

Pole elektryczne i prawo Gaussa

Siła elektryczna jest 10^{39} razy silniejsza od grawitacji, a mimo to prawie jej nie zauważamy, bo ładunki dodatnie i ujemne niemal idealnie się równoważą. Ten dział wprowadza pole elektryczne, linie pola i dipol, a potem prawo Gaussa: jedno zdanie o strumieniu, z którego w kilka linijek wynikają pola kuli, przewodu, płaszczyzny i to, że wewnątrz przewodnika jest wolne od pola.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
II, rozdz. 1, 4, 5, 6

W TYM DZIALE

- 0 Prolog: siła, której nie czujemy
- 1 Ładunek i prawo Coulomba
- 2 Pole elektryczne, linie pola i dipol
- 3 Strumień i prawo Gaussa
- 4 Pola z symetrii: przewód, płaszczyzna, kula
- 5 Przewodniki
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: siła, której nie czujemy

Feynman zaczyna tom o elektromagnetyzmie od eksperymentu myślowego. Gdyby dwie osoby stojące na odległość wyciągniętej ręki miały po 1% więcej elektronów niż protonów, odpychałyby się siłą zdolną podnieść ciężar porównywalny z ciężarem całej Ziemi (zadanie feynmanowskie 1). Siła elektryczna między elektronem a protonem w atomie wodoru jest ok. $2 \cdot 10^{39}$ razy większa od przyciągania grawitacyjnego między nimi. (FLP II-1-1)

Dlaczego więc na co dzień czujemy grawitację, a nie elektryczność? Bo ładunki są dwóch rodzajów i przyciągają się przeciwne. Materia złożona z równej liczby dodatnich i ujemnych ładunków jest elektrycznie obojętna z ogromną dokładnością, a resztkowe siły elektryczne działają tylko na krótkich odległościach: trzymają atomy w cząsteczkach, cząsteczki w ciałach stałych, sprawiają, że nie przelatujemy przez podłogę. Grawitacja ma jeden rodzaj „ładunku”, więc sumuje się po całej Ziemi.

Wszystkie siły kontaktowe z działu 1 „Ruch i jego przyczyny”, tarcie, sprężystość, nacisk podłoża, to w gruncie rzeczy siły elektryczne między atomami. Tu zaczniemy od najprostszego przypadku: ładunków w spoczynku.

Pytanie na start. W samochód uderza piorun. Dlaczego pasażerom zwykle nic się nie dzieje? Czy chroni ich izolacja opon? Odpowiedź w części 5.

Ładunek i prawo Coulomba

Ładunek elektryczny jest **zachowany** (w żadnym procesie nie powstaje ani nie znika netto) i **skwantowany**: każdy swobodny ładunek to całkowita wielokrotność ładunku elementarnego $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C (od 2019 r. wartość dokładna z definicji). Elektron ma ładunek $-e$, proton $+e$, z dokładnością lepszą niż 10^{-21} względnie.

PRAWO · COULOMBA

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2, \quad \epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}.$$

$\hat{r}$ wskazuje od ładunku działającego do ładunku, na który działa siła; ładunki jednoimienne się odpychają. Siły od wielu ładunków dodają się wektorowo (zasada superpozycji). (FLP II-4-2)

Jeden kulomb to ogromny ładunek: dwa ładunki po 1 C w odległości kilometra odpychałyby się siłą ok. 9 kN, jak ciężar 900 kg. Potarty balonik niesie ładunek rzędu dziesiątków nanokulombów. W jądrze atomowym dwa protony odległe o 3 fm odpychają się siłą ok. 26 N, działającą na cząstkę o masie 10^{-27} kg; trzymają je razem jeszcze silniejsze siły jądrowe.

SKĄD TO WIEMY?

Coulomb (1785) mierzył siłę wagą skręceń: kulki na cienkim drucie i kąt skręcenia przy różnych odległościach. Dokładność była rzędu kilku procent. Dużo precyzyjniej sprawdza się prawo $1/r^2$ pośrednio: według prawa Gaussa wewnątrz naładowanej zamkniętej powłoki nie ma pola tylko wtedy, gdy wykładnik jest dokładnie 2 (część 5). Cavendish (ok. 1773) i Maxwell szukali ładunku na kuli wewnątrz naładowanej powłoki i nie znaleźli; w 1971 r. Williams, Faller i Hill pokazali, że wykładnik różni się od 2 najwyżej o ok. $6 \cdot 10^{-16}$ (ich wynik: $(2,7 \pm 3,1) \cdot 10^{-16}$). FLP II-5-8

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Oblicz siłę elektryczną i grawitacyjną między elektronem a protonem w atomie wodoru ($r = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m). Jaki jest ich stosunek?

- 2 Ile elektronów trzeba zabrać z kulki, żeby miała ładunek +1 nC?

- 3 Ładunki $+q$ i $+4q$ są odległe o d . Gdzie na łączącej je prostej trzeci ładunek nie doznaje żadnej siły? Czy ta równowaga jest trwała?

- 4 Dwie jednakowe kulki o masie 1 g wiszą na niciach długości 50 cm z jednego punktu. Po naładowaniu jednakowym ładunkiem rozchodzą się tak, że nici tworzą kąt 20° (każda odchyła się o 10° od pionu). Jaki jest ładunek kulek?

- 5 Trzy ładunki $+q$ leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a . Jaka siła działa na każdy z nich?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Pole elektryczne, linie pola i dipol

Zamiast mówić, że ładunek q_1 działa na ładunek q_2 na odległość, mówimy, że q_1 wytwarza w całej przestrzeni **pole elektryczne** $\vec{E}$, a pole w miejscu, gdzie jest q_2 , działa na niego siłą $\vec{F} = q_2 \vec{E}$. Na razie to tylko wygodny zapis; w dziale o falach elektromagnetycznych okaże się, że pole jest bytem fizycznym: niesie energię i pęd i rozchodzi się z prędkością światła. FLP II-1-2

DEFINICJA · NATĘŻENIE POLA ELEKTRYCZNEGO

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = \sum_i k \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \text{ (ładunki punktowe).}$$

Jednostka: N/C = V/m. Pole ładunku punktowego maleje jak $1/r^2$ i jest skierowane od ładunku dodatniego.

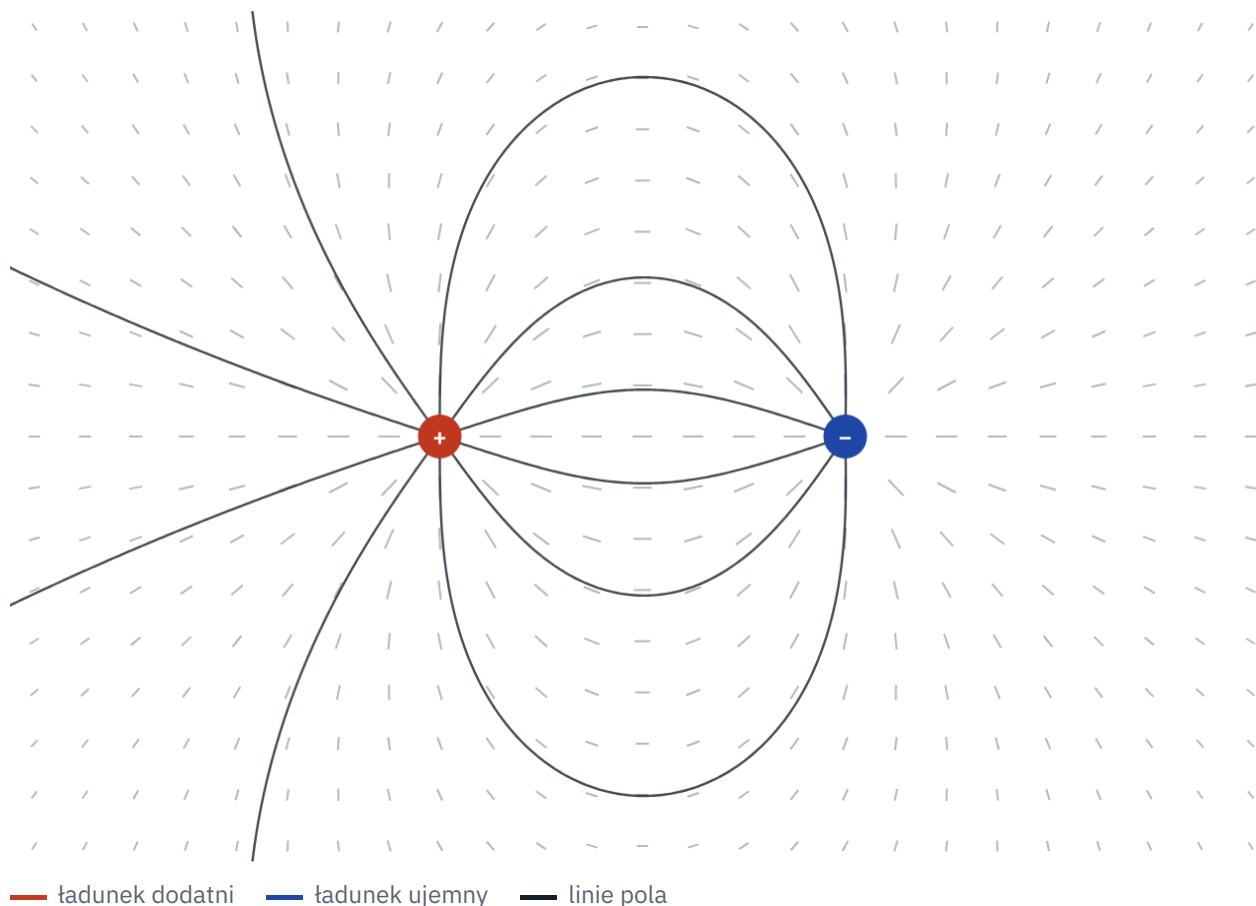
Linie pola to krzywe styczne w każdym punkcie do $\vec{E}$. Zaczynają się na ładunkach dodatnich, kończą na ujemnych (albo w nieskończoności), nigdy się nie przecinają (poza punktami, w których $\vec{E} = 0$), a ich gęstość jest proporcjonalna do natężenia pola. Że ta ostatnia własność daje się utrzymać w trzech wymiarach, zawdzięczamy prawu $1/r^2$: przez każdą sferę wokół ładunku przechodzi ta sama liczba linii, a pole powierzchni sfery rośnie jak r^2 . (FLP II-4-8)

2.1 Dipol

Para ładunków $+q$ i $-q$ odległych o d to **dipol** o momencie $\vec{p} = q\vec{d}$ (od $-q$ do $+q$). Z daleka pola obu ładunków prawie się znoszą: pole dipola maleje jak $1/r^3$. Na osi dipola $E = 2kp/r^3$, w płaszczyźnie prostopadłej $E = kp/r^3$ (skierowane przeciwnie do $\vec{p}$). Cząsteczka wody ma moment dipolowy $6,2 \cdot 10^{-30}$ C·m. W jednorodnym polu na dipol działa moment siły $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$, który ustawia go wzdłuż pola, a energia dipola to $-\vec{p} \cdot \vec{E}$. W polu niejednorodnym na dipol działa dodatkowo siła $(\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}$; dipol ustawiony zgodnie z polem jest wciągany w obszar silniejszego pola. (FLP II-6-2)

SYMULACJA 1

Pole elektryczne kilku ładunków punktowych: krótkie kreski pokazują kierunek pola w siatce punktów, a linie pola wychodzą z ładunków dodatnich. Wybierz układ i przeciągaj ładunki. Zwróć uwagę, gdzie pole znika i jak wygląda z daleka.



suma ładunków 0 q

pole w punkcie (0; 0) 0,500 kq/a²

kierunek pola w (0; 0) 0°

Suma ładunków jest zerowa: każda linia wychodząca z ładunku dodatniego kończy się na ujemnym (niektóre zataczają łuk poza kadrem). Daleko od układu pole słabnie szybciej niż $1/r^2$ (dipol: jak $1/r^3$).

Stan na rysunku: ładunki +1 w $(-2,0; 0,0)$, -1 w $(2,0; 0,0)$; jednostka długości a.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Jakie jest natężenie pola w odległości 10 cm od ładunku 1 nC? Jaka siła działa tam na elektron?
- 2 Elektron wlatuje z prędkością 10^7 m/s prostopadłe do jednorodnego pola 10^4 V/m na odcinku 5 cm. O ile odchyli się od kierunku lotu?

3 Pokaż, że pole dipola na jego osi w dużej odległości r to $2kp/r^3$.

4 Gdzie na prostej łączącej ładunki $+q$ i $-4q$ (odległe o d) pole jest zerowe?

5 Energia dipola wody w polu 10^5 V/m (silne pole w powietrzu) wynosi najwyżej pE . Porównaj ją z kT w 300 K. Co z tego wynika dla ustawiania się cząsteczek w polu?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

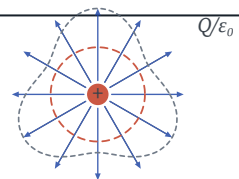
3 Strumień i prawo Gaussa

Strumień pola przez powierzchnię to $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ (lekcja 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja): całka ze składowej pola prostopadłej do powierzchni. Dla ładunku punkowego i sfery o promieniu r wokół niego: $E \cdot 4\pi r^2 = kq \cdot 4\pi = q/\epsilon_0$, niezależnie od r . Tak jest dla dowolnej zamkniętej powierzchni wokół ładunku: element powierzchni widziany z ładunku pod kątem bryłowym $d\Omega$ ma strumień $kq d\Omega$, bo pole maleje jak $1/r^2$, a pole powierzchni rośnie jak r^2 . Ładunek na zewnątrz daje strumień zerowy: tyle samo linii wchodzi, ile wychodzi.

FLP II-4-5, 4-6

🔌 PRAWO · GAUSSA

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{wewn}}}{\epsilon_0} \iff \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

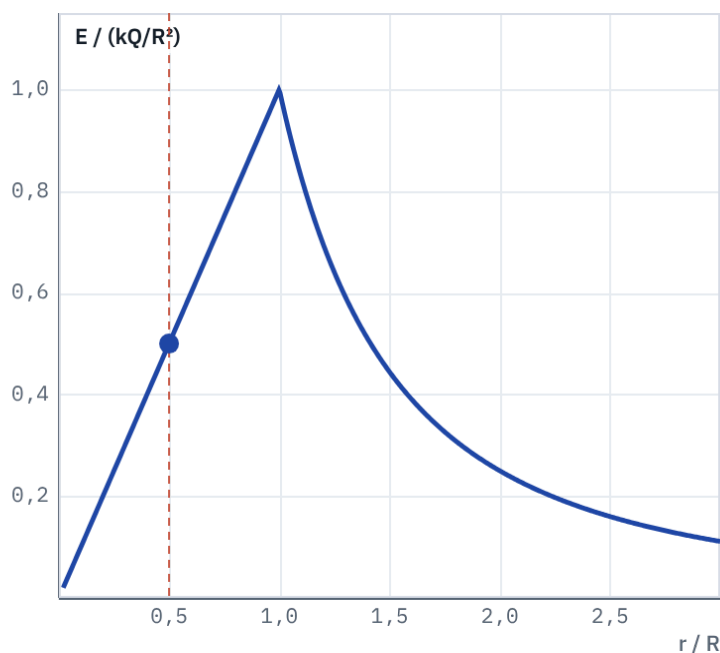
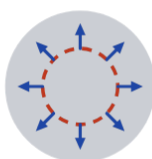


Strumień przez dowolną zamkniętą powierzchnię równa się ładunkowi wewnątrz podzielonemu przez ϵ_0 . Postać różniczkowa wynika z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego (lekcja 3.6 Twierdzenia Greena, Stokesa i Gaussa). To pierwsze z równań Maxwella; jest prawdziwe także dla ładunków w ruchu.

Prawo Gaussa zawsze obowiązuje, ale samo wystarcza do wyznaczenia pola tylko wtedy, gdy symetria mówi nam z góry, jaki jest kierunek pola i na jakich powierzchniach ma ono stałą wartość. Trzy takie symetrie to kulista, walcowa i płaska (część 4).

SYMULACJA 2 Prawo Gaussa dla trzech rozkładów ładunku o symetrii kulistej.

Przesuwaj sferę Gaussa (przerywany okrąg): ładunek wewnątrz niej wyznacza strumień, a z symetrii pole $E(r) = kQ_{\text{wewn}}/r^2$. Porównaj pole wewnątrz kuli jednorodnej i wewnątrz powłoki.



— $E(r)$ — sfera Gaussa — ładunek

ładunek wewnątrz sfery 0,125 Q

strumień $\oint E \cdot dA$ 0,125 Q/ ϵ_0

$E(r)$ 0,500 kQ/R²

Wewnątrz jednorodnej kuli sfera Gaussa obejmuje ładunek $Q \cdot (r/R)^3$, więc pole rośnie liniowo: $E = kQr/R^3$. W środku jest zero.

Stan na rysunku: kula jednorodna, sfera Gaussa $r = 0,50 R$; ładunek wewnątrz 0,125 Q, $E = 0,500 kQ/R^2$.

⚠️ PUŁAPKA · ZEROWY STRUMIEŃ TO NIE ZEROWE POLE

Jeśli wewnątrz powierzchni nie ma ładunku, strumień jest zerowy, ale pole na powierzchni wcale nie musi być zerowe: sfera Gaussa obok ładunku punktowego ma pole wszędzie, tylko tyle samo wpływa, ile wypływa. Wniosek „pole zerowe” wymaga dodatkowo symetrii.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Ładunek $1 \mu\text{C}$ jest w środku sześcianu. Jaki jest strumień przez cały sześcian, a jaki przez jedną ścianę?
- 2 Ładunek leży w jednym z wierzchołków sześcianu. Jaki strumień przechodzi przez sześcian?
- 3 Kula o promieniu 5 cm ma ładunek 1 nC rozłożony jednorodnie w objętości. Oblicz pole w środku, w odległości 2,5 cm, na powierzchni i 10 cm od środka.
- 4 W pewnym obszarze pole ma postać $\vec{E} = (ax, 0, 0)$. Jaka jest gęstość ładunku?
- 5 Pokaż, że gdyby siła Coulomba malała jak $1/r^{2+\delta}$ z $\delta \neq 0$, strumień przez sferę wokół ładunku zależałby od jej promienia. Dlaczego to podważa prawo Gaussa?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

4 Pola z symetrii: przewód, płaszczyzna, kula

🔑 WYNIK · POLA Z PRAWA GAUSSA

- **Kula lub powłoka** o ładunku Q , na zewnątrz: $E = kQ/r^2$ (jak ładunek punktowy w środku). Wewnątrz powłoki: $E = 0$. Wewnątrz jednorodnej kuli: $E = kQr/R^3$.
- **Długi prosty przewód** o gęstości liniowej λ : $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, prostopadle do przewodu (powierzchnia Gaussa: walec).
- **Nieskończona płaszczyzna** o gęstości powierzchniowej σ : $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ po obu stronach, niezależnie od odległości (powierzchnia Gaussa: „puszka” przecinająca płaszczyznę).
- **Dwie płaszczyzny** $+\sigma$ i $-\sigma$: między nimi $E = \sigma/\epsilon_0$, na zewnątrz 0 (kondensator płaski, dział 14 „Potencjał, przewodniki i kondensatory”).

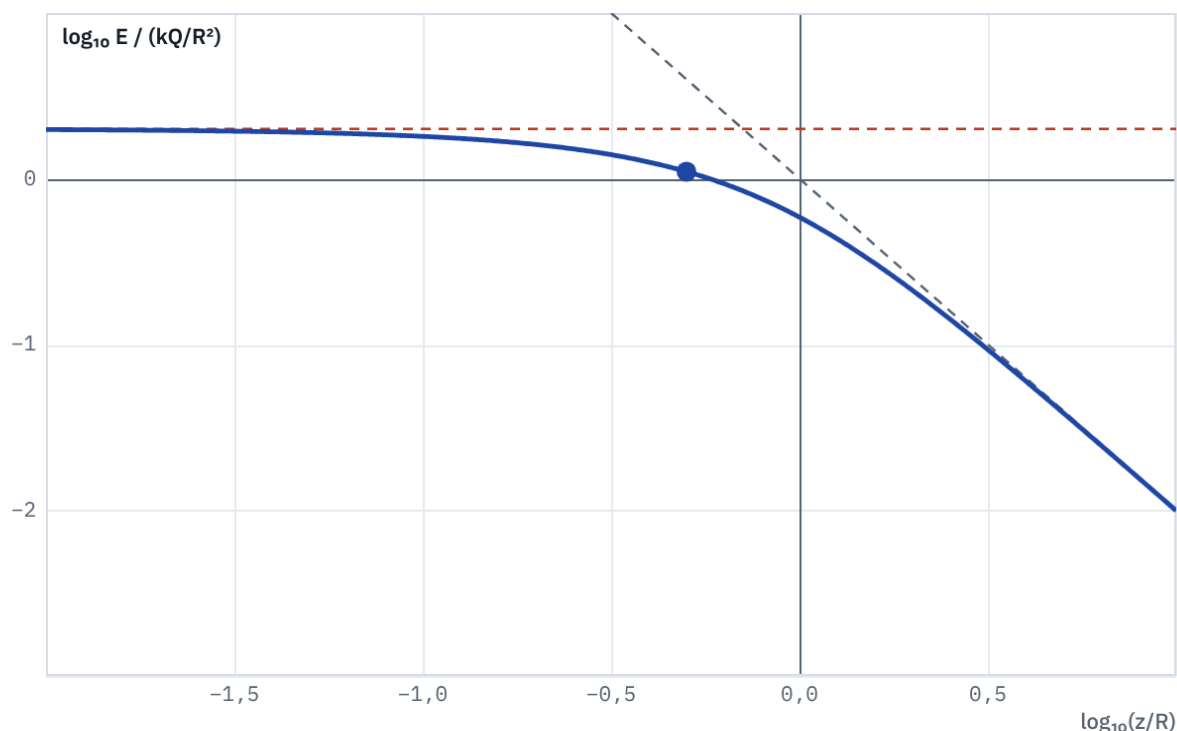
Wszystkie cztery wyniki dostajemy w jednej linijce z prawa Gaussa.

FLP II-4-7, 5-5, 5-6, 5-7

Pole płaszczyzny nie zależy od odległości, bo im dalej, tym większy obszar płaszczyzny „widać” pod danym kątem. Prawdziwe ciała są skończone, więc te wyniki są przybliżeniami: blisko dysku (w odległości dużo mniejszej od jego promienia) pole jest jak dla płaszczyzny, a daleko jak dla ładunku punktowego. Gdy symetrii brak, pole trzeba policzyć z superpozycji, całkując wkłady elementów ładunku. Najprostsze przypadki, pole na osi pierścienia i dysku, pokazuje symulacja 3.

SYMULACJA 3

Pole na osi naładowanego pierścienia i dysku o promieniu R , w skali logarytmicznej, w porównaniu z polem ładunku punkowego i nieskończonej płaszczyzny. Przesuwaj punkt wzdłuż osi i sprawdź, w jakich odległościach obowiązuje każde przybliżenie.



— pole na osi (dokładnie) - - ładunek punktowy kQ/z^2 - - płaszczyzna $\sigma/2\epsilon_0$ (tylko dysk)

E na osi 1,1039 kQ/R^2

kQ/z^2 (ładunek punktowy) 3,9811 kQ/R^2

$\sigma/2\epsilon_0$ (płaszczyzna) 2,000 kQ/R^2

Przejście między płaszczyzną a punktem: pole słabnie, gdy odległość staje się porównywalna z promieniem dysku.

Stan na rysunku: dysk o promieniu R i ładunku Q , $z = 0,501 R$; $E = 1,1039 kQ/R^2$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 35 min

1 Długi przewód ma ładunek $1 \mu\text{C}$ na metr. Jakie jest pole w odległości 1 cm i 1 m?

■ ■ ■

2 Dwie duże równoległe płyty mają gęstości ładunku $\pm 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Jakie jest pole między nimi i na zewnątrz?

■ ■ ■

3 Wyprowadź pole na osi pierścienia o promieniu R i ładunku Q w odległości z od środka. Gdzie jest największe?

4 Pole na osi dysku to $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$. Pokaż, że dla $z \ll R$ daje pole płaszczyzny, a dla $z \gg R$ pole ładunku punktowego.

5 Gruba warstwa (płyta) o grubości $2a$ jest jednorodnie naładowana z gęstością ρ . Znajdź pole wewnątrz i na zewnątrz.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

5 Przewodniki

W metalu część elektronów może się swobodnie poruszać. Jeśli wewnątrz przewodnika jest jakiegokolwiek pole, elektrony płyną, aż ich przesunięcie wytworzy pole, które je zniesie. W równowadze (w metalach po czasie rzędu 10^{-14} s) pole wewnątrz przewodnika jest więc zerowe.

FLP II-5-9

🔑 WYNIK · PRZEWODNIK W RÓWNOWADZE

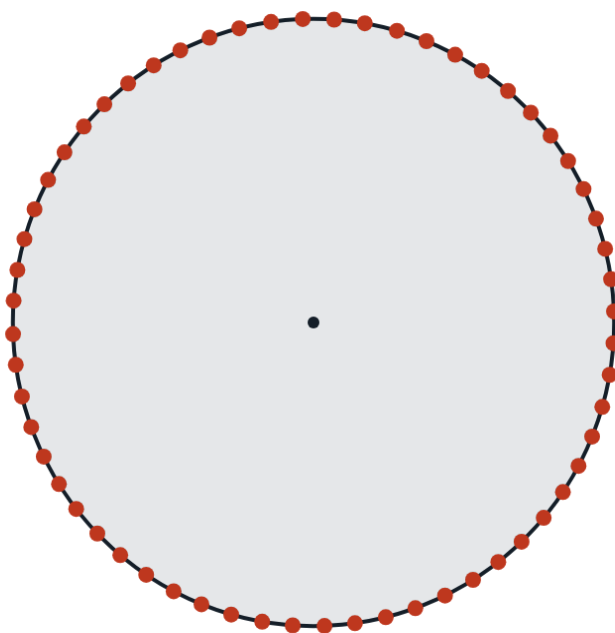
- Wewnątrz przewodnika $\vec{E} = 0$, więc z prawa Gaussa nie ma tam ładunku: cały nadmiarowy ładunek leży na powierzchni.
- Tuż przy powierzchni pole jest do niej prostopadłe i wynosi $E = \sigma/\epsilon_0$.
- W pustej wnęce wewnątrz przewodnika (bez ładunków w środku) pole jest zerowe, cokolwiek dzieje się na zewnątrz: **klatka Faradaya**.

Pole wewnątrz wnęki znika, bo ładunki na powierzchni przewodnika ustawiają się tak, by znosić każde pole zewnętrzne. FLP II-5-10

Dlatego pasażerowie samochodu trafionego piorunem są bezpieczni: prąd płynie po metalowej karoserii, a we wnętrzu pole jest bardzo małe (opony nie mają tu znaczenia: piorun przebija kilometry powietrza, więc centymetry gumy go nie zatrzymają). Ładunek na przewodniku gromadzi się najsilniej na ostrzach: kule o promieniach R_1, R_2 połączone drutem mają gęstości ładunku odwrotnie proporcjonalne do promieni, więc pole przy ostrzu może przekroczyć próg przebicia powietrza (ok. 3 MV/m). Na tym opiera się działanie piorunochronu; to samo zjawisko daje ognie św. Elma.

SYMULACJA 4

Swobodne ładunki w przekroju długiego przewodzącego walca (każdy „ładunek” to długa naładowana nić, więc pole maleje jak $1/r$). Ładunki odpychają się i rozbiegają, aż zbiorą się na brzegu, a pole w środku zaniknie. Włącz pole zewnętrzne i uruchom animację: ładunki przesuwają się tak, że w środku znów nie ma pola. (W prawdziwym metalu przesuwają się elektrony, a po stronie, z której odpłynęły, zostaje ładunek dodatni.)



— ładunki swobodne — pole zewnętrzne

ładunki na brzegu 60 z 60

pole w środku 0,01

pole na zewnątrz, $r = 1,2 R$ (dla porównania) 16,6

ładunki zebrały się na brzegu, a pole w środku jest bliskie zeru. Przy ogromnej liczbie ładunków w prawdziwym przewodniku jest dokładnie zerowe.

Stan na rysunku: 60 jednakowych ładunków w przekroju długiego przewodzącego walca; na brzegu 60, pole w środku 0,01 (jednostki umowne).

5.1 Twierdzenie Earnshawa

Czy można uwięzić ładunek w spoczynku samymi ładunkami nieruchomymi? Nie. Trwała równowaga wymagałaby, by w otoczeniu punktu pole było skierowane do środka ze wszystkich stron, a wtedy strumień przez małą sferę wokół tego punktu byłby niezerowy, choć nie ma tam ładunku. Prawo Gaussa tego zabrania. Dlatego atom nie może być statycznym układem

ładunków; pułapki na jony (Paula, Penninga) używają pól zmiennych lub magnetycznych.

FLP II-5-2, 5-4

 ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 30 min

- 1  Pole elektryczne przy powierzchni Ziemi w pogodny dzień ma ok. 130 V/m i jest skierowane w dół. Jaka jest gęstość ładunku na powierzchni Ziemi i jaki jest jej całkowity ładunek?
- 2  Jaki największy ładunek może utrzymać metalowa kula o promieniu 15 cm w powietrzu, zanim nastąpi przebicie (3 MV/m)?
- 3  Wewnątrz neutralnej przewodzącej powłoki kulistej, w środku, umieszczono ładunek $+q$. Jakie ładunki pojawią się na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki? Jakie jest pole na zewnątrz?
- 4  Dwie metalowe kule o promieniach 1 cm i 10 cm, oddległe od siebie, połączono cienkim drutem i naładowano. Jak się mają ich ładunki i pola przy powierzchniach?
- 5  Dlaczego w windzie (metalowej kabinie) telefon komórkowy często traci zasięg? I dlaczego radio na falach długich (AM) odbiera w samochodzie gorzej niż radio FM?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA DLA ELEKTROSTATYKI

1. Szukaj symetrii. Kulista, walcowa lub płaska: prawo Gaussa z odpowiednią powierzchnią (sfera, walec, puszka).
2. Bez symetrii: superpozycja; podziel ładunek na elementy dq , zapisz $d\vec{E}$ i całkuj składowe, korzystając ze znoszenia się składowych z symetrii.
3. Przewodniki: $E = 0$ w środku, ładunek na powierzchni, $E = \sigma/\epsilon_0$ tuż przy niej.
4. Siła na ładunek q : $q\vec{E}$; na dipol: moment $\vec{p} \times \vec{E}$ i siła w polu niejednorodnym.
5. Jednostki: $k \approx 9 \cdot 10^9$, $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$; pole w V/m.
6. Sprawdzenie: daleko od układu pole powinno wyglądać jak pole ładunku całkowitego (lub dipola, gdy ten jest zerowy).

Przykład 13.1

Pole w atomie wodoru

Jakie pole elektryczne wytwarza proton w odległości promienia Bohra ($0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$)? Porównaj z polem przebicia powietrza i z najsilniejszymi polami statycznymi w laboratorium (ok. 10^9 V/m).

- 1 $E = ke/r^2 = 8,99 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} / (0,53 \cdot 10^{-10})^2 \approx 5,1 \cdot 10^{11} \text{ V/m}$.
- 2 To 170 000 razy więcej niż pole przebicia powietrza i ok. 500 razy więcej niż najsilniejsze pola statyczne w laboratorium.

Wynik: ok. $5 \cdot 10^{11} \text{ V/m}$. Pola zewnętrzne, jakie umiemy wytworzyć, są wobec pól wewnątrz atomów słabe; dlatego atomy w polu tylko lekko się polaryzują.

Sprawdzenie: dopiero krótkie impulsy silnych laserów, z polem rzędu 10^{10} – 10^{11} V/m (natężenie ok. 10^{14} W/cm^2), jonizują atomy samym polem ✓.

Przykład 13.2

Dipol cząsteczki wody

Cząsteczka wody ma moment dipolowy $6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$. Jakie pole wytwarza na swojej osi w odległości 1 nm? Jaką siłą działa to pole na jon sodu?

- 1 $E = 2kp/r^3 = 2 \cdot 8,99 \cdot 10^9 \cdot 6,2 \cdot 10^{-30} / 10^{-27} \approx 1,1 \cdot 10^8 \text{ V/m}$.
- 2 Siła na jon $+e$: $eE \approx 1,8 \cdot 10^{-11} \text{ N}$.

Wynik: 10^8 V/m w odległości kilku średnic cząsteczki. Jony w wodzie otaczają się cząsteczkami wody zwróconymi do nich odpowiednim biegunem (hydratacja), co ułatwia rozpuszczanie soli.

Sprawdzenie: pole dipola maleje jak $1/r^3$: w 2 nm będzie 8 razy słabsze ✓.

Przykład 13.3

Ulot z linii wysokiego napięcia

Przewód linii energetycznej o promieniu 1 cm ma gęstość ładunku $1 \mu\text{C/m}$. Jakie jest pole przy jego powierzchni? Dlaczego linie najwyższych napięć mają po kilka przewodów w wiązce?

- 1 $E = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r) \approx 1,8 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ przy powierzchni.
- 2 To ponad połowa pola przebicia; przy wilgoci i zanieczyszczeniach powietrze przy przewodzie zaczyna się jonizować (ulot, ciche brzęczenie i straty energii).
- 3 Wiązka kilku przewodów zachowuje się jak jeden przewód o dużo większym promieniu efektywnym: przy tej samej gęstości ładunku pole przy powierzchni jest mniejsze.

Wynik: ok. 1,8 MV/m, blisko granicy ulotu; wiązki przewodów obniżają pole przy powierzchni.

Sprawdzenie: pole $\propto 1/r$: dwa razy grubszy przewód przy tym samym λ ma dwa razy słabsze pole przy powierzchni ✓.

Przykład 13.4

Dwie naładowane płyty

Dwie równoległe płyty $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ oddległe o 1 mm naładowano ładunkami $\pm 10\text{ nC}$. Jakie jest pole między nimi? Jaką siłą płyty się przyciągają?

- 1 $\sigma = 10^{-8}/0,01 = 10^{-6}\text{ C/m}^2$; między płytami $E = \sigma/\epsilon_0 \approx 1,13 \cdot 10^5\text{ V/m}$.
- 2 Na jedną płytę działa pole drugiej, $\sigma/2\epsilon_0$ (własne pole płyty jej nie pcha): $F = Q\sigma/2\epsilon_0 \approx 10^{-8} \cdot 5,65 \cdot 10^4 \approx 5,6 \cdot 10^{-4}\text{ N}$.

Wynik: $1,1 \cdot 10^5\text{ V/m}$ i siła ok. $0,6\text{ mN}$. Odległość między płytami (dopóki jest mała wobec ich rozmiarów) nie ma znaczenia.

Sprawdzenie: częsty błąd to $F = QE$ z pełnym polem σ/ϵ_0 : daje dwa razy za dużo ✓.

Przykład 13.5

Generator Van de Graaffa

Kula generatora ma promień 15 cm . Jaki największy ładunek może zgromadzić w suchym powietrzu (przebiecie 3 MV/m)? Ile to elektronów?

- 1 Na powierzchni kuli $E = kQ/R^2$; warunek $E < 3 \cdot 10^6\text{ V/m}$ daje $Q_{\max} = 3 \cdot 10^6 \cdot 0,0225/8,99 \cdot 10^9 \approx 7,5\text{ }\mu\text{C}$.
- 2 To $4,7 \cdot 10^{13}$ elektronów.

Wynik: ok. $7,5\text{ }\mu\text{C}$. Potencjał kuli wynosi wtedy $kQ/R \approx 450\text{ kV}$ (dział 14 „Potencjał, przewodniki i kondensatory”), stąd iskry długie na kilkanaście centymetrów.

Sprawdzenie: większa kula utrzyma więcej: $Q_{\max} \propto R^2$, a potencjał $\propto R$; dlatego duże akceleratory elektrostatyczne mają wielkie kopuły i pracują w gazie pod ciśnieniem ✓.

Doświadczenie Millikana

Kropla oleju o promieniu $1\ \mu\text{m}$ i gęstości $900\ \text{kg/m}^3$ unosi się nieruchomo między poziomymi płytami. Jakie pole jest potrzebne, jeśli kropla ma jeden ładunek elementarny? A trzy?

- 1 Masa kropli: $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \approx 3,77 \cdot 10^{-15}\ \text{kg}$, ciężar $3,7 \cdot 10^{-14}\ \text{N}$.
- 2 $qE = mg$: dla $q = e$: $E \approx 2,3 \cdot 10^5\ \text{V/m}$; dla $3e$: $7,7 \cdot 10^4\ \text{V/m}$.

Wynik: pola potrzebne do zawieszenia kropli przyjmują tylko wartości $mg/(ne)$: ładunki to całkowite wielokrotności e . Millikan (1909–1913) zmierzył tak e z deklarowaną niepewnością ok. 0,2%; jego wynik był zaniżony o ok. 0,6% przez błędną wartość lepkości powietrza.

Sprawdzenie: masę kropli Millikan wyznaczał z jej prędkości opadania w powietrzu ze wzoru Stokesa (dział 10 „Płyny: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne”), bo kropel nie da się zważyć ✓.

7

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

✗ „Linie pola to tory, po których poruszają się ładunki.”

Linia pola wskazuje kierunek siły, czyli przyspieszenia, a nie prędkości. Ładunek z prędkością początkową, a nawet z zerową na zakrzywionej linii, z niej schodzi.

✗ „Opony chronią samochód przed piorunem.”

Chroni metalowa karoseria (klatka Faradaya). Kabriolet z płóciennym dachem nie daje takiej ochrony.

✗ „Wewnątrz naładowanej kuli nigdy nie ma pola.”

Tylko wewnątrz powłoki lub przewodnika. Wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli izolacyjnej pole rośnie liniowo od środka.

✗ „Zerowy strumień oznacza zerowe pole.”

Oznacza tylko, że tyle samo linii wchodzi, ile wychodzi.

× „Naładowany balon przyczepia się do ściany, bo ściana jest naładowana.”

Ściana jest obojętna; balon ją polaryzuje, a przyciąganie bliższych ładunków przeciwnych przeważa nad odpychaniem dalszych.

× „Ładunek rozkłada się równomiernie na powierzchni przewodnika.”

Tylko na odosobnionej kuli. Na ciele o nieregularnym kształcie gromadzi się najsilniej na ostrzach i krawędziach.

8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

1 **Jeden procent.** Dwie osoby po 70 kg stoją 60 cm od siebie. Każda ma o 1% więcej elektronów niż protonów. Oszacuj siłę odpychania i porównaj z ciężarem Ziemi ($5,97 \cdot 10^{24}$ kg razy g).

2 **Earnshaw w praktyce.** Pokaż, że w polu elektrostatycznym w obszarze bez ładunków nie ma punktu, w którym dodatni ładunek próbny miałby trwałą równowagę. Dlaczego w takim razie magnetyczna lewitacja żaby (słynny eksperyment z 1997 r.) jest możliwa?

3 **Naładowana Ziemia.** Pole przy powierzchni w pogodny dzień ma 130 V/m skierowane w dół, a w górnej atmosferze (ok. 50 km) jest bliskie zera. Jaki ładunek ma powierzchnia Ziemi i gdzie jest kompensujący go ładunek dodatni? Ile nadmiarowych elektronów przypada na centymetr kwadratowy?

4 **Pusta kula Newtona.** Bez prawa Gaussa: pokaż, że w dowolnym punkcie wewnątrz cienkiej, jednorodnie naładowanej powłoki pole jest zerowe. Rozważ dwa przeciwległe stożki o małym kącie bryłowym wychodzące z punktu.

5 **Balon i papierki.** Naładowany balon przyciąga obojętne kawałki papieru. Wyjaśnij, dlaczego siła na obojętny dipol w polu jednorodnym jest zerowa, a w polu ładunku punktowego niezerowa. Jak siła na indukowany dipol zależy od odległości r ?

6 **Kropla w burzy.** Kropla deszczu ma promień 1 mm. Jaki największy ładunek może mieć, zanim pole przy jej powierzchni przekroczy 3 MV/m? W chmurze burzowej krople mają ładunki rzędu 10^{-12} – 10^{-10} C; czy to dużo?

7 **Ładunek we wnętrzu.** W metalowej kuli wydrążono wnękę o dowolnym kształcie, a w niej, poza środkiem, umieszczono ładunek q . Jakie pole jest na zewnątrz kuli? Czy zależy od położenia q we wnętrzu?

8 **Siła na powierzchnię przewodnika.** Pokaż, że na element powierzchni naładowanego przewodnika działa siła na jednostkę powierzchni $\sigma^2/2\epsilon_0$, skierowana na zewnątrz. Dlaczego nie $\sigma \cdot \sigma/\epsilon_0$?

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Ile razy siła elektryczna między elektronem a protonem przewyższa grawitacyjną?

Ok. $2 \cdot 10^{39}$ razy, niezależnie od odległości.

2 Jak maleje z odległością pole ładunku punktowego, a jak dipola?

Jak $1/r^2$ i jak $1/r^3$.

3 Co mówi prawo Gaussa?

Strumień pola przez dowolną zamkniętą powierzchnię równa się $Q_{\text{wewn}}/\epsilon_0$.

4 Jakie jest pole w odległości r od długiego naładowanego przewodu?

$\lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$.

5 Dlaczego pole nieskończonej płaszczyzny nie zależy od odległości?

Z prawa Gaussa: strumień przez „puszkę” nie zależy od jej wysokości. Intuicyjnie: im dalej, tym większy obszar płaszczyzny daje wkład pod danym kątem.

6 Gdzie znajduje się nadmiarowy ładunek przewodnika w równowadze?

Na jego powierzchni; wewnątrz pole i ładunek są zerowe.

7 Jakie jest pole tuż przy powierzchni przewodnika o gęstości ładunku σ ?

σ/ϵ_0 , prostopadle do powierzchni.

8 Dlaczego nie da się uwięzić ładunku samymi nieruchomymi ładunkami?

Twierdzenie Earnshawa: trwała równowaga wymagałaby niezerowego strumienia przez powierzchnię bez ładunku w środku.

ŁADUNKI I POLE

$$F = kq_1q_2/r^2, \quad k = 1/4\pi\epsilon_0 \approx 8,99 \cdot 10^9$$

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\vec{E} = \vec{F}/q; \quad \text{ładunek punktowy } kq/r^2$$

$$\text{dipol: } \vec{p} = q\vec{d}; \quad E_{\text{os}} = 2kp/r^3; \quad \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E};$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

GAUSS I SYMETRIE

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q/\epsilon_0; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

kula (na zewnątrz) kQ/r^2 ; jednorodna (w środku) kQr/R^3 ; powłoka (w środku) 0

przewód $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$; płaszczyzna $\sigma/2\epsilon_0$; dwie płyty σ/ϵ_0

przewodnik: $E_{\text{wewn}} = 0$, przy powierzchni σ/ϵ_0

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. II, rozdz. 1 (elektromagnetyzm), 4 (elektrostatyka), 5 (zastosowania prawa Gaussa).
- **Dla chętnych:** t. II, rozdz. 6 (dipol i pole wokół różnych rozkładów ładunku).

Następny dział: **Potencjał, przewodniki i kondensatory**. Pole elektrostatyczne jest potencjalne (lekcja 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne), więc da się je opisać jedną funkcją skalarną: potencjałem. Zobaczymy, jak liczyć napięcia, pojemności i energię zgromadzoną w polu, i dlaczego kondensator pozwala przechować energię w pustej przestrzeni między płytami.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $F_e = ke^2/r^2 \approx 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$; $F_g = Gm_em_p/r^2 \approx 3,6 \cdot 10^{-47} \text{ N}$; stosunek $\approx 2,3 \cdot 10^{39}$ (nie zależy od r).
2. $10^{-9}/1,6 \cdot 10^{-19} \approx 6 \cdot 10^9$, dla kulki o masie 1 g to ok. $2 \cdot 10^{-14}$ wszystkich jej elektronów.
3. Między nimi, w odległości x od $+q$: $1/x^2 = 4/(d-x)^2$, $x = d/3$. Dla ładunku dodatniego równowaga wzdłuż prostej jest trwała, ale w kierunku poprzecznym nietrwała: zgodnie z twierdzeniem Earnshawa (część 5) trwałej równowagi nie ma.
4. Odległość kulek $2 \cdot 0,5 \sin 10^\circ \approx 0,174 \text{ m}$. $kq^2/r^2 = mg \tan 10^\circ \approx 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ N}$, $q = r\sqrt{F/k} \approx 76 \text{ nC}$.
5. Dwie siły kq^2/a^2 pod kątem 60° : wypadkowa $\sqrt{3} kq^2/a^2$, skierowana od środka trójkąta.

Zadania · część 2

1. $E = kq/r^2 \approx 899 \text{ V/m}$; $F = eE \approx 1,4 \cdot 10^{-16} \text{ N}$, w stronę ładunku.
2. $a = eE/m \approx 1,76 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$, czas $5 \cdot 10^{-9} \text{ s}$, odchylenie $\frac{1}{2}at^2 \approx 2,2 \text{ cm}$. Tak odchyłano wiązkę w lampie oscyloskopowej (kineskopy telewizorów odchyłały ją magnetycznie).
3. $E = kq \left[\frac{1}{(r-d/2)^2} - \frac{1}{(r+d/2)^2} \right] \approx kq \frac{2d}{r^3}$ (rozwinięcie dla $d \ll r$).
4. Poza odcinkiem, po stronie mniejszego ładunku, w odległości x od $+q$: $1/x^2 = 4/(x+d)^2$, $x = d$.
5. $pE \approx 6 \cdot 10^{-25} \text{ J}$, a $kT \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$: kilka tysięcy razy mniej. Ruchy cieplne prawie całkowicie przeważają, a pole tylko nieznacznie porządkuje dipole (średnio $\langle \cos \theta \rangle \approx pE/3kT \approx 5 \cdot 10^{-5}$).

Zadania · część 3

1. $q/\epsilon_0 \approx 1,13 \cdot 10^5 \text{ V m}$; z symetrii przez jedną ścianę $1/6$ tego.
2. Osiem jednakowych sześciątów otacza wierzchołek, więc przez jeden przechodzi $q/8\epsilon_0$.
3. 0; $kQr/R^3 \approx 1800 \text{ V/m}$; $kQ/R^2 \approx 3600 \text{ V/m}$; $kQ/r^2 \approx 900 \text{ V/m}$.
4. $\nabla \cdot \vec{E} = a$, więc $\rho = \epsilon_0 a$: jednorodnie naładowany obszar (np. wewnątrz płaskiej naładowanej warstwy).
5. $\Phi = E \cdot 4\pi r^2 \propto r^{-\delta}$: zależy od r . Prawo Gaussa (strumień zależy tylko od ładunku wewnątrz) jest więc równoważne prawu dokładnie odwrotnych kwadratów; testy prawa Gaussa (pole wewnątrz powłoki) mierzą δ .

Zadania · część 4

1. $\lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$: $1,8 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ i $1,8 \cdot 10^4 \text{ V/m}$. Przy 1 cm to już ok. 60% pola przebicia powietrza (3 MV/m).
2. Między: $\sigma/\epsilon_0 \approx 1,13 \cdot 10^5 \text{ V/m}$; na zewnątrz: 0 (pola obu płyt się znoszą).
3. Składowe poprzeczne się znoszą; podłużna od elementu dq : $k dq z/(z^2 + R^2)^{3/2}$. Razem $E = kQz/(z^2 + R^2)^{3/2}$; maksimum przy $z = R/\sqrt{2}$, równe ok. $0,385 kQ/R^2$.
4. $z \rightarrow 0$: nawias $\rightarrow 1$. $z \gg R$: $\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \approx 1 - \frac{R^2}{2z^2}$, więc $E \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{2z^2} = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 z^2} = kQ/z^2$.

5. Z symetrii pole jest prostopadłe i zerowe w płaszczyźnie środkowej. „Puszka” od środka do odległości x : $EA = \rho Ax/\epsilon_0$, więc $E = \rho x/\epsilon_0$ dla $|x| < a$ i $E = \rho a/\epsilon_0$ na zewnątrz (pole płaszczyzny o $\sigma = 2\rho a$).

Zadania • część 5

1. $\sigma = -\epsilon_0 E \approx -1,15 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$; razem $Q = \sigma \cdot 4\pi R^2 \approx -6 \cdot 10^5 \text{ C}$.
2. $Q = ER^2/k \approx 7,5 \mu\text{C}$.
3. Na wewnętrznej $-q$ (żeby strumień przez sferę w metalu był zerowy), na zewnętrznej $+q$. Na zewnątrz pole kq/r^2 , jakby powłoki nie było. Ekranowanie działa tylko w jedną stronę: wnęka jest chroniona przed polem z zewnątrz, ale nie odwrotnie (chyba że powłokę uziemimy).
4. Mają ten sam potencjał kQ/R (dział 14 „Potencjał, przewodniki i kondensatory”), więc $Q \propto R$: mała kula ma 10 razy mniejszy ładunek, ale pole $kQ/R^2 \propto 1/R$ jest przy niej 10 razy silniejsze. Ostrza „wyciekają” ładunkiem.
5. Metalowa osłona z otworami działa jak klatka Faradaya dla fal dużo dłuższych od tych otworów. Fale telefonii komórkowej (ok. 10–40 cm) są dużo dłuższe od szczelin kabiny windy, więc kabina mocno je tłumi. Okna samochodu mają ok. 0,5–1 m: fale FM (ok. 3 m) częściowo przez nie przechodzą, a fale długie (1–2 km) karoseria ekranuje prawie jak pole statyczne. Dlatego antena radia samochodowego jest na zewnątrz karoserii.

Zadania feynmanowskie

1. Ciało to w przybliżeniu tyle samo protonów co neutronów: liczba elektronów $\approx 70/(2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}) \approx 2,1 \cdot 10^{28}$; 1% to $2,1 \cdot 10^{26}$, ładunek ok. $3,4 \cdot 10^7 \text{ C}$.
2. $F = kq^2/r^2 \approx 2,8 \cdot 10^{25} \text{ N}$, ok. połowa ciężaru Ziemi ($5,9 \cdot 10^{25} \text{ N}$). Tak potężna jest siła elektryczna; obojętność materii jest niezwykle dokładna. (FLP II-1-1)
1. Trwała równowaga wymaga pola skierowanego do środka na całej małej sferze wokół punktu: strumień ujemny. Bez ładunku wewnątrz prawo Gaussa daje strumień zero: sprzeczność.
2. Żaba jest diamagnetykiem: jej indukowany moment magnetyczny jest przeciwny do pola i zależy od niego. Energia zależy wtedy od kwadratu natężenia pola, a ono może mieć minimum, więc twierdzenie Earnshawa (dla stałych ładunków lub momentów) nie obowiązuje.
3. 1. $Q = -\epsilon_0 E \cdot 4\pi R^2 \approx -6 \cdot 10^5 \text{ C}$; to tylko ok. $7 \cdot 10^5$ elektronów na cm^2 .
2. Ładunek dodatni jest rozłożony w atmosferze, głównie w niższych kilometrach. Atmosfera słabo przewodzi i ten „kondensator” rozładowałby się w czasie od kilku do kilkudziesięciu minut (Feynman podaje ok. pół godziny); doładowują go burze na całej Ziemi (globalny obwód elektryczny).
4. 1. Stożki wycinają z powłoki płyty o polach proporcjonalnych do r_1^2 i r_2^2 (z uwzględnieniem nachylenia, które jest dla obu jednakowe). Ładunki płyt są proporcjonalne do r^2 , a pola od nich do q/r^2 : oba wkłady są równe i przeciwne.
2. Suma po wszystkich parach stożków daje zero. Gdyby siła malała jak $1/r^{2+\delta}$, bliższy płąt by przeważał: zerowe pole wewnątrz jest testem prawa $1/r^2$. (FLP II-5-8)
5. 1. W polu jednorodnym siły na $+q$ i $-q$ są równe i przeciwne. W polu niejednorodnym bliższy biegun czuje silniejsze pole: wypadkowa ciągnie dipol w stronę silniejszego pola.
2. Indukowany dipol $p \propto E \propto 1/r^2$, a siła $\propto p dE/dr \propto r^{-2} \cdot r^{-3} = r^{-5}$. Dlatego papierki podskakują dopiero, gdy balon jest bardzo blisko.

6. 1. $Q = ER^2/k \approx 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.
2. Krople w chmurze mają ładunki od setek razy mniejszych do porównywalnych z tą granicą: przy dużych ładunkach i silnych polach zewnętrznych na kroplach zaczynają się wyładowania, które mogą zapoczątkować piorun.
7. 1. Na ścianie wnęki indukuje się $-q$ rozłożone tak, by pole w metalu było zerowe; na zewnętrznej powierzchni kuli pojawia się $+q$.
2. Ładunek na zewnętrznej powierzchni rozkłada się tak, jakby wnęki nie było: równomiernie. Pole na zewnątrz to kq/r^2 od środka kuli, niezależnie od położenia q we wnętrze. Metal „ukrywa” szczegóły wnętrza. (FLP II-5-10)
8. 1. Pole tuż na zewnątrz to σ/ϵ_0 , wewnątrz 0. Ładunek warstwy sam siebie nie popycha; pole od reszty ładunków musi być takie, by razem z polem $\pm\sigma/2\epsilon_0$ samego płata dawać te wartości: wynosi $\sigma/2\epsilon_0$.
2. Siła na jednostkę powierzchni: $\sigma \cdot \sigma/2\epsilon_0$. To „ciśnienie elektrostatyczne”: naładowana bańka mydlana trochę się rozdyma.

Fizyka · Dział 13: Pole elektryczne i prawo Gaussa · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. II (Addison-Wesley 1964; New Millennium Edition 2011), rozdz. 1, 4–6. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.