

Optyka: najkrótszy czas i dodawanie fal

Światło wybiera drogę, która zajmuje najmniej czasu, a gdzie ten obraz zawodzi, trzeba je traktować jak falę o długości pół mikrometra i dodawać fazory. Z tych dwóch pomysłów wynika prawie cała optyka: prawo załamania, soczewki i oko, tęcza, prążki interferencyjne, siatki dyfrakcyjne, granica rozdzielczości teleskopu i barwy bańki mydlanej.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, rozdz. 26, 27,
29–33

W TYM DZIALE

- 0 Prolog: czarna bańka
- 1 Zasada Fermata: odbicie i załamanie
- 2 Soczewki, oko i przyrządy
- 3 Interferencja: dodawanie fazorów
- 4 Dyfrakcja i granica rozdzielczości
- 5 Cienkie warstwy, współczynnik załamania i polaryzacja
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: czarna bańka

Bańka mydlana mieni się barwami, które przesuwają się po powierzchni, gdy woda spływa w dół i błona cienieje. Tuż przed pęknięciem górna część bańki robi się czarna: przestaje odbijać światło, choć wciąż tam jest. Newton badał to zjawisko z soczewką położoną na płytce szklanej (pierścienie Newtona) i choć w światło jako falę nie wierzył, zmierzył, że barwy powtarzają się przy grubościach rosnących o ułamki mikrometra.

Wyjaśnienie wymaga dwóch kroków. Pierwszy to obraz promieni: światło biegnie po drogach, które zajmują najmniej czasu, i z tego wynikają prawa odbicia i załamania, soczewki i przyrządy optyczne. Drugi to obraz falowy: światło odbite od przedniej i tylnej powierzchni błony dodaje się z różnymi fazami, a wynik zależy od grubości błony w porównaniu z długością fali. Feynman pokazuje, że oba obrazy są ze sobą związane: zasada najmniejszego czasu wynika z tego, że fale biegnące drogami bliskimi najszybszej mają prawie te same fazy i się wzmacniają.

FLP I-26-1, 26-6

Pytanie na start. Dlaczego bańka tuż przed pęknięciem jest czarna, a nie przezroczysta jak szkło?
Odpowiedź w części 5 i w symulacji 4.

Zasada Fermata: odbicie i załamanie

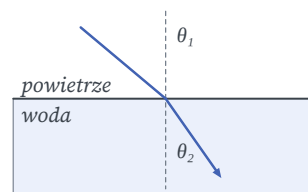
W ośrodku o współczynniku załamania n światło biegnie z prędkością c/n : w wodzie ($n = 1,33$) z prędkością 225 000 km/s, w szkłe ($n \approx 1,5$) 200 000 km/s. Fermat (1662) sformułował zasadę: światło biegnie między dwoma punktami po drodze, której przebycie zajmuje najmniej czasu (ściślej: czas jest stacjonarny, co dopuszcza też maksima i punkty siodłowe). FLP I-26-3, 26-5

🏰 PRAWO · ODBICIE I ZAŁAMANIE (SNELLIUSA)

$$\theta_{\text{odb}} = \theta_{\text{pad}}, \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Kąty mierzymy od normalnej do powierzchni. Oba prawa wynikają z minimalizacji czasu: dla odbicia najkrótsza jest droga przez punkt, w którym kąty są równe (odbicie lustrzane drugiego punktu leży na prostej), a dla załamania to zadanie ratownika z lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce i wariacyjne ujęcie z lekcji 6.1 Rachunek wariacyjny.

Przy przejściu z ośrodka optycznie gęstszego do rzadszego ($n_1 > n_2$) promień odchyła się od normalnej, a powyżej kąta granicznego $\sin \theta_g = n_2/n_1$ nie wychodzi wcale: następuje całkowite wewnętrzne odbicie. Dla wody $\theta_g = 48,6^\circ$ (ryba pod wodą widzi całe niebo w stożku o tym kącie, a dalej odbicie dna), dla szkła $41,8^\circ$, dla diamentu $24,4^\circ$ (stąd jego blask). Na całkowitym wewnętrznym odbiciu działają światłowody i pryzmaty w lornetkach.



Współczynnik załamania nieco zależy od długości fali (dyspersja): dla wody od 1,331 dla czerwieni do 1,343 dla fioletu. Pryzmat rozszczepia więc światło białe, a krople deszczu tworzą tęczę: światło po jednym odbiciu wewnątrz kropli wychodzi najjaśniej pod kątem ok. 42° od kierunku przeciwnego do Słońca dla czerwieni i ok. $40,6^\circ$ dla fioletu (przykład 12.6). W powietrzu o zmiennej temperaturze n zmienia się płynnie i promienie się zakrzywiają: stąd miraż nad gorącą szosą. (FLP I-26-4)

⚠️ PUŁAPKA · CZĘSTOTLIWOŚĆ SIĘ NIE ZMIENIA

Przy przejściu do innego ośrodka zmienia się prędkość i długość fali ($\lambda_{\text{osr}} = \lambda/n$), ale nie częstotliwość: fala musi być ciągła na granicy, więc ile grzbietów dochodzi, tyle odchodzi. Dlatego barwa (związana z częstotliwością) pod wodą jest ta sama co w powietrzu.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Promień pada z powietrza na wodę pod kątem 45° od normalnej. Pod jakim kątem biegnie w wodzie? A w szkłe ($n = 1,5$)?

- 2 Oblicz kąt graniczny dla wody, szkła i diamentu ($n = 2,42$).

- 3 Basen ma głębokość 2 m. Jak głęboki wydaje się, gdy patrzymy pionowo w dół?

- 4 Światłowód ma rdzeń o $n_1 = 1,48$ i płaszcz o $n_2 = 1,46$. Jaki jest kąt graniczny na granicy rdzeń-płaszcz? Pod jakim największym kątem do osi włókna może biec promień, żeby nie uciec?

- 5 Wyprowadź prawo odbicia z zasady Fermata: światło idzie z punktu A do B przez punkt na lustrze. Dlaczego najkrótsza droga to ta z równymi kątami?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Soczewki, oko i przyrządy

Soczewka skupiająca jest tak ukształtowana, że wszystkie drogi z punktu przedmiotu do punktu obrazu zajmują ten sam czas: promienie przechodzące przez grubszy środek są spowalniane dokładnie tyle, ile tracą promienie biegnące dłuższą drogą przez brzeg. Dlatego wszystkie spotykają się w jednym punkcie. (FLP I-26-4, 27-3)

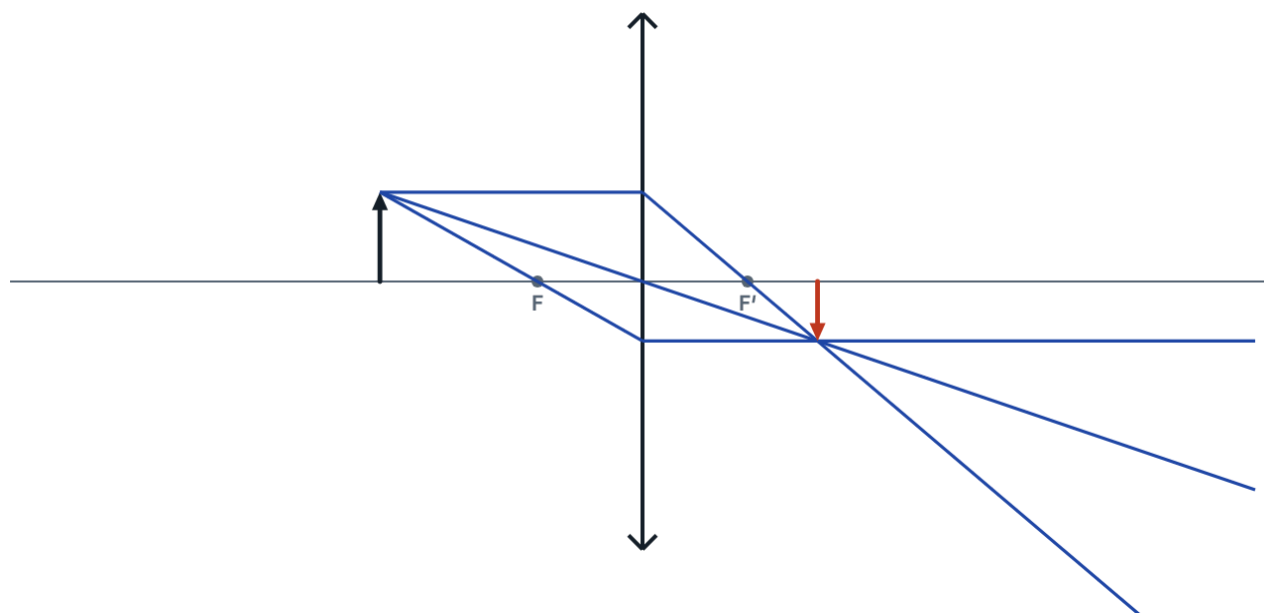
PRAWO · CIENKA SOCZEWKA

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}, \quad m = -\frac{s'}{s}, \quad \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

s to odległość przedmiotu, s' obrazu (dodatnia, gdy obraz jest rzeczywisty, po drugiej stronie soczewki), f ogniskowa (dodatnia dla soczewki skupiającej). R_1, R_2 to promienie krzywizny kolejnych powierzchni, dodatnie, gdy środek krzywizny leży za powierzchnią (po stronie, w którą biegnie światło); dla soczewki dwuwypukłej $R_1 > 0, R_2 < 0$. m to powiększenie poprzeczne (ujemne: obraz odwrócony). Zdolność skupiająca $1/f$ mierzy się w dioptriach ($D = 1/m$). Wzór dla zwierciadła kulistego ma tę samą postać z $f = R/2$.

Trzy promienie wystarczają do narysowania obrazu: równoległy do osi przechodzi po załamaniu przez ognisko F' , przechodzący przez środek soczewki nie zmienia kierunku, a biegnący przez ognisko F wychodzi równoległe do osi (symulacja 1). Gdy przedmiot jest bliżej niż ogniskowa, promienie po soczewce się rozbiegają, a obraz jest **pozorny**: tam, skąd zdają się wychodzić. Tak działa lupa. FLP I-27-4

SYMULACJA 1 Bieg promieni przez cienką soczewkę. Zmieniaj odległość przedmiotu i ogniskową (ujemna to soczewka rozpraszająca). Przerywane linie to przedłużenia promieni, które wyznaczają obraz pozorny.



— promienie - - przedłużenia (obraz pozorny) — przedmiot — obraz

odległość obrazu s' 20,0 cm

powiększenie $m = -s'/s$ -0,67

obraz rzeczywisty, odwrócony

zdolność skupiająca $1/f$ 8,3 D

Soczewka skupiająca, przedmiot dalej niż ogniskowa: obraz rzeczywisty i odwrócony, pomniejszony. Tak działa aparat fotograficzny i projektor.

Stan na rysunku: $f = 12,0$ cm, przedmiot 4 cm w odległości 30,0 cm; $s' = 20,0$ cm, $m = -0,67$.

Oko ma zdolność skupiającą ok. 60 D (z czego większość daje rogówka), a soczewka oka zmienia ją o kilka dioptrii, żeby ostro widzieć bliskie przedmioty (akomodacja). Krótkowidz ma oko za silne: jego punkt daleki leży np. 0,5 m przed nim, a koryguje go soczewka rozpraszająca -2 D. Dalekowidz potrzebuje soczewki skupiającej. Lupa o ogniskowej f pozwala oglądać przedmiot z odległości f zamiast 25 cm: powiększenie kątowe ok. $25 \text{ cm}/f$. Luneta z obiektywem o ogniskowej f_1 i okulem f_2 powiększa kątowo f_1/f_2 razy. (FLP I-27-5)

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Obiektyw aparatu ma ogniskową 50 mm. Jak daleko od matrycy musi być, żeby ostro sfotografować osobę stojącą 2 m dalej? Ile razy mniejszy jest jej obraz?

- 2 Przedmiot stoi 7,5 cm przed soczewką o ogniskowej 5 cm. Gdzie powstaje obraz i jaki jest? A gdy przedmiot jest 3 cm od soczewki?
- 3 Krótkowidz widzi ostro najwyżej do 50 cm. Jakich okularów potrzebuje (pomiń odległość okularów od oka)?
- 4 Soczewka dwuwypukła ze szkła ($n = 1,5$) ma oba promienie krzywizny po 10 cm. Jaka jest jej ogniskowa? Jak zmieni się ogniskowa pod wodą?
- 5 Luneta ma obiektyw o ogniskowej 1000 mm i okular 10 mm. Jakie ma powiększenie? Jaka średnicę ma tarcza Księżyca ($0,5^\circ$) widziana przez lunetę?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

3 Interferencja: dodawanie fazorów

Światło to fala elektromagnetyczna o długości od ok. 400 nm (fiolet) do 700 nm (czerwień). Dwie fale o tej samej częstotliwości dodajemy jako fazory (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory): wynik zależy od różnicy faz φ . Natężenie sumy dwóch fal o równych amplitudach to $I = 2I_0(1 + \cos \varphi) = 4I_0 \cos^2(\varphi/2)$: od zera do czterokrotności natężenia jednej fali, a średnio $2I_0$, więc energia się zgadza. (FLP I-29-5)

W doświadczeniu Younga (1801) światło z jednego źródła przechodzi przez dwie wąskie szczeliny odległe o d . Na ekranie w kierunku θ fale z obu szczelin mają różnicę dróg $d \sin \theta$ i różnicę faz $\varphi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$.

🔧 PRAWO · INTERFERENCJA NA SZCZELINACH

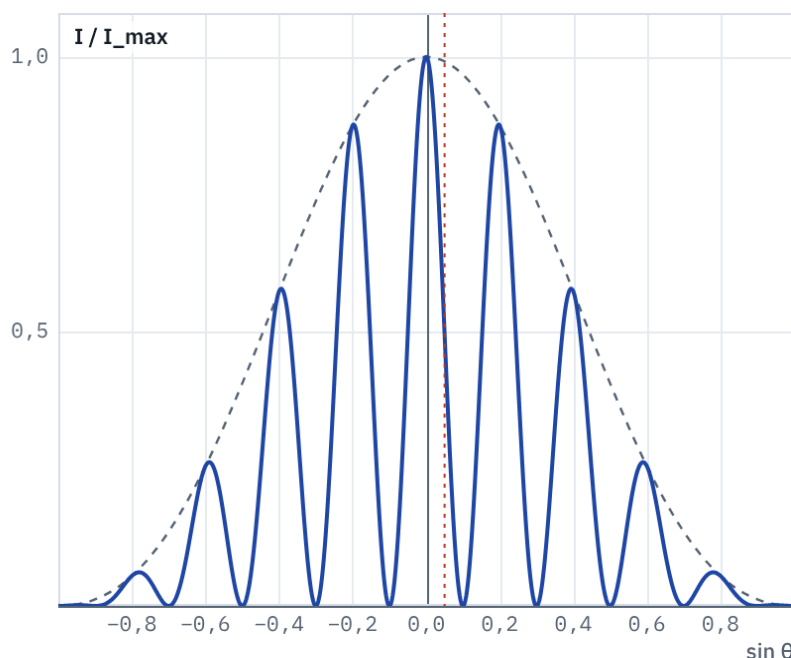
$$d \sin \theta = m\lambda \text{ (maksima)}, \quad I(\theta) = I_{\max} \left[\frac{\sin(N\alpha)}{N \sin \alpha} \right]^2, \quad \alpha = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

Dla dwóch szczelin prążki na ekranie odległym o L są odległe o $\lambda L/d$. Dla N szczelin (siatka dyfrakcyjna) maksima główne leżą w tych samych miejscach, ale ich szerokość maleje jak $1/N$, a między nimi jest $N - 1$ minimów: fazory od wszystkich szczelin układają się wtedy w zamknięty wielokąt. (FLP I-30-1, 30-2)

Siatka o N szczelinach rozróżnia dwie długości fal różniące się o $\Delta\lambda$, gdy $\lambda/\Delta\lambda \leq mN$ (zdolność rozdzielcza siatki). Do rozdzielenia dubletu sodu (589,0 i 589,6 nm) w pierwszym rzędzie wystarczy ok. 1000 oświetlonych rys. Płyta CD z rowkami co 1,6 μm to siatka odbiciowa: stąd jej tęcze barwy. (FLP I-30-3)

SYMULACJA 2

Natężenie światła za N szczelinami w funkcji kierunku, z obwiednią pochodzącą od skończonej szerokości szczeliny. Po prawej (na wąskim ekranie pod wykresem) fazory od kolejnych szczelin dla wybranego kierunku (czerwona przerywana linia) i ich suma. Zwiększaj N i obserwuj, jak maksima się zwężają, a fazory zamykają w wielokąt.



suma fazorów



— natężenie - - - obwiednia od jednej szczeliny — fazory od kolejnych szczelin

różnica faz sąsiednich szczelin 90°

natężenie w tym kierunku $0,496 I_{\max}$

maksima główne: $\sin \theta = m\lambda/d$ co $0,200$

minima między nimi 1

Maksima główne leżą tam, gdzie fazory wszystkich 2 szczelin są zgodne (różnica faz $0^\circ, 360^\circ, \dots$). Między nimi jest $N - 1 = 1$ minimów: fazory zamykają się w wielokąt. Im więcej szczelin, tym węższe maksima: tak działa siatka dyfrakcyjna.

Stan na rysunku: $N = 2$, $d = 5,0 \lambda$, $a = 1,00 \lambda$; w kierunku $\sin \theta = 0,050$ natężenie $0,496 I_{\max}$.

⚠️ PUŁAPKA · INTERFERENCJA WYMAGA SPÓJNOŚCI

Dwie żarówki nie dają prążków. Każdy atom świeci przez kilka nanosekund z przypadkową fazą, więc różnica faz między dwoma niezależnymi źródłami zmienia się chaotycznie i prążki uśredniają się do jednolitego tła. Young otrzymał prążki, bo oświetlił obie szczeliny światłem z jednego małego otworu: to te same ciągi fal przechodziły przez obie szczeliny. Laser daje światło spójne na długości metrów i prążki są łatwe do zobaczenia.

- 1 Laser 633 nm oświetla dwie szczeliny oddległe o 0,25 mm. Jaka jest odległość prążków na ekranie oddalonym o 2 m?
■ ■ ■
- 2 Siatka ma 600 rys na milimetr. Pod jakimi kątami widać zielone światło 550 nm w pierwszym i drugim rzędzie? Czy istnieje trzeci rząd?
■ ■ ■
- 3 Ile szczelin siatki trzeba oświetlić, żeby w pierwszym rzędzie rozdzielić linie sodu 589,0 i 589,6 nm?
■ ■ ■
- 4 Dla trzech szczelin narysuj fazory w kierunku, w którym sąsiednie fale różnią się fazą o 120°. Jakie jest natężenie? Ile minimów jest między dwoma maksimami głównymi?
■ ■ ■
- 5 Pokaż, że suma N fazorów o jednakowej długości A obróconych kolejno o φ ma długość $A \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$ (szereg geometryczny, lekcja 1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe).
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

4 Dyfrakcja i granica rozdzielczości

Jedna szeroka szczelina to wiele bliskich źródeł. Fazory od kolejnych pasków szczeliny układają się w łuk okręgu. W kierunku, w którym różnica dróg między brzegami szczeliny o szerokości a wynosi dokładnie λ , łuk zamyka się w pełny okrąg i natężenie spada do zera: FLP I-30-1, 30-6

$$a \sin \theta = m\lambda \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{minima}), \quad I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}.$$

Im węższa szczelina, tym szerzej światło się rozchodzi. Dla dużych odległości figura dyfrakcyjna jest transformatą Fouriera kształtu otworu (lekcja 4.3 Transformata Fouriera i delta Diraca): wąski otwór to szerokie widmo kierunków.

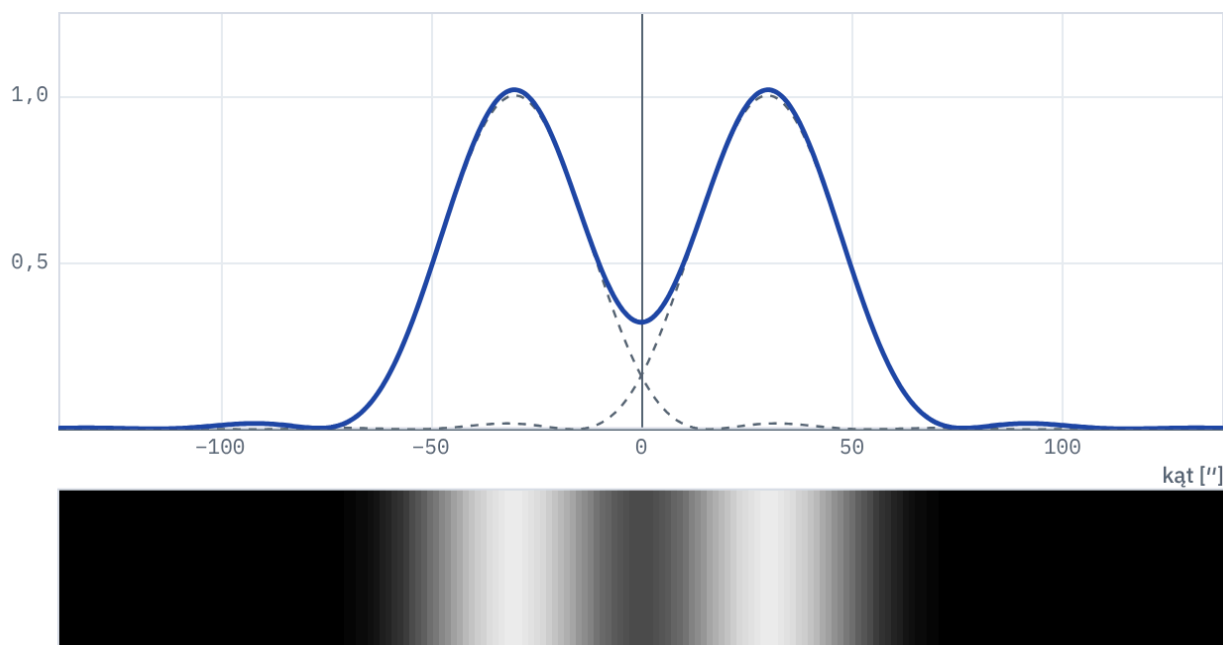
Dla okrągłego otworu o średnicy D pierwsze ciemne kółko leży pod kątem $\sin \theta = 1,22\lambda/D$. Obraz punktowej gwiazdy w teleskopie to plamka o takim rozmiarze kątowym, otoczona słabymi pierścieniami (plamka Airy'ego). Dwie gwiazdy da się rozróżnić, gdy środek plamki jednej wypada na pierwsze ciemne kółko drugiej: FLP I-30-4, 27-7

WYNIK · KRYTERIUM RAYLEIGHA

$$\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Oko (źrenica 3 mm, 550 nm): ok. $2,2 \cdot 10^{-4}$ rad $\approx 0,8'$, w praktyce ok. $1'$. Teleskop Hubble'a (2,4 m): $0,06''$. Mikroskop optyczny nie rozdziela szczegółów mniejszych niż ok. $\lambda/(2 \text{ NA}) \approx 200$ nm, gdzie NA to apertura numeryczna obiektywu (do ok. 1,4).

SYMULACJA 3 Dwie odległe punktowe gwiazdy obserwowane przez okrągły otwór (światło 550 nm). Przerywane krzywe to plamki dyfrakcyjne każdej z gwiazd, ciągła to ich suma, a pasek pod spodem pokazuje, co widać. Zmieniaj średnicę otworu i odległość kątową gwiazd.



-- obraz pierwszej gwiazdy -- obraz drugiej — suma (co widać)

kryterium Rayleigha $1,22 \lambda/D$ 46,13''

odległość źródeł 60,0''

spadek jasności między obrazami 68%

rozdzielone? tak

Źródła są dalej niż granica Rayleigha: między obrazami jasność spada o 68% i widać dwa punkty.

Stan na rysunku: $\lambda = 550$ nm, $D = 3$ mm, odległość źródeł 60,0''; granica Rayleigha 46,13''.

SKĄD TO WIEMY?

W 1818 r. Fresnel przedstawił falową teorię dyfrakcji na konkurs Akademii Francuskiej. Poisson, zwolennik teorii korpuskularnej, wyliczył z niej absurdalny jego zdaniem wniosek: w środku cienia okrągłej przeszkody powinna być jasna plamka. Arago przeprowadził doświadczenie i plamkę zobaczył. Dziś nazywa się ją plamką Poissona albo Aragona; jej potwierdzenie bardzo wzmocniło teorię falową (Fresnel wygrał konkurs w 1819 r.).

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Laser 633 nm oświetla szczelinę o szerokości 0,1 mm. Jaka jest szerokość jasnego prążka centralnego na ekranie odległym o 2 m?

- 2 Z jakiej odległości oko (źrenica 5 mm w nocy) rozróżni dwa reflektory samochodu odległe o 1,5 m?

- 3 Jak mały szczegół na Księżycu (384 000 km) rozróżni teleskop Hubble'a? A teleskop VLT o średnicy 8,2 m (gdyby nie atmosfera)?

- 4 Dlaczego radioteleskopy mają średnice setek metrów albo łączy się je w sieci o rozmiarach kontynentów?

- 5 Narysuj fazory od pasków szczeliny dla kierunku, w którym różnica dróg brzegów wynosi $\lambda/2$, λ i $3\lambda/2$. Jaki ułamek natężenia maksymalnego przypada na każdy?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5

Cienkie warstwy, współczynnik załamania i polaryzacja

5.1 Barwy cienkich warstw

Światło pada prawie prostopadle na błonę o grubości d i współczynniku n . Część odbija się od przedniej powierzchni, część od tylnej. Różnica dróg optycznych to $2nd$. Przy odbiciu od ośrodka o większym n fala zmienia fazę o pół okresu (dla bańki: na przedniej powierzchni tak, na tylnej nie). Dlatego dla błony mydlanej w powietrzu: FLP I-30-5

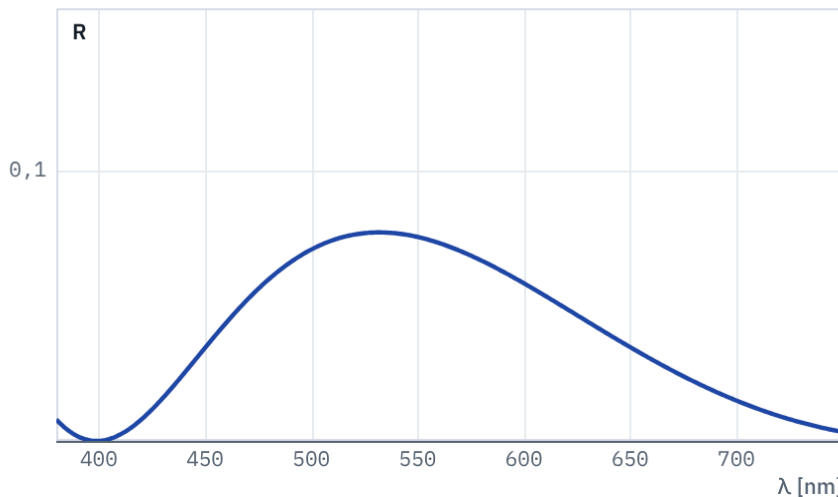
$$2nd = (m + \frac{1}{2})\lambda \text{ (wzmocnienie odbicia),} \quad 2nd = m\lambda \text{ (wygaszenie).}$$

Błona dużo cieńsza od długości fali ($d \rightarrow 0$) wygasza odbicie wszystkich barw: to czarna bańka z prologu. Grubsze błony wzmacniają różne barwy w zależności od grubości, a bardzo grube mieszają ich tak wiele, że wyglądają biało. Tę samą zasadę wykorzystuje **powłoka antyrefleksyjna**: warstwa o grubości $\lambda/4n_c$ i współczynniku $n_c \approx \sqrt{n_{\text{szkła}}}$ wygasza odbicie (oba odbicia mają skok fazy, różnica dróg to $\lambda/2$).

SYMULACJA 4 Błona mydlana ($n = 1,33$) w świetle odbitym. Górny pasek: barwy błony od grubości 0 do 1500 nm (od lewej najcieńsza, jak górna część spływającej bańki). Poniżej widmo odbicia dla wybranej grubości i barwa, jaką zobaczy oko (jasność wzmocniona, bo błona odbija tylko kilka procent światła).



grubość błony 0 → 1500 nm (barwy w świetle odbitym)



barwa

— współczynnik odbicia $R(\lambda)$

grubość d 300 nm

maksima odbicia w zakresie widzialnym [nm] 532

$2nd$ (różnica dróg) 798 nm

Promień odbity od przedniej i tylnej powierzchni interferuje. Wzmocnienie, gdy $2nd = (m + \frac{1}{2})\lambda$: każda grubość wzmacnia inne barwy.

Stan na rysunku: błona mydlana $n = 1,33$, grubość 300 nm, światło prostopadłe; maksima odbicia przy 532 nm.

5.2 Skąd się bierze współczynnik załamania

Feynman wyjaśnia n mikroskopowo. Fala świetlna porusza elektrony w atomach materiału, a drgające elektrony same wysyłają fale. W kierunku do przodu fala wypromieniowana przez

warstwę materiału jest opóźniona w fazie o ćwierć okresu względem fali padającej; ich suma to fala o fazie nieco opóźnionej, czyli taka, jakby światło biegło wolniej. Elektrony są jak oscylatory z częstotliwością własną w nadfiolecie (dział 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe”), więc odpowiadają silniej na światło o wyższej częstotliwości: n rośnie od czerwieni do fioletu (dyspersja normalna). (FLP I-31-1, 31-3)

To samo drganie elektronów rozprasza światło na boki, z natężeniem proporcjonalnym do ω^4 : fiolet (400 nm) rozprasza się w powietrzu ok. 9 razy, a błękit (450 nm) ok. 6 razy silniej niż czerwień (700 nm). Stąd niebieskie niebo i czerwone zachody Słońca. (FLP I-32-5)

5.3 Polaryzacja

Światło jest falą poprzeczną: pole elektryczne drga prostopadle do kierunku biegu, a kierunek tych drgań to polaryzacja. Przy odbiciu pod **kątem Brewstera** $\tan \theta_B = n_2/n_1$ (dla wody 53° ; promień odbity i załamany są wtedy prostopadle) odbija się tylko składowa drgająca równolegle do powierzchni: elektrony w wodzie, drgając w drugim kierunku, musiałyby promieniować wzdłuż kierunku swoich drgań, czego dipol nie robi. Okulary polaryzacyjne przepuszczają drgania pionowe i gaszą blask odbity od wody i szosy. (FLP I-33-1, 33-4, 33-6)

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Błona mydlana ma grubość 300 nm. Dla jakich długości fal w zakresie widzialnym odbicie jest najsilniejsze? Jaką ma barwę?

- 2 Jakiej grubości powinna być powłoka antyreflekcyjna z MgF_2 ($n = 1,38$) dla światła 550 nm? Jaki ułamek światła odbija się od gołego szkła ($n = 1,5$) przy padaniu prostopadłym?

- 3 Oblicz kąt Brewstera dla wody i szkła.

- 4 Dlaczego bańka tuż przed pęknięciem jest czarna, a cienka warstwa powietrza między dwiema płytkami szklanymi, w miejscu ich styku, też jest ciemna (środek pierścieni Newtona)?

- 5 Ile razy silniej powietrze rozprasza światło fioletowe (400 nm) niż czerwone (700 nm)? Dlaczego niebo nie jest więc fioletowe?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA DLA ZADAŃ Z OPTYKI

1. **Promienie czy fale?** Gdy przeszkody i otwory są dużo większe od λ : optyka geometryczna (Snellius, soczewki). Gdy porównywalne albo liczą się różnice dróg rzędu λ : fale.
2. **Geometria:** kąty od normalnej; znaki s, s', f zgodnie z umową (rzeczywiste dodatnie).
3. **Fazy:** różnica dróg optycznych ($n \times \text{droga}$) razy $2\pi/\lambda$, plus skoki o π przy odbiciu od ośrodka gęstszego.
4. **Wiele źródeł:** dodaj fazy; dla jednakowych i równomiernie przesuniętych użyj wzoru $\sin(N\varphi/2)/\sin(\varphi/2)$.
5. **Rozdzielczość:** $\theta \approx 1,22\lambda/D$ dla otworu, $\lambda/\Delta\lambda = mN$ dla siatki.
6. **Sprawdzenie:** granica $\lambda \rightarrow 0$ (optyka geometryczna), zachowanie energii (średnie natężenie), rzędy wielkości.

Przykład 12.1

Okno Snella

Nurek pod spokojną powierzchnią jeziora patrzy w górę. W jakim stożku widzi świat nad wodą? Co widzi, patrząc pod większym kątem?

- 1 Promienie z całej półsfery nad wodą (kąty padania od 0 do 90°) po załamaniu biegają pod kątami od 0 do θ_g .
- 2 $\theta_g = \arcsin(1/1,333) \approx 48,6^\circ$: cały świat nad wodą mieści się w stożku o kącie połówkowym $48,6^\circ$.
- 3 Pod większymi kątami światło z dołu ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu od powierzchni: nurek widzi odbicie dna, jak w lustrze.

Wynik: stożek o kącie wierzchołkowym ok. 97° (okno Snella); dalej powierzchnia wody jest lustrem.

Sprawdzenie: przedmioty tuż nad horyzontem są na brzegu okna mocno ściśnięte, bo cały zakres kątów padania 80° – 90° (przedmioty 0° – 10° nad horyzontem) trafia w wąski pas $47,6^\circ$ – $48,6^\circ$ ✓.

Przykład 12.2

Lupa i projektor

Soczewka o ogniskowej 5 cm. (a) Jak ustawić przedmiot, by uzyskać obraz na ekranie odległym o 2 m od soczewki i ile razy jest powiększony? (b) Jakie powiększenie kątowe daje ta soczewka jako lupa?

- 1 (a) $1/s = 1/5 - 1/200$, $s \approx 5,13$ cm; $m = -200/5,13 \approx -39$.
- 2 (b) Lupa z przedmiotem w ognisku: oko widzi go pod kątem h/f zamiast $h/25$ cm, powiększenie $25/5 = 5$.

Wynik: przedmiot tuż za ogniskiem daje na ekranie obraz 39 razy powiększony i odwrócony (dlatego slajdy wkłada się do góry nogami); jako lupa soczewka powiększa 5 razy.

Sprawdzenie: gdy $s \rightarrow f$, obraz ucieka do nieskończoności i powiększenie rośnie bez ograniczeń: aby powiększyć bardziej, przedmiot musi być bliżej ogniska ✓.

Przykład 12.3

Pomiar długości fali lasera

Laser świeci prostopadle na siatkę 600 rys/mm. Na ekranie odległym o 1,00 m od siatki najbliższe boczne plamki są 0,336 m od plamki centralnej, a następne 0,826 m. Jaka jest długość fali?

- 1 Okres siatki $d = 1/600$ mm = 1,667 μ m.
- 2 Pierwszy rząd: $\tan \theta_1 = 0,336$, $\theta_1 = 18,6^\circ$, $\sin \theta_1 = 0,318$; $\lambda = d \sin \theta_1 \approx 531$ nm.
- 3 Drugi rząd: $\tan \theta_2 = 0,826$, $\theta_2 = 39,6^\circ$, $\sin \theta_2 = 0,637$; $\lambda = d \sin \theta_2/2 \approx 531$ nm.

Wynik: ok. 531 nm, zielony laser (532 nm). Oba rzędy dają tę samą wartość.

Sprawdzenie: odległości plamek na ekranie nie są proporcjonalne do rzędu (0,336 i 0,826, nie 0,336 i 0,672), bo proporcjonalne są sinusy kątów, a nie tangensy. Gdyby ktoś wziął drugą plamkę za pierwszy rząd, dostałby 1062 nm, podczerwień, czyli wynik sprzeczny z widoczną zieloną barwą ✓.

Przykład 12.4

Czy da się przeczytać tablicę rejestracyjną z orbity?

Satelita na orbicie 400 km ma teleskop o średnicy lustra 2,4 m (jak Hubble). Jaki najmniejszy szczegół na Ziemi rozróżni w świetle 550 nm? Czy przeczyta tablicę rejestracyjną (litery ok. 8 cm)?

- 1 $\theta = 1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} / 2,4 \approx 2,8 \cdot 10^{-7}$ rad.
- 2 Na odległość 400 km: $\Delta x = 2,8 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^5 \approx 0,11$ m.

Wynik: ok. 11 cm: tablicę widać jako prostokąt, ale liter (8 cm, z odstępami po 1–2 cm) nie da się przeczytać nawet w idealnych warunkach, a atmosfera pogarsza obraz.

Sprawdzenie: komercyjne satelity obserwacyjne z lustrami ok. 1 m osiągają ok. 30 cm na piksel; to zgodne z prawem λ/D ✓.

Przykład 12.5

Plama oleju na mokrej jezdni

Warstwa oleju ($n = 1,45$) na wodzie ($n = 1,33$) ma grubość 400 nm. Jakie barwy odbija najsilniej przy patrzeniu prostopadłym?

- 1 Odbicie powietrze–olej: skok fazy (olej gęstszy). Olej–woda: bez skoku (woda rzadsza). Jak w bańce: wzmocnienie dla $2nd = (m + \frac{1}{2})\lambda$.
- 2 $\lambda = 4nd / (2m + 1) = 2320, 773, 464, 331$ nm.
- 3 W zakresie widzialnym: 464 nm (niebieski), a 773 nm leży tuż za czerwienią.

Wynik: plama w tym miejscu jest niebieskawa z domieszką purpury; tam, gdzie olej ma inną grubość, ma inne barwy.

Sprawdzenie: gdyby olej leżał na szkłe ($n = 1,5$), oba odbicia miałyby skok fazy i warunki wzmocnienia i wygaszenia zamieniłyby się miejscami ✓.

Tęcza

Promień wpada do kulistej kropli wody pod kątem padania i , załamuje się (kąt r), odbija raz od tylnej ściany i wychodzi. Całkowite odchylenie to $D = 180^\circ + 2i - 4r$. Pokaż, że D ma minimum i oblicz kąt tęczy dla $n = 1,333$.

- 1 $\sin i = n \sin r$. Warunek minimum $dD/di = 0$: $dr/di = 1/2$. Z $\cos i \, di = n \cos r \, dr$:
 $\cos i = \frac{n}{2} \cos r$.
- 2 Rozwiązanie: $\cos^2 i = (n^2 - 1)/3$, $i \approx 59,4^\circ$, $r \approx 40,2^\circ$.
- 3 $D_{\min} \approx 180 + 118,8 - 160,8 = 137,9^\circ$, czyli $180^\circ - D \approx 42,1^\circ$ od kierunku przeciwnego do Słońca.

Wynik: wiele promieni wychodzi z odchyleniem bliskim minimalnemu, więc tam światło się skupia: łuk o promieniu ok. 42° wokół punktu antysłonecznego. Dla czerwieni ($n = 1,331$) $42,4^\circ$, dla fioletu ($n = 1,343$) $40,6^\circ$: czerwień na zewnątrz.

Sprawdzenie: tęczę widać tylko, gdy Słońce jest niżej niż 42° nad horyzontem; w południe latem w Polsce (Słońce ok. 60° nad horyzontem) tęczy się nie widuje ✓.

7

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Przy załamaniu światło zmienia barwę.”

Zmienia prędkość i długość fali, ale nie częstotliwość, która decyduje o barwie.

× „Większe powiększenie zawsze pokaże więcej szczegółów.”

Granice wyznacza dyfrakcja (λ/D). Powiększenie ponad nią daje tylko większą, rozmytą plamkę („puste powiększenie”).

× „Dwie latarki skierowane w jedno miejsce dają prążki.”

Niezależne źródła są niespójne: ich prążki zmieniają się chaotycznie i uśredniają do jednolitej jasności.

× „Interferencja niszczy energię w ciemnych prążkach.”

Energia jest przesunięta do jasnych prążków; średnie natężenie to suma natężeń obu fal.

× „Światło zawsze biegnie najkrótszą drogą.”

Najszybszą (w czasie), a ściślej: o stacjonarnym czasie. Gdy światło przechodzi z powietrza do szkła, prosta łącząca dwa punkty jest najkrótsza, ale nie najszybsza.

× „Barwy bańki to pigment w płynie.”

To interferencja: barwa zależy od grubości błony, dlatego przesuwa się, gdy błona spływa.

× „Niebo jest niebieskie, bo odbija ocean.”

Niebieskie jest od rozpraszania Rayleigha ($\propto \omega^4$) na cząsteczkach powietrza, także nad pustynią.

8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

1 **Skąd światło „wie”?** Zasada Fermata wydaje się wymagać, by światło z góry porównało wszystkie drogi. Wyjaśnij za pomocą fazorów, dlaczego w praktyce światło biegnie drogą najszybszą.

2 **Druga tęcza.** Promień, który odbija się wewnątrz kropli dwa razy, ma odchylenie $D = 2(i - r) + 2(180^\circ - 2r) = 360^\circ + 2i - 6r$. Pokaż, że minimum odchylenia daje tęczę wtórną pod kątem ok. 51° i że ma odwróconą kolejność barw. Dlaczego niebo między tęczami jest ciemniejsze?

3 **Kot w ciemności.** Źrenica kota w nocy ma 14 mm, w dzień szczelinę szerokości 1 mm. Jak zmienia się dyfrakcyjna granica rozdzielczości? Dlaczego w dzień szczelina nie szkodzi tak, jak by wynikało z λ/D ?

4 **Pierścienie Newtona.** Soczewka o promieniu krzywizny 1 m leży na płaskiej płytce. W świetle 589 nm widać ciemne pierścienie. Jakiego mają promienia? Dlaczego środek jest ciemny?

- 5 **Hologram w miniaturze.** Siatka dyfrakcyjna to „zapisane” prążki interferencyjne dwóch fal płaskich. Jaki okres mają prążki powstałe z dwóch wiązek lasera 633 nm przecinających się pod kątem 30° ? Pod jakim kątem siatka o takim okresie ugnie potem wiązkę tego lasera?
- 6 **Diamant.** Dlaczego diament błyszczy bardziej od szkła o tym samym szlifie? Użyj kąta granicznego i dyspersji (n od 2,41 dla czerwieni do 2,45 dla fioletu).
- 7 **Dlaczego mikroskop elektronowy.** Elektron przyspieszony napięciem 100 kV ma długość fali ok. 3,7 pm (mechanika kwantowa, dział 17 „Amplitudy prawdopodobieństwa”). Porównaj teoretyczną granicę rozdzielczości mikroskopu optycznego i elektronowego. Dlaczego w praktyce mikroskopy elektronowe osiągają „tylko” ok. 0,05–0,1 nm?
- 8 **Miraż.** Nad rozgrzaną szosą powietrze przy ziemi ma 50°C , a metr wyżej 30°C . Współczynnik załamania powietrza to w przybliżeniu $n - 1 \approx 2,9 \cdot 10^{-4} \cdot (273 \text{ K}/T)$. Wyjaśnij, dlaczego widać „kałużę”, i oszacuj największy kąt (do poziomu), pod jakim promień może się jeszcze od niej „odbić”.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co mówi zasada Fermata?

Światło biegnie po drodze, dla której czas przebiegu jest stacjonarny (zwykle najkrótszy).

2 Kiedy zachodzi całkowite wewnętrzne odbicie?

Gdy światło idzie z ośrodka o większym n do mniejszego pod kątem większym od granicznego, $\sin \theta_g = n_2/n_1$.

3 Jaki obraz daje soczewka skupiająca przedmiotu bliższego niż ogniskowa?

Pozorny, prosty, powiększony (lupa).

4 Gdzie leżą maksima interferencyjne za siatką?

W kierunkach $d \sin \theta = m\lambda$.

5 Co się dzieje z maksimami, gdy zwiększamy liczbę szczelin przy tym samym odstępnie?

Zostają w tych samych miejscach, ale się zwężają (szerokość $\propto 1/N$), a natężenie maksimum rośnie jak N^2 .

6 Od czego zależy najmniejszy rozróżnialny kąt teleskopu?

Od λ/D : $\theta \approx 1,22\lambda/D$.

7 Dlaczego cienka błona mydlana jest czarna?

Skok fazy o pół okresu przy odbiciu od przedniej powierzchni sprawia, że przy grubości $\ll \lambda$ oba odbite promienie się wygaszają.

8 Dlaczego niebo jest niebieskie?

Rozpraszanie na cząsteczkach powietrza rośnie jak ω^4 : błękit rozprasza się kilka razy silniej niż czerwień.

PROMIENIE

$v = c/n$; $\lambda_{\text{osr}} = \lambda/n$, częstotliwość stała

Snellius: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$; $\sin \theta_g = n_2/n_1$

soczewka: $1/s + 1/s' = 1/f$, $m = -s'/s$

$1/f = (n-1)(1/R_1 - 1/R_2)$; lupa 25 cm/ f
; luneta f_1/f_2

Brewster: $\tan \theta_B = n_2/n_1$

FALE

dwie fale: $I = 4I_0 \cos^2(\varphi/2)$

siatka: $d \sin \theta = m\lambda$; $I \propto [\sin(N\alpha)/\sin \alpha]^2$
; $\lambda/\Delta\lambda = mN$

szczelina: $a \sin \theta = m\lambda$ (minima)

Rayleigh: $\theta = 1,22\lambda/D$

błona w powietrzu: $2nd = (m + \frac{1}{2})\lambda$
wzmocnienie

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 26 (zasada najmniejszego czasu), 29 (interferencja), 30 (dyfrakcja).
- **Dla chętnych:** rozdz. 27 (optyka geometryczna), 31 (pochodzenie współczynnika załamania), 32 (rozpraszanie), 33 (polaryzacja).

Następny dział: **Pole elektryczne i prawo Gaussa**. Fale świetlne, które tu dodawaliśmy, to drgania pola elektrycznego i magnetycznego. Zaczniemy od najprostszej sytuacji, ładunków w spoczynku, i zobaczymy, jak prawo Coulomba zamienia się w twierdzenie Gaussa z lekcji 3.6 Twierdzenia Greena, Stokesa i Gaussa.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\sin \theta_2 = \sin 45^\circ / 1,333$: $32,0^\circ$; w szkle $28,1^\circ$.
2. $48,6^\circ$, $41,8^\circ$, $24,4^\circ$.
3. Promienie z dna wychodzą pod małymi kątami; $h_{\text{pozorna}} = h/n \approx 1,5$ m.
4. $\sin \theta_g = 1,46/1,48$, $\theta_g \approx 80,6^\circ$ od normalnej, czyli do $9,4^\circ$ od osi włókna.
5. Odbij B w lustrze, otrzymując B'. Droga $A \rightarrow P \rightarrow B$ ma tę samą długość co $A \rightarrow P \rightarrow B'$, a ta jest najkrótsza, gdy P leży na prostej AB'. Wtedy kąty padania i odbicia są równe. FLP I-26-3

Zadania • część 2

1. $s' = 1/(1/50 - 1/2000)$ mm $\approx 51,3$ mm; powiększenie $s'/s \approx 1/39$.
2. $s' = 15$ cm, $m = -2$: rzeczywisty, odwrócony, dwukrotnie powiększony. Dla 3 cm: $s' = -7,5$ cm, $m = +2,5$: pozorny, prosty, po stronie przedmiotu.
3. Soczewka musi z przedmiotów w nieskończoności zrobić obraz pozorny w 50 cm: $f = -0,5$ m, czyli -2 D.
4. W powietrzu ($R_1 = 0,1$ m, $R_2 = -0,1$ m): $1/f = 0,5 \cdot (1/0,1 + 1/0,1)$, $f = 10$ cm. W wodzie liczy się stosunek $1,5/1,333$: $1/f = (1,125 - 1) \cdot 20$, $f = 40$ cm. Dlatego pod wodą bez maski widzimy nieostro: rogówka prawie przestaje skupiać.
5. $100\times$; Księżyc wydaje się mieć ok. 50° (dokładniej 47°), czyli wypełnia całe pole widzenia typowego okularu.

Zadania • część 3

1. $\lambda L/d \approx 5,1$ mm.
2. $d = 1,667$ μm . $\sin \theta_1 = 0,33$: $19,3^\circ$; $\sin \theta_2 = 0,66$: $41,3^\circ$. Trzeci rząd: $\sin \theta = 0,99$, istnieje, ale pod kątem ok. 82° , prawie wzdłuż siatki (słaby i trudny do obserwacji).
3. $N \geq \lambda/\Delta\lambda \approx 589,3/0,6 \approx 982$.
4. Trzy fazy obrócone o 120° tworzą trójkąt równoboczny: suma zero, minimum. Minima przy 120° i 240° : dwa ($N - 1$); między nimi słabe maksimum boczne przy 180° (suma równa jednemu fazorowi, natężenie $1/9$ maksimum).
5. $A \sum_{j=0}^{N-1} e^{ij\varphi} = A \frac{e^{iN\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} = A e^{i(N-1)\varphi/2} \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$. Moduł jak w tezie; z $\varphi = 2\alpha$ daje wzór na $I(\theta)$. FLP I-30-1

Zadania • część 4

1. Między pierwszymi minimami: $2\lambda L/a \approx 2,5$ cm.
2. $\theta = 1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}/0,005 \approx 1,34 \cdot 10^{-4}$ rad; $1,5/\theta \approx 11$ km (w praktyce kilka km, bo oko ma też inne ograniczenia).

3. Hubble: $2,8 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot 3,84 \cdot 10^8 \text{ m} \approx 110 \text{ m}$. VLT: ok. 30 m. Pozostawione na Księżycu lądowniki Apollo (kilka metrów) są dla nich niewidoczne.
4. Fale radiowe mają długość centymetrów do metrów, 10^4 – 10^6 razy więcej niż światło. Żeby dorównać rozdzielczością teleskopom optycznym, D musi być proporcjonalnie większe; interferometria łączy anteny oddległe o tysiące kilometrów w jeden „teleskop”.
5. Łuk o kącie 180° , 360° , 540° . Długość cięciwy (suma) do długości łuku: $2/\pi$, 0 i $2/(3\pi)$. Natężenia: $4/\pi^2 \approx 0,41$, 0 i $4/(9\pi^2) \approx 0,045$ (pierwsze maksimum boczne, w przybliżeniu).

Zadania · część 5

1. $\lambda = 4nd/(2m + 1) = 1596, 532, 319 \text{ nm}$: w zakresie widzialnym tylko 532 nm, barwa zielonkawa (z domieszkami, symulacja 4).
2. $\lambda/4n_c \approx 100 \text{ nm}$. Gołe szkło: $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = 4\%$ na każdej powierzchni; z powłoką ok. 1,4% (ideał $n_c = \sqrt{1,5} = 1,22$ dałby 0).
3. $\arctg 1,333 \approx 53,1^\circ$, $\arctg 1,5 \approx 56,3^\circ$.
4. W obu przypadkach jedno z dwóch odbić zachodzi od ośrodka gęstszego (skok fazy o pół okresu), a drugie od rzadszego (bez skoku). Przy grubości $\ll \lambda$ różnica dróg jest znikoma, więc fale różnią się fazą o pół okresu i się znoszą, dla każdej barwy.
5. $(700/400)^4 \approx 9,4$ razy. Słońce emituje mniej fioletu niż błękitu, część fioletu pochłania ozon, a oko jest mniej czułe na fiolet: suma daje błękit.

Zadania feynmanowskie

1. Fala biegnie wszystkimi drogami; w punkcie docelowym dodajemy fazory o fazach ωt_{drogi} .
2. Dla dróg oddległych od najszybszej czas zmienia się szybko z drogą, fazory obracają się i znoszą. Blisko drogi najszybszej czas jest stacjonarny (pochodna zero), fazory mają prawie te same fazy i się wzmacniają. Tylko wąski pęk dróg wokół stacjonarnej się liczy, a jego szerokość rośnie z λ : dla dużych λ obraz promieni się rozmywa (dyfrakcja). (FLP I-26-6)
2. 1. $dD/di = 0$ daje $dr/di = 1/3$, $\cos^2 i = (n^2 - 1)/8$: $i \approx 71,8^\circ$, a tęcza wtórna leży ok. 50° – 53° od punktu antysłonecznego, z fioletem na zewnątrz.
2. Między 42° a 51° nie trafia żaden promień po jednym ani po dwóch odbiciach: ten pas (pas Aleksandra) jest ciemniejszy.
3. 1. Przy 14 mm granica to ok. $5 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$; przy szczeliny 1 mm w kierunku poprzecznym ok. $5,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ (ponad 10 razy gorzej), a wzdłuż szczeliny dalej dobrze.
2. Rzeczywistą ostrość oka ogranicza gęstość receptorów i aberracje, rzędu kilku minut kątowych; dyfrakcja na otworze 1 mm (ok. 2') jest porównywalna, więc strata jest niewielka, a ochrona przed olśnieniem duża.
4. 1. Grubość szczeliny powietrznej w odległości r od środka: $d \approx r^2/2R$. Ciemne pierścienie: $2d = m\lambda$ (jedno odbicie ze skokiem fazy), czyli $r_m = \sqrt{m\lambda R}$: 0,77 mm, 1,09 mm, 1,33 mm...
2. W środku $d = 0$: fale różnią się fazą o pół okresu (skok przy odbiciu od szkła pod spodem) i się wygaszają, jak w czarnej bańce.
5. 1. Dwie wiązki symetryczne pod kątem $\pm 15^\circ$: okres $\Lambda = \lambda/(2 \sin 15^\circ) \approx 1,22 \mu\text{m}$.
2. Wiązka padająca prostopadle ugnie się pod kątem $\sin \theta = \lambda/\Lambda = 2 \sin 15^\circ$, $\theta \approx 31^\circ$. Wiązka padająca jak jedna z nich (pod -15°) ugnie się w pierwszym rzędzie do $\sin \theta = -\sin 15^\circ + \lambda/\Lambda = +\sin 15^\circ$, czyli dokładnie w kierunku drugiej wiązki: to zasada holografii.

6. 1. Kąt graniczny $24,4^\circ$ (szkło $41,8^\circ$): światło, które wpadło do diamentu, przy większości kątów odbija się wewnątrz całkowicie i wychodzi górą, w stronę patrzącego.
 2. Duża dyspersja rozszczepia białe światło na barwy („ogień”), a wielokrotne odbicia wzmacniają ten efekt. Szkło ma mniejszą dyspersję i więcej światła ucieka bokami i spodem.
7. 1. Optyczny: ok. 200 nm. Elektronowy z $\lambda = 3,7$ pm byłby teoretycznie 50 000 razy lepszy.
 2. Soczewki magnetyczne mają duże aberracje, więc używa się bardzo małych apertur (NA ok. 0,01–0,03), a rozdzielczość to ok. λ/NA : ułamki nanometra. Korekcja aberracji pozwoliła w ostatnich dekadach zejść poniżej 0,1 nm.
8. 1. Przy ziemi powietrze jest cieplejsze i ma mniejsze n : promienie biegnące nisko i prawie poziomo zakrzywiają się ku górze (najszybsza droga prowadzi przez rzadsze powietrze). Widzimy niebo tam, gdzie powinna być szosa: wygląda to jak odbicie w wodzie.
 2. $n_{30} - n_{50} \approx 2,9 \cdot 10^{-4} \cdot 273 \cdot (1/303 - 1/323) \approx 1,6 \cdot 10^{-5}$. Promień zawraca, gdy $\cos \alpha$ (kąt do poziomu) spełnia $n_{30} \cos \alpha = n_{50}$: $\alpha \approx \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-5}} \approx 0,0057$ rad, ok. $0,3^\circ$. Dlatego miraż widać tylko daleko, przy patrzeniu prawie poziomo. FLP I-26-4

Fizyka · Dział 12: Optyka: zasada najmniejszego czasu, interferencja, dyfrakcja · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 26–33. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.