prostopadłe do ekwipotencjali.
5. $q' = -q/2$, w odległości $R/2$ od środka. Kula „przechwytuje” tylko połowę linii pola ładunku q .

Zadania • część 4

1. $A = Cd/\varepsilon_0 \approx 1,1 \cdot 10^8 \text{ m}^2$, kwadrat o boku ok. 10,6 km.
2. Szeregowo: 1,2 μF , na obu ten sam ładunek 12 μC , napięcia 6 V i 4 V (większe na mniejszej pojemności). Równolegle: 5 μF , napięcie 10 V na obu, ładunki 20 μC i 30 μC .

- $\frac{1}{2}CV^2 = 0,128 \text{ J}$. Wystarczy, by przy zwarcu stopić cienki drucik i dać głośny trzask.
- $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \approx 40 \text{ J/m}^3 = 0,04 \text{ J/l}$, prawie miliard razy mniej niż w benzynie. Dlatego energię elektryczną magazynujemy chemicznie, a nie w polu.
- $V = kQ(1/a - 1/b)$, więc $C = 4\pi\epsilon_0 ab/(b-a)$. Dla $b \rightarrow \infty$: $4\pi\epsilon_0 a$ (odosobniona kula). Dla cienkiej szczeliny $d = b - a$: $4\pi\epsilon_0 a^2/d = \epsilon_0 A/d$, kondensator płaski.

Zadania · część 5

- $Q = 10 \text{ nC}$ bez zmian; $C = 500 \text{ pF}$, $V = 20 \text{ V}$, U spada z $0,5 \text{ }\mu\text{J}$ do $0,1 \text{ }\mu\text{J}$. Różnicę $0,4 \text{ }\mu\text{J}$ pole oddało jako pracę wciągania płytki (gdyby płytkę puścić, wpadłaby z rozpędem i drgała wokół położenia równowagi, aż energia rozproszy się w ciepło).
- Q : $10 \rightarrow 50 \text{ nC}$, U : $0,5 \rightarrow 2,5 \text{ }\mu\text{J}$. Bateria: $V\Delta Q = 4 \text{ }\mu\text{J}$. Praca sił zewnętrznych $= \Delta U - W_{\text{bat}} = -2 \text{ }\mu\text{J}$: płytkę trzeba hamować, bo jest wciągana.
- W próżni $ke^2/r \approx 2,9 \text{ eV}$, ponad 100 razy więcej niż $k_B T$. W wodzie ok. $0,036 \text{ eV}$, tyle co $k_B T$: ruchy cieplne rozrywają parę. (Przy tak małych odległościach makroskopowe κ jest tylko przybliżeniem.)
- $u = \frac{1}{2}\kappa\epsilon_0 E^2 \approx 3,5 \text{ MJ/m}^3$, czyli ok. 1 Wh/l , kilkaset razy mniej niż w akumulatorze (w praktyce jeszcze mniej, bo pracuje się daleko od przebicia). Za to kondensator oddaje energię w mikrosekundach.
- Dwa kondensatory szeregowo: $1/C = (d/2)/(\epsilon_0 A) + (d/2)/(\kappa\epsilon_0 A)$, więc $C = C_0 \cdot 2\kappa/(\kappa + 1)$. Dla $\kappa = 5$: $1,67 C_0$. Nawet nieskończone κ (metal) dałoby tylko $2C_0$.

Zadania feynmanowskie

1. $C = 4\pi\epsilon_0 R \approx 710 \text{ }\mu\text{F}$; $\varphi = Q/C \approx -8 \cdot 10^8 \text{ V}$.
2. Wszystko na Ziemi, łącznie z nami i przyrządami, ma praktycznie ten sam potencjał. Mierzymy tylko różnice, a przy powierzchni są one rzędu 130 V na metr wysokości (pole z działu 13). Przewodzące ciało stojące na ziemi przyjmuje jej potencjał i zaburza pole wokół siebie, więc między głową a stopami nie mamy 200 V .
1. Wzór $\varphi = kQ/R$ zakłada, że na każdą kulę działa tylko jej własny ładunek. Blisko siebie kule się wzajemnie polaryzują, potencjał każdej zależy od obu ładunków i podział ładunku trzeba liczyć ze współczynników pojemności.
2. Ostrze na dużym przewodniku jest blisko reszty ciała, więc jego pole jest mniejsze niż φ/r , ale jakościowo wynik zostaje: pole jest tym silniejsze, im większa krzywizna powierzchni (mniejszy jej promień).
FLP II-6-11
1. C spada o połowę, Q też: ładunek $\frac{1}{2}CV$ wraca do baterii, która przy tym dostaje energię $\frac{1}{2}CV^2$ (doładowuje się).
2. Zmiana energii pola: $-\frac{1}{4}CV^2$. Bilans: $W_{\text{Twoja}} = \Delta U - W_{\text{bat}} = -\frac{1}{4}CV^2 + \frac{1}{2}CV^2 = +\frac{1}{4}CV^2$. Twoja praca i energia oddana przez pole trafiają do baterii.
1. Na zewnątrz kulki $\int_a^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0 (ke/r^2)^2 4\pi r^2 dr = ke^2/2a$: dla $a \rightarrow 0$ energia jest nieskończona. Ta trudność klasycznej elektrodynamiki nie ma rozwiązania na jej gruncie. FLP II-8-6
2. Pomijając czynniki rzędu jedności, $ke^2/a = m_e c^2$ daje $a = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, „klasyczny promień elektronu”. Doświadczenia nie widzą struktury elektronu nawet w skalach tysiące razy mniejszych.
1. Siła w odległości x to $kq^2/4x^2$, więc praca $\int_h^\infty kq^2/4x^2 dx = kq^2/4h$.
2. Obraz nie jest ładunkiem, który trzyma się w miejscu: porusza się razem z q . Pole istnieje tylko po jednej stronie płaszczyzny, więc energia pola to połowa energii pary rzeczywistych ładunków.

6. 1. Szczelina cienka w porównaniu z promieniem: $C \approx \varepsilon_0 \cdot 4\pi R^2/h \approx 0,09 \text{ F}$.
2. $U = \frac{1}{2}CV^2 \approx 4 \text{ GJ}$, mniej więcej tyle co tona trotylu. Model ma jednak słaby punkt: daje ładunek $CV \approx 3 \cdot 10^4 \text{ C}$, ok. 20 razy mniej niż wynika z pola przy powierzchni (dział 13). Pole w atmosferze nie jest jednorodne: przy ziemi ma 130 V/m, a wyżej, gdzie powietrze lepiej przewodzi, szybko słabnie. Jeśli maleje wykładniczo, to przy napięciu 300 kV skala wysokości wynosi $H = V/E_0 \approx 2,3 \text{ km}$, a energia $\int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 V^2 A/2H \approx 40 \text{ GJ}$, dziesięć razy więcej. Model jednorodny daje tylko dolne oszacowanie.
FLP II-9-1
7. 1. Przy stałym V siła wciągająca na jednostkę długości krawędzi wynosi $\frac{1}{2}(\kappa - 1)\varepsilon_0 E^2 \cdot d$; równoważy ją ciężar słupa cieczy $\rho gh \cdot d$.
2. $h = (\kappa - 1)\varepsilon_0 E^2 / (2\rho g) \approx 0,6 \text{ mm}$. Efekt jest mały, bo gęstość energii pola jest mała (zadanie 4.4).
8. 1. Pole statyczne za siatką z prętów o okresie a zanika z odległością jak $e^{-2\pi z/a}$: rozwiązanie równania Laplace'a z okresowym warunkiem brzegowym. FLP II-7-5
2. Fale o długości dużo większej niż oczko „widzą” siatkę prawie jak pole statyczne i są ekranowane. Światło ma długość fali kilka tysięcy razy mniejszą od oczka i przechodzi bez przeszkód.

Fizyka · Dział 14: Potencjał, przewodniki i kondensatory · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. II (Addison-Wesley 1964; New Millennium Edition 2011), rozdz. 4, 6–11. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.