

Fale: od struny do gromu dźwiękowego

Fala przenosi energię i informację, choć sam ośrodek tylko drga w miejscu. Ten dział wyprowadza równanie falowe dla dźwięku, wyjaśnia, dlaczego Newton pomylił się o 15% w prędkości dźwięku, skąd biorą się tony struny i piszczałki, czym są dudnienia, efekt Dopplera i stożek Macha, i dlaczego grzbiety fal na morzu wyprzedzają grupę, w której biegają.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, rozdz. 47–51

W TYM DZIALE

- 0 Prolog: błysk i grzmot
- 1 Równanie falowe
- 2 Prędkość, natężenie i głośność dźwięku
- 3 Odbicie, fale stojące i tony
- 4 Dudnienia, efekt Dopplera i fale uderzeniowe
- 5 Dyspersja: fale na wodzie i prędkość grupowa
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: błysk i grzmot

Liczenie sekund między błyskiem a grzmotem to najprostszy pomiar odległości burzy: dźwięk przebywa kilometr w ok. 3 s. Że dźwięk ma skończoną prędkość, wiedzano od starożytności; w XVII w. Mersenne i Gassendi mierzyli ją, strzelając z armat i licząc czas od błysku do huk. Dostali 450–480 m/s, o jedną trzecią za dużo (Gassendi wykazał przy tym, że prędkość nie zależy od wysokości tonu); dopiero Borelli i Viviani ok. 1660 r. zmierzili ok. 350 m/s.

W 1687 r. Newton po raz pierwszy obliczył tę prędkość z teorii, z gęstości i ciśnienia powietrza. Dostał ok. 300 m/s (979 stóp na sekundę), o ok. 15% za mało. Przez ponad sto lat próbowano tłumaczyć różnicę cząstkami pary, „grubością” cząsteczek powietrza i innymi poprawkami. Dopiero Laplace (1816) zauważył, że sprężanie powietrza w fali dźwiękowej jest tak szybkie, że ciepło nie zdąży odpłynąć: proces jest adiabatyczny, a nie izotermiczny (dział 9 „Termodynamika i entropia”). Poprawka $\sqrt{\kappa} = \sqrt{1,4} \approx 1,18$ dokładnie usunęła rozbieżność. FLP I-47-5

Feynman zaczyna od uwagi, że w fali nic nie płynie: cząsteczki powietrza drgają w miejscu, a dalej biegnie tylko „wzór” ruchu. To samo dotyczy fali na wodzie, fali na strunie i, jak zobaczymy w elektromagnetyzmie, światła. FLP I-47-1

Pytanie na start. Karetka z syreną 700 Hz jedzie w twoją stronę z prędkością 90 km/h, mija cię i oddala się. Czy ton rośnie stopniowo w miarę zbliżania się, czy jest stały i nagle spada? O ile? Odpowiedź w części 4 i w przykładzie 11.5.

Równanie falowe

Rozważmy powietrze w rurze. Niech $\chi(x, t)$ oznacza przesunięcie warstwy powietrza, która w spoczynku była w położeniu x . Warstwa o grubości dx zmienia grubość o $(\partial\chi/\partial x) dx$, więc gęstość zmienia się o $-\rho_0 \partial\chi/\partial x$, a ciśnienie o $\Delta p = -\rho_0 c^2 \partial\chi/\partial x$, gdzie $c^2 = dp/d\rho$. Różnica ciśnień po obu stronach warstwy przyspiesza ją: $\rho_0 \partial^2\chi/\partial t^2 = -\partial(\Delta p)/\partial x$. Razem: FLP I-47-3

PRAWO · RÓWNANIE FALOWE

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

To samo równanie opisuje strunę o naciągu F i masie na jednostkę długości μ (wtedy $c = \sqrt{F/\mu}$), pręt sprężysty ($c = \sqrt{E/\rho}$) i, w trzech wymiarach, fale elektromagnetyczne. Lekcja 4.7 Równania cząstkowe: fali, dyfuzji i Laplace'a rozwiązuje je metodą rozdzielania zmiennych.

Rozwiązanie ogólne podał d'Alembert (1747): $\chi = f(x - ct) + g(x + ct)$, gdzie f i g to dowolne funkcje. Kształt f przesuwa się bez zmiany w prawo z prędkością c , kształt g w lewo. Sprawdzenie: druga pochodna po t daje $c^2 f''$, a po x daje f'' . FLP I-47-4

Najważniejsze są fale sinusoidalne $\chi = A \cos(kx - \omega t)$: **liczba falowa** $k = 2\pi/\lambda$, częstość kołowa $\omega = 2\pi f$, prędkość fazowa $c = \omega/k = \lambda f$. Każdy inny kształt jest sumą sinusoid (szereg i transformata Fouriera, lekcja 4.2 Szeregi Fouriera), a ponieważ równanie jest liniowe, każdą składową można prowadzić osobno: **zasada superpozycji**.

⚠️ PUŁAPKA · PRĘDKOŚĆ FALI A PRĘDKOŚĆ OŚRODKA

Fala dźwiękowa biegnie z prędkością 343 m/s, a powietrze w niej drga z prędkością rzędu ułamka milimetra na sekundę przy głośnej rozmowie (a przy progu słyszalności rzędu 10^{-7} m/s). To dwie zupełnie różne prędkości: c zależy od ośrodka, prędkość drgań od amplitudy fali.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Fala dźwiękowa ma częstotliwość 440 Hz (dźwięk a^1). Jaka jest jej długość w powietrze (343 m/s) i w wodzie (1480 m/s)? Jaka liczba falowa?
- 2 Ludzkie ucho słyszy od ok. 20 Hz do 20 kHz. Jakie są odpowiadające im długości fal w powietrze?
- 3 Struna gitary ma masę 6,4 g na metr i jest naciągnięta siłą 73 N. Z jaką prędkością biegnie po niej fala?
- 4 Sprawdź, że $\chi = A \sin(kx) \cos(\omega t)$ spełnia równanie falowe, jeśli $\omega = ck$. Zapisz to rozwiązanie jako sumę dwóch fal biegnących.
- 5 Pokaż analizą wymiarową, że prędkość fali na strunie musi być proporcjonalna do $\sqrt{F/\mu}$ (lekcja 0.5 Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru).

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

2 Prędkość, natężenie i głośność dźwięku

Dla gazu doskonałego przy sprężaniu adiabatycznym $p\rho^{-\kappa} = \text{const}$ (dział 8 „Ciepło i teoria kinetyczna”), więc $dp/d\rho = \kappa p/\rho$: FLP I-47-5

WYNIK · PRĘDKOŚĆ DŹWIĘKU W GAZIE

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}.$$

Powietrze ($\kappa = 1,4$, $M = 29$ g/mol): 331 m/s w 0 °C, 343 m/s w 20 °C; w przybliżeniu $c \approx 331 + 0,6 t$ [°C] m/s. Prędkość nie zależy od ciśnienia (przy stałej temperaturze p/ρ jest stałe), rośnie jak $\sqrt{T}$ i maleje z masą cząsteczkową: w helu ok. 1000 m/s. Wzór Newtona $\sqrt{p/\rho}$ daje 280 m/s (w 0 °C).

W cieczech i ciałach stałych o prędkości decyduje sprężystość: $c = \sqrt{K/\rho}$ (moduł ściśliwości K). Woda ma $K = 2,2$ GPa, więc $c \approx 1480$ m/s: jest gęstsza od powietrza, ale znacznie trudniej ją ścisnąć. W stalowym pręcie fala podłużna biegnie z prędkością $\sqrt{E/\rho} \approx 5000$ m/s.

2.1 Natężenie i decybele

Fala niesie energię. Natężenie I to moc przechodząca przez jednostkę powierzchni (W/m²); dla fali sinusoidalnej $I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 A^2 = p_{\text{amp}}^2 / (2 \rho c)$. Źródło punktowe o mocy P rozsyła ją po sferze: $I = P / (4 \pi r^2)$. Ucho obejmuje natężenia od ok. 10^{-12} W/m² (próg słyszalności przy 1 kHz) do ok. 1 W/m² (próg bólu): dwanaście rzędów wielkości. Dlatego używa się skali logarytmicznej:

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \text{ dB}, \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2.$$

Rozmowa to ok. 60 dB, ruchliwa ulica 80 dB, koncert rockowy 110 dB. Podwojenie natężenia to +3 dB, dziesięciokrotne +10 dB, a podwojenie odległości od źródła punktowego -6 dB. Subiektywna głośność rośnie dużo wolniej niż natężenie: +10 dB odbieramy mniej więcej jako „dwa razy głośniejsze”.

SKĄD TO WIEMY?

Ucho jest niezwykle czułe. Przy progu słyszalności (1 kHz) amplituda ciśnienia to ok. $3 \cdot 10^{-5}$ Pa, trzy dziesięciomiliardowe ciśnienia atmosferycznego, a cząsteczki powietrza przesuwają się o ok. 10^{-11} m, mniej niż średnica atomu (zadanie feynmanowskie 6). Ucho pracuje niedaleko granicy wyznaczonej przez chaotyczne uderzenia cząsteczek powietrza w bębenek (ruchy Browna, dział 8 „Ciepło i teoria kinetyczna”); dużo większa czułość nie przydałaby się na wiele.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Oblicz prędkość dźwięku w powietrzu w $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ i w $35\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- 2 Ile decybeli dają dwa jednakowe głośniki grające po 70 dB? A dziesięć?

- 3 Głośnik wypromieniowuje równomiernie we wszystkie strony moc akustyczną 10 mW. Jaki poziom natężenia jest w odległości 10 m? A 20 m?

- 4 Dlaczego prędkość dźwięku w powietrzu nie zależy od ciśnienia? Czy na szczycie Mount Everestu dźwięk biegnie wolniej niż nad morzem?

- 5 Wyprowadź wzór Newtona $c = \sqrt{p/\rho}$ przy założeniu, że sprężanie jest izotermiczne, i porównaj z wynikiem Laplace'a dla $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

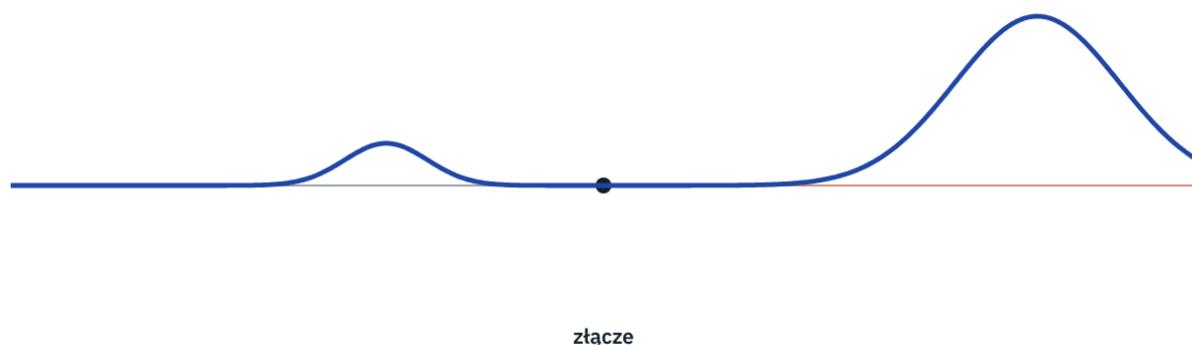
3 Odbicie, fale stojące i tony

Fala docierająca do końca struny lub do granicy dwóch ośrodków częściowo się odbija. Na zamocowanym końcu wychylenie musi być zerowe: odbity impuls wraca odwrócony, jakby z drugiej strony nadbiegał jego lustrzany i odwrócony obraz. Na swobodnym końcu odbity impuls ma ten sam znak. Na złączu dwóch strun część energii przechodzi dalej, a część wraca (symulacja 1).

FLP I-49-1

SYMULACJA 1

Impuls biegnie po strunie i dociera do jej końca: zamocowanego, swobodnego albo połączanego z drugą struną o innej prędkości fal (ten sam naciąg, inna masa na metr). Przesuwaj czas lub uruchom animację i porównaj kształt oraz znak odbitego i przepuszczonego impulsu.



— wychylenie struny — struna 1 (v_1) — struna 2 (v_2)

współczynnik odbicia R 0,332

współczynnik przejścia T 1,332

energia odbita 11,0%

energia przepuszczona 89,0%

Druą struna jest „lżejsza” (szybsza): przechodzi impuls dłuższy i wyższy, a odbity nie jest odwrócony. Energia się zgadza: $R^2 + T^2 \cdot (v_1/v_2) = 1,000$.

Stan na rysunku: złącze strun, $v_2/v_1 = 2,00$, $t = 2,20$; $R = 0,332$.

Na strunie zamocowanej na obu końcach fale odbijają się tam i z powrotem. Trwale utrzymują się tylko te, dla których fala po przebiegnięciu tam i z powrotem wraca w tej samej fazie: na długości struny mieści się całkowita liczba połówek fali. To **fale stojące** (mody), z **węzłami** (punktami spoczynku) i **strzałkami** (miejscami największego drgania).

FLP I-49-2

WYNIK · CZĘSTOTLIWOŚCI WŁASNE

struna i rura otwarta: $f_n = n \frac{c}{2L}$; rura zamknięta z jednej strony: $f_n = (2n - 1) \frac{c}{4L}$, n

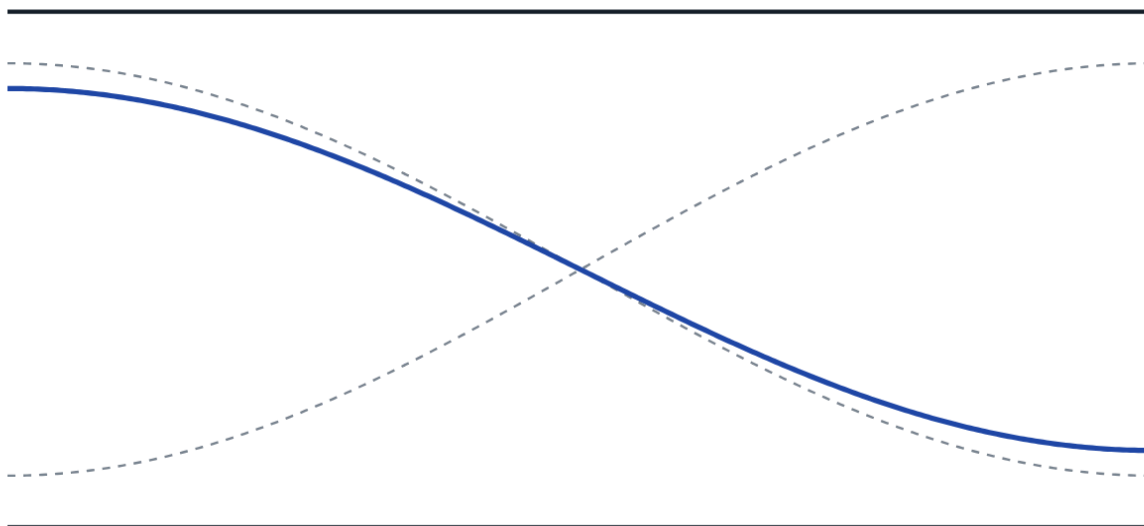
W rurze otwartej na końcach jest ciśnienie atmosferyczne (węzły ciśnienia, strzałki przemieszczenia), w zamkniętym końcu powietrze nie może się ruszać (węzeł przemieszczenia). Rura zamknięta ma tylko nieparzyste harmoniczne, a jej ton podstawowy jest o oktawę niższy niż rury otwartej tej samej długości.

Szarpnięta struna drga jednocześnie w wielu modach. Częstotliwości $f, 2f, 3f, \dots$ tworzą **szereg harmoniczny**, a dźwięk powtarza się z okresem $1/f$; słyszymy go jako ton o wysokości f . Proporcje amplitud harmoniczných decydują o barwie: skrzypce, flet i klarnet grające ten sam ton różnią się widmem. Klarnet, rura zamknięta z jednej strony, ma osłabione parzyste harmoniczne, stąd jego „pusty” dźwięk. Pitagorejczycy zauważyli, że współbrzmienia są przyjemne, gdy stosunki długości strun są małymi liczbami całkowitymi (2:1 oktawa, 3:2 kwinta); Feynman tłumaczy to tym, że wtedy wiele harmoniczných obu tonów się pokrywa.

FLP I-50-1, 50-3

SYMULACJA 2

Fale stojące na strunie, w rurze otwartej i w rurze zamkniętej z jednej strony. Dla rur rysujemy przemieszczenie powietrza. Zmieniaj długość, numer modu i prędkość fali; obok pięć najniższych częstotliwości własnych.



— wychylenie (chwilowe) - - - obwiednia: węzły i strzałki

harmoniczna 1.

długość fali λ 1,000 m

częstotliwość $f = v/\lambda$ 343,0 Hz

pięć najniższych tonów [Hz] 343, 686, 1029, 1372, 1715

Rura otwarta na obu końcach: na końcach ciśnienie jest atmosferyczne, a ruch powietrza największy (strzałki przemieszczenia). Częstotliwości jak dla struny: $n \cdot v/2L$.

Stan na rysunku: rura otwarta, $L = 0,50$ m, $v = 343$ m/s, mod 1; $f = 343,0$ Hz.

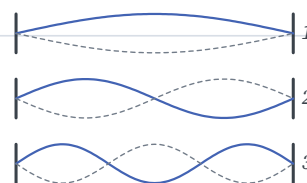
ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Rura o długości 0,5 m. Jakie są trzy najniższe częstotliwości, gdy jest otwarta na obu końcach, a jakie, gdy jest zamknięta z jednej strony?

- 2 Jak zmienia się częstotliwość struny, gdy czterokrotnie zwiększymy napięcie? Gdy skrócimy ją do $2/3$ (przyciskając palcem)?

- 3 Nalewając wodę do butelki, słyszymy coraz wyższy ton. Wyjaśnij. Jaka jest częstotliwość, gdy nad wodą zostało 20 cm, a jaka przy 10 cm?



4 Impuls przechodzi z cienkiej struny na grubą o czterokrotnie większej masie na metr (ten sam naciąg). Jakie są współczynniki odbicia i przejścia amplitudy? Jaka część energii przechodzi?

5 Dlaczego dwa tony o stosunku częstotliwości 3:2 brzmią zgodnie, a 16:15 (półton) zgrzytają? Wypisz harmoniczne tonów 200 Hz i 300 Hz do 1200 Hz.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

4 Dudnienia, efekt Dopplera i fale uderzeniowe

4.1 Dudnienia

Dwa tony o bliskich częstotliwościach f_1 i f_2 dają sumę $\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$: ton o średniej częstotliwości, którego głośność pulsuje $|f_1 - f_2|$ razy na sekundę (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory). Stroiciele fortepianów słuchają dudnień: przy 440 i 443 Hz słychać trzy „wa” na sekundę, a gdy struny są zgrane, dudnienia znikają. FLP I-48-1, 48-2

4.2 Efekt Dopplera

Źródło porusza się z prędkością u w stronę obserwatora. Kolejne czoła fal wysyła z miejsc coraz bliższych obserwatorowi, więc odległość między nimi jest mniejsza: $\lambda' = (c - u)/f_0$. Obserwator słyszy wyższy ton. Gdy to obserwator porusza się z prędkością w w stronę nieruchomego źródła, napotyka czoła częściej, ale długość fali się nie zmienia. Razem (prędkości dodatnie przy zbliżaniu):

WYNIK · EFEKT DOPPLERA DLA DŹWIĘKU

$$f = f_0 \frac{c + w}{c - u}.$$

c to prędkość dźwięku względem powietrza. Ruch źródła i ruch obserwatora dają inne wyniki, bo powietrze wyróżnia układ odniesienia; dla światła, które ośrodką nie potrzebuje, liczy się tylko prędkość względna (dział 7 „Układy odniesienia i szczególna teoria względności”, zadanie 4.4).

Gdy źródło jedzie ze stałą prędkością prosto na nas, ton jest stały i wysoki, a w chwili mijania spada do stałej niższej wartości. Jeśli przejeżdża obok w pewnej odległości, spadek jest płynny, bo liczy się składowa prędkości wzdłuż linii łączącej.

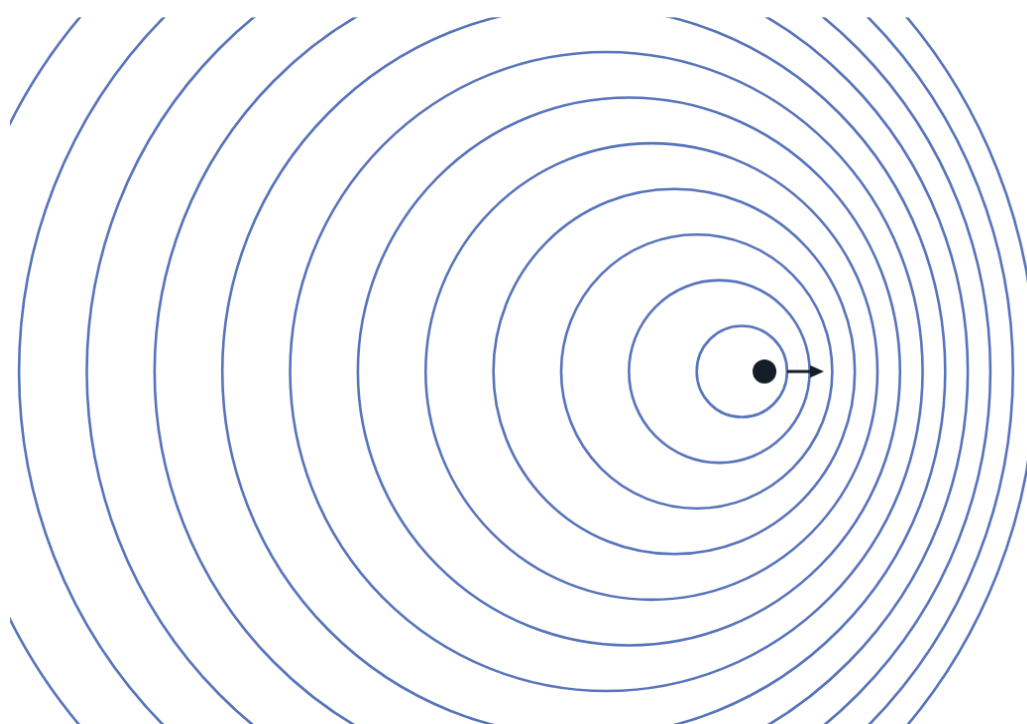
4.3 Stożek Macha i grom dźwiękowy

Gdy źródło porusza się szybciej niż dźwięk ($u > c$, liczba Macha $M = u/c > 1$), czoła fal nie nadążają: obwiednia kul wysłanych w kolejnych chwilach tworzy stożek o kącie

$$\sin \theta = \frac{c}{u} = \frac{1}{M}.$$

Na powierzchni stożka spiętrza się energia wielu fal: fala uderzeniowa, którą słyszymy jako grom dźwiękowy. Grom nie powstaje „w chwili przekraczania bariery”, tylko towarzyszy samolotowi przez cały czas lotu naddźwiękowego, przesuwając się po ziemi jak dywan. To samo zjawisko to fala dziobowa łodzi szybszej od fal na płytkiej wodzie i (w ośrodkach materialnych) promieniowanie Czerenkowa. (FLP I-51-1, 51-2)

SYMULACJA 3 Źródło wysyła regularnie fale i porusza się w prawo. Każde czoło fali to okrąg o środku w miejscu, gdzie źródło było w chwili emisji. Zmieniaj prędkość od zera do ponad dwóch prędkości dźwięku i obserwuj zagęszczanie czoł, barierę dźwięku i stożek Macha.



— czoła fal — źródło — stożek Macha

prędkość źródła 172 m/s

słyszane z przodu 1000 Hz

słyszane z tyłu 333 Hz

kąt stożka Macha —

Przed źródłem czoła fal są ściśnięte (wyższy ton), za nim rozciągnięte (niższy). Każde czoło jest okręgiem o środku tam, gdzie źródło było w chwili emisji.

Stan na rysunku: $u/c = 0,50$, $f_0 = 500$ Hz; z tyłu 333 Hz, z przodu 1000 Hz.

- 1 Kamerton 440 Hz i struna gitary dają 3 dudnienia na sekundę. Gdy lekko poluzujesz strunę, dudnienia przyspieszają. Jaka była częstotliwość struny?
- 2 Samolot leci z prędkością Macha 2. Jaki jest kąt połówkowy stożka Macha?
- 3 Jedziesz rowerem z prędkością 10 m/s w stronę nieruchomej syreny 700 Hz. Co słyszysz? A gdy to syrena jedzie z prędkością 10 m/s w twoją stronę?
- 4 Nietoperz leci z prędkością 5 m/s w stronę ściany i wysyła sygnał 50 kHz. Jaka częstotliwość echa odbiera?
- 5 Pokaż, że dla $u, w \ll c$ wzór Dopplera daje w pierwszym rzędzie $f \approx f_0(1 + v_{wz}/c)$, gdzie v_{wz} to prędkość zbliżania się. Porównaj z relatywistycznym wzorem dla światła z działu 7.

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

5 Dyspersja: fale na wodzie i prędkość grupowa

Dla dźwięku w powietrzu $\omega = ck$: wszystkie długości fal biegną z tą samą prędkością i impuls nie zmienia kształtu. Fale na wodzie są inne: ich prędkość zależy od długości. Na głębokiej wodzie (głębokość większa od ok. połowy długości fali) siłą przywracającą jest grawitacja i

$$\omega = \sqrt{gk}, \quad v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Dłuższe fale biegną szybciej; dlatego przed nadejściem sztormu na brzeg docierają najpierw długie, łagodne fale: martwa fala. Na płytkiej wodzie (głębokość h dużo mniejsza od długości fali) prędkość nie zależy od długości: $v = \sqrt{gh}$. Tsunami na oceanie o głębokości 4 km biegnie z prędkością ok. 200 m/s (ponad 700 km/h), ale ma długość setek kilometrów i na otwartym morzu prawie niewidoczną wysokość. (FLP I-51-4)

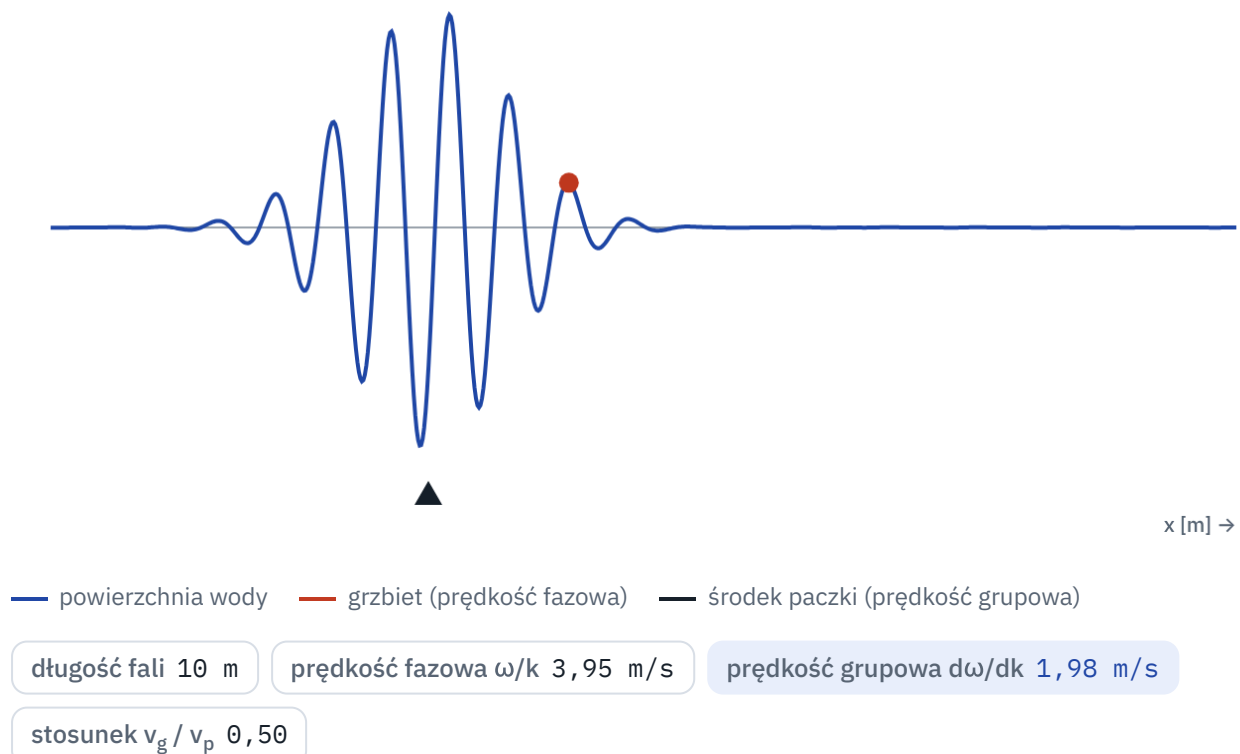
Gdy prędkość zależy od długości fali, ograniczona „paczka” fal (wiele składowych o bliskich k) przesuwa się z inną prędkością niż pojedyncze grzbiety. Prędkość obwiedni, z którą płynie energia, to **prędkość grupowa**: (FLP I-48-4)

WYNIK · PRĘDKOŚĆ FAZOWA I GRUPOWA

$$v_p = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Bez dyspersji $v_g = v_p$. Na głębokiej wodzie $v_g = \frac{1}{2} \sqrt{g/k} = \frac{1}{2} v_p$: grzbiety rodzą się z tyłu grupy, przebiegają przez nią i znikają z przodu. Można to zobaczyć, wrzucając kamień do stawu.

SYMULACJA 4 Paczka fal o długości fali 10 m: suma wielu sinusoid o bliskich długościach. Czerwona kropka śledzi grzbiet (prędkość fazowa), trójkąt środek paczki (prędkość grupowa). Porównaj ośrodek bez dyspersji z głęboką wodą.



Na głębokiej wodzie dłuższe fale biegają szybciej (dyspersja). Grzbiety (czerwona kropka) przechodzą przez paczkę dwa razy szybciej niż ona sama: rodzą się z tyłu paczki i znikają z przodu. Energia płynie z prędkością grupową.

Stan na rysunku: głęboka woda, $\lambda = 10$ m, $t = 12,0$ s; $v_p = 3,95$ m/s, $v_g = 1,98$ m/s.

 PUŁAPKA · FALE NIE NIOSĄ WODY

W fali na głębokiej wodzie cząstki wody poruszają się po okręgach, a po przejściu fali wracają prawie w to samo miejsce. Fala niesie energię i pęd, a nie wodę. Woda płynie do brzegu dopiero w strefie załamania fal, gdzie grzbiety się przewracają.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Fale na głębokiej wodzie mają okres 8 s. Oblicz długość fali, prędkość fazową i grupową.

- 2 Z jaką prędkością biegnie tsunami nad oceanem o głębokości 4000 m, a z jaką przy brzegu, gdzie jest 10 m wody? Co dzieje się z wysokością fali?

- 3 Pokaż, że na głębokiej wodzie $v_g = v_p/2$, różniczkując $\omega = \sqrt{gk}$.

- 4 Burza 1000 km od brzegu wytworzyła fale o okresach od 6 do 16 s. Po jakim czasie dotrą do brzegu fale o okresie 16 s, a po jakim 6 s?

- 5 Dla krótkich fal na wodzie (zmarszczek) siłą przywracającą jest napięcie powierzchniowe σ : $\omega^2 = \sigma k^3 / \rho$. Jaki jest stosunek v_g/v_p ? Dlaczego zmarszczki przed żabą płynącą po wodzie wyprzedzają ją?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA DLA ZADAŃ Z FAL

1. **Znajdź prędkość fali** z własności ośrodka: $\sqrt{F/\mu}$, $\sqrt{\kappa p/\rho}$, $\sqrt{K/\rho}$, $\sqrt{gh}$ lub z relacji dyspersji.
2. **Związki** $c = \lambda f$, $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$; częstotliwość ustala źródło, długość fali ośrodek.
3. **Warunki brzegowe** wyznaczają mody: węzły na zamocowaniach, strzałki przemieszczenia na otwartych końcach rur.
4. **Superpozycja**: dodawaj wychylenia (nie natężenia), gdy fale są spójne; natężenia, gdy są niezależne (szum, różne źródła).
5. **Ruch źródła i obserwatora**: wzór Dopplera względem ośrodka; dla $u > c$ stożek Macha.
6. **Sprawdzenie**: jednostki, rzędy wielkości (dźwięk 343 m/s, λ od cm do m), przypadki graniczne ($u \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$).

Przykład 11.1

Jak daleko jest burza

Grzmot słyhać 6 s po błysku. Jak daleko uderzył piorun, gdy powietrze ma 20 °C, a jak bardzo zmieniłby się wynik przy -10 °C?

- 1 Światło dociera praktycznie natychmiast (ok. 7 μ s na 2 km).
- 2 20 °C: $c = 343$ m/s, odległość $343 \cdot 6 \approx 2,06$ km.
- 3 -10 °C: $c \approx 325$ m/s, odległość ok. 1,95 km.

Wynik: ok. 2 km; reguła „3 sekundy na kilometr” jest dokładna do kilku procent.

Sprawdzenie: grzmot trwa długo, bo dźwięk z różnych części kilkukilometrowego kanału pioruna dociera w różnych chwilach; liczy się początek grzmotu ✓.

Przykład 11.2

Naciąg struny gitary

Najgrubsza struna gitary (E, 82,41 Hz) ma długość drgającą 64,8 cm i masę 6,4 g na metr. Jaki musi mieć naciąg? Jaka jest częstotliwość trzeciej harmonicznej?

- 1 Ton podstawowy: $\lambda = 2L = 1,296$ m, więc $c = \lambda f \approx 106,8$ m/s.
- 2 $F = \mu c^2 = 0,0064 \cdot 106,8^2 \approx 73$ N (jak ciężar 7,4 kg).
- 3 Trzecia harmoniczna: $3 \cdot 82,41 \approx 247$ Hz, prawie dokładnie dźwięk h (246,9 Hz), kwinta nad oktawą.

Wynik: ok. 73 N. Sześć strun gitary ciągnie gryf łączną siłą ok. 400–700 N.

Sprawdzenie: producenci strun podają dla grubej struny E naciągi rzędu 70–80 N ✓.

Przykład 11.3

Piszczałka organowa i flet

Piszczałka organowa ma długość 0,5 m. Jaki wydaje ton, gdy jest otwarta, a jaki, gdy zamknięta z jednej strony (piszczałka kryta)? Jak długi musi być flet (rura otwarta) na ton c^2 (523 Hz)?

- 1 Otwarta: $c/2L = 343$ Hz (ok. f^1).
- 2 Kryta: $c/4L = 171,5$ Hz: o oktawę niżej, tylko z nieparzystymi harmonicznymi.
- 3 Flet: $L = c/2f \approx 33$ cm.

Wynik: 343 Hz i 171,5 Hz; flet ok. 33 cm. Organmistrzowie używają piszczałek krytych, gdy brakuje miejsca na długie piszczałki basowe.

Sprawdzenie: rzeczywista piszczałka brzmi nieco niżej, bo fala „wystaje” za otwarty koniec o ok. 0,6 promienia rury (poprawka wylotowa) ✓.

Przykład 11.4

Hałas i decybele

Przy ruchliwej ulicy w odległości 10 m od jezdni poziom natężenia to 80 dB. Jaki jest 40 m od jezdni, jeśli ulicę traktujemy jako źródło liniowe (natężenie maleje jak $1/r$), a jaki, gdyby to było źródło punktowe?

- 1 Źródło liniowe: energia rozchodzi się po walcu, $I \propto 1/r$. Czterokrotnie dalej: $10 \log_{10} 4 \approx 6$ dB mniej, 74 dB.
- 2 Źródło punktowe: $I \propto 1/r^2$: 12 dB mniej, 68 dB.

Wynik: 74 dB dla ulicy, 68 dB dla pojedynczego źródła. Hałas uliczny maleje z odległością wolniej, niż podpowiada intuicja.

Sprawdzenie: w rzeczywistości dochodzą odbicia od budynków i pochłanianie przez grunt; ekrany akustyczne tłumią głównie wyższe częstotliwości (λ rzędu dziesiątek centymetrów), które słabo uginają się za przeszkodą wysoką na kilka metrów; niskie tony o długości fali kilku metrów obchodzą ekran ✓.

Przykład 11.5

Syrena karetki

Karetka z syreną 700 Hz jedzie z prędkością 90 km/h (25 m/s) prosto na ciebie, a potem się oddala. Co słyszysz?

- 1 Zbliżanie: $f = 700 \cdot 343 / (343 - 25) \approx 755$ Hz, stała wysokość.
- 2 Oddalanie: $f = 700 \cdot 343 / (343 + 25) \approx 652$ Hz.
- 3 Stosunek $755/652 \approx 1,16$: ok. 2,5 półtonu (półton to $2^{1/12} \approx 1,059$).

Wynik: ton jest stały (755 Hz), w chwili mijania spada o ok. dwa i pół półtonu do 652 Hz. Stopniowe obniżanie się tonu słyszymy tylko wtedy, gdy karetka przejeżdża obok nas w pewnej odległości.

Sprawdzenie: dla $u \ll c$ przesunięcie to ok. $\pm u/c = \pm 7\%$: $700 \cdot 1,073 \approx 751$, $700 \cdot 0,927 \approx 649$; zgodnie w pierwszym rzędzie ✓.

Przykład 11.6

Kilwater statku

Statek płynie po głębokiej wodzie. Fale, które wytwarza, są stacjonarne względem statku. Pokaż, że kilwater mieści się w klinie o kącie połówkowym ok. $19,5^\circ$, niezależnie od prędkości statku.

- 1 Fala, której kierunek rozchodzenia się (prostopadły do grzbietów) tworzy kąt ϕ z kierunkiem ruchu, jest stacjonarna względem statku, gdy $v_p = u \cos \phi$.
- 2 Energia każdej takiej fali biegnie z prędkością grupową $v_g = v_p/2$. Po czasie t fala wysłana z punktu, w którym był statek, jest w odległości $v_g t$ od tego punktu (wzdłuż kierunku ϕ), a statek odpłynął o ut .
- 3 Punkty te leżą na okręgu o średnicy $\frac{1}{2}ut$ (dla wszystkich kątów ϕ), styczne poprowadzone z obecnego położenia statku tworzą kąt $\sin \theta = \frac{ut/4}{3ut/4} = \frac{1}{3}$.

Wynik: $\theta = \arcsin \frac{1}{3} \approx 19,5^\circ$ (kąt Kelvina). Kaczka i tankowiec zostawiają kilwater tej samej szerokości katowej.

Sprawdzenie: zdjęcia lotnicze kilwaterów dają kąty bliskie 39° pełnego klina; bardzo szybkie łodzie mają węższe kilwatery, bo dla nich ważne stają się efekty skończonej długości kadłuba ✓.

7

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

✗ „W gęstszym ośrodku dźwięk biegnie wolniej.”

Decyduje stosunek sprężystości do gęstości. Woda jest 800 razy gęstsza od powietrza, a dźwięk biegnie w niej ponad 4 razy szybciej, bo jest dużo trudniej ściśliwa.

✗ „Głośniejszy dźwięk biegnie szybciej.”

Prędkość nie zależy od amplitudy (dopóki fala jest słaba). Wyjątkiem są fale uderzeniowe o bardzo dużych amplitudach.

✗ „Fala przenosi materię.”

Przenosi energię i pęd; cząstki ośrodka drgają wokół swoich położań.

× „Gdy karetka się zbliża, ton stale rośnie.”

Przy stałej prędkości ton zbliżającej się karetki jest stały; zmienia się tylko głośność. Spadek następuje przy mijaniu.

× „Grom dźwiękowy słysząc, gdy samolot przekracza barierę dźwięku.”

Stożek Macha towarzyszy samolotowi przez cały lot naddźwiękowy; każdy, nad kim przelatuje, słyszy swój grom.

× „Wysokość dźwięku zależy od głośności.”

Wysokość to częstotliwość podstawowa; głośność to natężenie. Ucho nieco miesza te wrażenia, ale fizycznie są niezależne.

× „Dźwięk w zimnym powietrzu biegnie szybciej, bo jest gęstsze.”

Odwrotnie: $c \propto \sqrt{T}$, w mrozie dźwięk jest wolniejszy. Dlatego w nocy, gdy przy ziemi jest chłodniej, dźwięk zakrzywia się w dół i słysząc go dalej.

8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

1 **Zza rogu.** Słyszysz rozmowę zza rogu budynku, ale nie widzisz rozmówców. Porównaj długości fal dźwięku mowy (ok. 100 Hz–4 kHz) i światła (ok. 500 nm) z rozmiarami przeszkód i wyjaśnij różnicę.

2 **Grom z wysokości 10 km.** Samolot leci z prędkością Macha 2 na wysokości 10 km (pomiń zmiany temperatury z wysokością). Gdzie jest samolot, gdy obserwator na ziemi słyszy grom? Ile sekund po przelocie nad jego głową?

3 **Strojenie dudnieniami.** Stroiciel porównuje kwintę a^1 – e^2 (440 Hz i 659,3 Hz w stroju równomiernie temperowanym). Trzecia harmoniczna a^1 i druga harmoniczna e^2 powinny dać czystą kwintę. Ile dudnień na sekundę słyszy?

- 4 **Echolokacja.** Nietoperz używa sygnałów 50 kHz. Jaka jest długość fali? Dlaczego ultradźwięki pozwalają mu „widzieć” owady, a niskie tony by nie pozwoliły?
- 5 **Kilwater kaczki.** Dlaczego za płynącą kaczką fale tworzą klin, a za płynącym bardzo powoli patykiem prawie ich nie widać? Co by się stało na płytkiej wodzie, gdzie $v = \sqrt{gh}$ nie zależy od długości fali?
- 6 **Próg słyszalności.** Natężenie przy progu słyszalności to 10^{-12} W/m^2 (1 kHz). Oblicz amplitudę zmian ciśnienia i amplitudę przesunięcia cząsteczek powietrza. Porównaj z rozmiarem atomu.
- 7 **Ucho przy szynie.** Dlaczego dawniej przykładano ucho do szyny, żeby usłyszeć nadjeżdżający pociąg? Porównaj czas biegu dźwięku na odległość 1 km w stali (ok. 5000 m/s) i w powietrzu. Jaką jeszcze zaletę ma szyna?
- 8 **Martwa fala.** Na plażę przychodzą wysokie, długie fale o okresie 14 s, choć jest bezwietrznie. Skąd się wzięły i jak daleko mogła być burza, jeśli dwa dni wcześniej było spokojnie?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Jakie jest ogólne rozwiązanie jednowymiarowego równania falowego?**
 $f(x - ct) + g(x + ct)$: dwa dowolne kształty biegnące w przeciwne strony.
- 2 **Dlaczego Newton dostał za małą prędkość dźwięku?**
Przyjął sprężanie izotermiczne; jest adiabatyczne, co daje czynnik $\sqrt{\kappa}$.
- 3 **O ile decybeli zmienia się poziom, gdy natężenie rośnie 100 razy?**
O 20 dB.

4 Jakie harmoniczne ma rura zamknięta z jednej strony?

Tylko nieparzyste: $f, 3f, 5f, \dots$, z $f = c/4L$.

5 Co sływać, gdy dwa tony mają częstotliwości 300 i 304 Hz?

Ton ok. 302 Hz, którego głośność pulsuje 4 razy na sekundę.

6 Czym różni się ruch źródła od ruchu obserwatora w efekcie Dopplera dla dźwięku?

Ruch źródła zmienia długość fali w powietrzu, ruch obserwatora tylko częstość napotykania czoł; wzory są różne, bo powietrze wyróżnia układ odniesienia.

7 Od czego zależy kąt stożka Macha?

Od liczby Macha: $\sin \theta = 1/M$.

8 Jak się mają prędkość grupowa i fazowa fal na głębokiej wodzie?

$v_g = v_p/2$; energia płynie z prędkością grupową.

FALE I DŹWIĘK

$$\partial_t^2 \chi = c^2 \partial_x^2 \chi; \chi = f(x - ct) + g(x + ct)$$

$$c = \lambda f = \omega/k; \text{ struna } \sqrt{F/\mu}, \text{ gaz } \sqrt{\kappa p/\rho}, \\ \text{ciecz } \sqrt{K/\rho}$$

$$\text{powietrze: } c \approx 331 + 0,6 t \text{ m/s}$$

$$I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 A^2; L = 10 \log_{10}(I/10^{-12}) \text{ dB}$$

$$\text{mody: } nc/2L \text{ (struna, rura otwarta), } (2n - 1)c/4L \text{ (rura zamknięta)}$$

RUCH, DYSERSJA

$$\text{dudnienia: } |f_1 - f_2| \text{ na sekundę}$$

$$\text{Doppler: } f = f_0(c + w)/(c - u)$$

$$\text{stożek Macha: } \sin \theta = c/u$$

$$v_p = \omega/k, v_g = d\omega/dk$$

$$\text{woda głęboka } \omega = \sqrt{gk}, v_g = v_p/2; \text{ płytki}$$

$$v = \sqrt{gh}; \text{ kąt Kelvina } 19,5^\circ$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 47 (dźwięk i równanie falowe), 49 (mody).
- **Dla chętnych:** rozdz. 48 (dudnienia, paczki fal), 50 (harmoniczne i Fourier), 51 (fale uderzeniowe, fale na wodzie).

Następny dział: **Optyka: zasada najmniejszego czasu, interferencja, dyfrakcja.** Światło też jest falą, tylko o długości pół mikrometra. Najpierw zobaczymy, jak zasada Fermata wyjaśnia odbicie, załamanie i soczewki, a potem jak dodawanie fazorów fal z wielu źródeł daje interferencję, siatki dyfrakcyjne i granicę rozdzielczości mikroskopu.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Powietrze: $\lambda = 0,78$ m, $k = 8,06$ rad/m. Woda: $\lambda = 3,36$ m. Częstotliwość się nie zmienia przy przejściu do innego ośrodka, zmienia się długość fali.
2. 17 m i 1,7 cm. Rozpiętość tysiąc razy: od rozmiarów budynku do szerokości palca.
3. $c = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{73/0,0064} \approx 107$ m/s.
4. $\partial_t^2 \chi = -\omega^2 \chi$, $\partial_x^2 \chi = -k^2 \chi$; równość dla $\omega^2 = c^2 k^2$. $\sin kx \cos \omega t = \frac{1}{2}[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]$: dwie fale o równych amplitudach biegnące w przeciwnie strony (fala stojąca, część 3).
5. $[F] = \text{kg m s}^{-2}$, $[\mu] = \text{kg m}^{-1}$. F/μ ma wymiar $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$, więc jedyną kombinacją o wymiarze prędkości jest $\sqrt{F/\mu}$ (z dokładnością do stałej, która okazuje się równa 1).

Zadania • część 2

1. $\sqrt{\kappa RT/M}$: 319 m/s i 352 m/s.
2. Natężenia się dodają (dla dźwięków nieskorelowanych): 73 dB i 80 dB.
3. $I = P/(4\pi r^2) \approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$, czyli 69 dB; w 20 m: 63 dB.
4. $c^2 = \kappa p/\rho = \kappa RT/M$: ciśnienie i gęstość zmieniają się proporcjonalnie. Na Evereście dźwięk jest wolniejszy, ale tylko dlatego, że jest zimniej (ok. 250 K: ok. 317 m/s).
5. Izotermicznie p/ρ stałe, więc $dp/d\rho = p/\rho$: $c = \sqrt{RT/M} \approx 280$ m/s. Adiabaticznie: $\sqrt{1,4}$ razy więcej, 331 m/s, zgodnie z pomiarem.

Zadania • część 3

1. Otwarta: 343, 686, 1029 Hz. Zamknięta: 171,5, 514,5, 857,5 Hz.
2. $f \propto \sqrt{F}/L$: dwa razy wyższa (oktawa); 3/2 raza wyższa (kwinta).
3. Słup powietrza nad wodą to rura zamknięta z jednej strony; jej ton $c/4L$ rośnie, gdy L maleje. 20 cm: ok. 430 Hz; 10 cm: ok. 860 Hz (w rzeczywistości trochę niżej, bo potrzebna jest poprawka wylotowa, a butelka z wąską szyjką działa częściowo jak rezonator Helmholtza).
4. $v_2/v_1 = 1/2$. $R = (v_2 - v_1)/(v_2 + v_1) = -1/3$, $T = 2v_2/(v_1 + v_2) = 2/3$. Energia odbita $R^2 = 1/9$, przepuszczona $T^2 v_1/v_2 = 8/9$.
5. 200: 200, 400, 600, 800, 1000, 1200. 300: 300, 600, 900, 1200. Co druga harmoniczna wyższego tonu pokrywa się z harmoniczną niższego. Przy półtonie bliskie, ale różne harmoniczne dają szybkie dudnienia (część 4), które słyszymy jako szorstkość. FLP I-50-3

Zadania • część 4

1. 437 lub 443 Hz. Poluzowanie obniża ton i dudnienia przyspieszają, więc różnica rośnie: struna miała 437 Hz.
2. $\sin \theta = 1/2$, $\theta = 30^\circ$.

3. Ruchomy obserwator: $700 \cdot 353/343 \approx 720,4$ Hz. Ruchome źródło: $700 \cdot 343/333 \approx 721,0$ Hz. Prawie to samo, bo $u \ll c$; różnica rośnie przy większych prędkościach.
4. Ściana odbiera (źródło ruchome) $f_1 = 50 \cdot 343/338$ kHz i odbija ją jak nieruchome źródło do ruchomego obserwatora: $f_2 = f_1 \cdot 348/343 = 50 \cdot 348/338 \approx 51,48$ kHz. Przesunięcie ok. $2u/c$, czyli 3%.
5. $\frac{c+w}{c-u} \approx (1+w/c)(1+u/c) \approx 1+(u+w)/c$. Dla światła $f = f_0 \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)} \approx f_0(1+\beta)$: w pierwszym rzędzie to samo, a różnice (rzędu β^2) pochodzą z dylatacji czasu.

Zadania • część 5

1. $\omega = 2\pi/T$, $k = \omega^2/g$: $\lambda = gT^2/2\pi \approx 100$ m, $v_p = \lambda/T \approx 12,5$ m/s, $v_g \approx 6,2$ m/s.
2. 198 m/s i 9,9 m/s. Fala zwalnia, tył dogania przód i energia skupia się na krótszym odcinku: wysokość rośnie z kilkudziesięciu centymetrów do metrów.
3. $d\omega/dk = \frac{1}{2}\sqrt{g/k} = \frac{1}{2}\omega/k$.
4. Energia biegnie z $v_g = gT/4\pi$: dla 16 s ok. 12,5 m/s, dla 6 s ok. 4,7 m/s. Czasy: ok. 22 h i ok. 59 h. Najpierw przychodzi długa martwa fala, a krótsze fale ponad półtorej doby później.
5. $\omega \propto k^{3/2}$, $v_g = \frac{3}{2}v_p$. Krótkie zmarszczki są szybkie i ich energia biegnie jeszcze szybciej niż grzbiety, więc wyprzedzają poruszające się ciało, podczas gdy dłuższe fale grawitacyjne zostają za nim.

Zadania feynmanowskie

1. Dźwięk mowy ma λ od 9 cm do 3,4 m, porównywalne z drzwiami i narożnikami; fale uginają się wokół przeszkód o takich rozmiarach (dyfrakcja).
2. Światło ma λ milion razy mniejsze: przeszkody wielkości metra rzucają ostry cień. Wysokie tony słychać zza rogu słabiej niż niskie, bo słabiej się uginają.
1. Stożek o kącie 30° dociera do obserwatora, gdy samolot jest w odległości poziomej $h/\tan 30^\circ \approx 17,3$ km za nim.
2. Przy $u = 2 \cdot 343$ m/s to ok. 25 s po przelocie nad głową. Samolotu nie słychać, dopóki nie przejdzie stożek.
1. $3 \cdot 440 = 1320$ Hz i $2 \cdot 659,26 = 1318,5$ Hz: dudnienia ok. 1,5 na sekundę.
2. W stroju równomiernie temperowanym kwinta jest celowo nieco „za wąska” ($2^{7/12} = 1,4983$ zamiast 1,5); stroiciele liczą te dudnienia, żeby trafić w strój. (FLP I-50-3)
1. $\lambda = 343/50\,000 \approx 6,9$ mm.
2. Przedmiot mniejszy od długości fali słabo ją odbija (rozpraszanie maleje jak $(a/\lambda)^4$ dla małych przedmiotów). Komar ma kilka milimetrów: przy 50 kHz jest widoczny, przy 1 kHz ($\lambda = 34$ cm) praktycznie niewidzialny.
1. Kaczka wytwarza fale stacjonarne względem siebie o $v_p \leq u$; na głębokiej wodzie zawsze istnieją takie długości fal, a dyspersja daje klin Kelvina (przykład 11.6). Fale na wodzie mają najmniejszą prędkość fazową ok. 23 cm/s (przy $\lambda \approx 1,7$ cm, gdzie grawitacja i napięcie powierzchniowe są porównywalne). Patyk wolniejszy od tej wartości nie ma żadnej fali stacjonarnej względem siebie, więc nie zostawia kilwateru.
2. Na płytkiej wodzie bez dyspersji fale stacjonarne istnieją tylko dla $u > \sqrt{gh}$ i tworzą stożek Macha o kącie $\sin \theta = \sqrt{gh}/u$, jak w akustyce.
1. $p_{\text{amp}} = \sqrt{2\rho c I} \approx 2,9 \cdot 10^{-5}$ Pa.
2. $A = \sqrt{2I/(\rho c \omega^2)} \approx 1,1 \cdot 10^{-11}$ m, 10–30 razy mniej niż średnica atomu. Przy progu bólu (1 W/m^2): $A \approx 11 \mu\text{m}$, $p_{\text{amp}} \approx 29$ Pa.

7. 1. 0,2 s w stali i 2,9 s w powietrzu.
2. Ważniejsze jest to, że szyna prowadzi falę jak falowód: energia nie rozchodzi się po sferze, tylko biegnie wzdłuż szyny i słabnie dużo wolniej niż $1/r^2$.
8. 1. To martwa fala z odległego sztormu. Fale o długim okresie mają dużą prędkość grupową: $v_g = gT/4\pi \approx 10,9 \text{ m/s}$ dla 14 s.
2. W ciągu dwóch dni energia przebiegła ok. 1900 km, więc burza była najwyżej ok. 1900 km stąd. Krótsze fale z tego samego sztormu nadejdą później, a okres przychodzących fal będzie stopniowo malał: z tego tempa można oszacować odległość burzy.

Fizyka · Dział 11: Fale i dźwięk · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 47–51. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.