

Płyny: od ciśnienia do siły nośnej

Co utrzymuje w powietrzu latawiec, a w wodzie stalowy statek? Dlaczego w przewężeniu rury ciśnienie spada, mgła opada tak wolno, a piłka golfowa ma dołki? Ten dział zaczyna od płynu w spoczynku, przechodzi przez przepływ idealny i równanie Bernoulliego do lepkości, liczby Reynoldsa i oporu, a kończy na sile nośnej skrzydła i równowadze latawca. Na tym fundamencie stoi dynamika lotu w automatyce.

CZAS

ok. 4 h teorii + ok.
5 h zadań

ZADANIA

25 zadań w treści
+ 8
feynmanowskich,
z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
II, rozdz. 40–41;
aerodynamika
skrzydła:
materiały
uzupełniające

W TYM DZIALE

- 0 Prolog: co trzyma latawiec?
- 1 Płyn w spoczynku: ciśnienie i wypór
- 2 Przepływ idealny: ciągłość i Bernoulli
- 3 Lepkość
- 4 Liczba Reynoldsa, warstwa przyścienna i opór
- 5 Siła nośna: cyrkulacja, skrzydło i latawiec
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania feynmanowskie
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: co trzyma latawiec?

Latawiec o powierzchni $0,8 \text{ m}^2$ i masie 250 g wisi w wietrze wiejącym z prędkością 6 m/s (umiarkowany wiatr, 4 w skali Beauforta). Ciężar latawca to $2,5 \text{ N}$. Powietrze ma gęstość prawie tysiąc razy mniejszą od wody, a mimo to linka ciągnie dłoń z siłą prawie 9 N , a latawiec stoi wysoko nad głową.

Skala sił wynika z jednej wielkości: **ciśnienia dynamicznego** $q = \frac{1}{2}\rho v^2$. Przy 6 m/s to $\frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 36 \approx 22 \text{ Pa}$, a pomnożone przez powierzchnię daje ok. 18 N , siedem razy więcej niż ciężar. Wszystkie siły aerodynamiczne zapisuje się jako q razy powierzchnia razy współczynnik zależny od kształtu i ustawienia. Ten dział tłumaczy, skąd biorą się te współczynniki, a przykład 10.6 i symulacja 4 ustawią latawiec w równowadze.

Feynman poświęca płynom dwa rozdziały tomu II: „przepływ suchej wody” (ciecz bez lepkości, idealna dla matematyków) i „przepływ mokrej wody” (prawdziwa ciecz z lepkością). Pokazuje, że teoria suchej wody przewiduje zerowy opór i zerową siłę nośną dla wielu kształtów, co jest jawnie fałszywe, i że kluczem jest cienka warstwa płynu przy powierzchni ciała. FLP II-40-4, 41-4

Pytanie na start. Dlaczego nie da się wypić napoju słomką o długości 11 m , nawet z najlepszą pompą?
Odpowiedź w części 1 i w zadaniu feynmanowskim 2.

Płyn w spoczynku: ciśnienie i wypór

Płyn (ciecz lub gaz) w spoczynku nie przenosi sił stycznych: gdyby je przenosił, zacząłby płynąć. Na każdy kawałek powierzchni działa więc tylko siła prostopadła, proporcjonalna do pola. Stosunek siły do pola to **ciśnienie** p , wielkość skalarna: w danym punkcie jest takie samo we wszystkich kierunkach. FLP II-40-1

Weźmy poziomą warstwę cieczy o grubości dh i polu A . Ciśnienie od dołu musi podtrzymać jej ciężar: $A dp = \rho g A dh$. Dla cieczy o stałej gęstości:

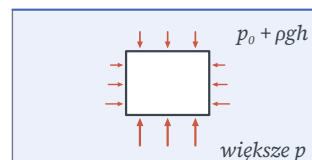
PRAWO · CIŚNIENIE HYDROSTATYCZNE I WYPÓR

$$p = p_0 + \rho gh, \quad F_{\text{wyporu}} = \rho_{\text{płynu}} V_{\text{zanurzone}} g.$$

h to głębokość pod powierzchnią, na której panuje ciśnienie p_0 . Ciśnienie zależy tylko od głębokości, nie od kształtu naczynia. Zmiana ciśnienia w jednym miejscu przenosi się na całą ciecz (prawo Pascala). Wypór (prawo Archimedesesa) wynika z różnicy ciśnień: na dolną powierzchnię ciała ciecz naciska mocniej niż na górną, a wypadkowa równa się ciężarowi wypartej cieczy.

Liczby warte zapamiętania: $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$ to ciśnienie słupa wody o wysokości $10,3 \text{ m}$ albo słupa rtęci 760 mm . Na każde 10 m głębokości w wodzie przybywa ok. 1 atm ; na dnie Rowu

Mariańskiego (11 km) panuje ok. 1100 atm. W gazach ciśnienie maleje z wysokością wykładniczo, bo gęstość zależy od ciśnienia (dział 8 „Ciepło i teoria kinetyczna”).



Ciało pływa, gdy jego średnia gęstość jest mniejsza od gęstości cieczy; zanurza się wtedy w takiej części, żeby wyparta ciecz ważyła tyle co ono. Stalowy statek pływa, bo jego kadłub otacza ogromną objętość powietrza: średnia gęstość kadłuba z zawartością jest mniejsza od gęstości wody.

⚠️ PUŁAPKA · PARADOKS HYDROSTATYCZNY

Trzy naczynia o tym samym polu dna i tej samej wysokości wody, ale różnych kształtach (walec, lejek rozszerzający się ku górze, butelka zwężająca się), mają na dnie to samo ciśnienie i tę samą siłę nacisku na dno, choć zawierają różne ilości wody. Różnicę w ciężarze przenoszą ścianki boczne: w lejku woda naciska na nie także w dół, w butelce ścianki naciskają na wodę w dół.

🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Jakie ciśnienie (bezwzględne i nadciśnienie) panuje na głębokości 30 m w wodzie słodkiej? Z jaką siłą woda naciska na tamę o szerokości 100 m i wysokości wody 30 m?
- 2 Jaka część objętości góry lodowej ($\rho = 917 \text{ kg/m}^3$) wystaje nad wodę morską (1025 kg/m^3)?
- 3 Podnośnik hydrauliczny ma tłoki o polach 2 cm^2 i 200 cm^2 . Jaką siłę trzeba przyłożyć do małego tłoka, by unieść samochód o masie 1200 kg? O ile musi przesunąć się mały tłok, by samochód podniósł się o 10 cm?
- 4 Kostka drewna o krawędzi 10 cm i gęstości 600 kg/m^3 pływa w wodzie. Jak głęboko jest zanurzona? Jaką siłą trzeba ją wcisnąć, by zanurzyła się całkowicie?
- 5 Dlaczego słomką nie da się wypić napoju z wysokości większej niż ok. 10 m? Co by się zmieniło na Evereście?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

Przepływ idealny: ciągłość i Bernoulli

Ruch płynu opisujemy polem prędkości $\vec{v}(\vec{r}, t)$: w każdym punkcie podajemy prędkość płynu, który akurat tam jest. Linie styczne do tego pola to **linie prądu**; w przepływie ustalonym (niezależnym od czasu) cząstki płynu poruszają się wzdłuż nich. FLP II-40-2, 40-3

2.1 Równanie ciągłości

Masa się nie tworzy ani nie znika, więc to, co wypływa z małej objętości, ubywa z jej wnętrza: $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$ (dywergencja, lekcja 3.5 Strumień, dywergencja i rotacja). Ciecze, a także gazy przy prędkościach znacznie mniejszych od prędkości dźwięku (do ok. 0,3 Macha gęstość zmienia się o kilka procent), są praktycznie nieściśliwe: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. W rurze lub strudze o przekroju A oznacza to, że strumień objętości $Q = Av$ jest wszędzie taki sam: tam, gdzie rura się zwęża, płyn płynie szybciej.

2.2 Równanie Eulera i twierdzenie Bernoulliego

Druga zasada dynamiki dla kawałka płynu bez lepkości: przyspieszenie (pochodna substancjalna, lekcja 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych) razy gęstość równa się sile na jednostkę objętości od gradientu ciśnienia i grawitacji:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g}.$$

Dla przepływu ustalonego wzdłuż linii prądu z tego równania (albo prościej, z bilansu energii dla odcinka strugi: praca sił ciśnienia na końcach równa się zmianie energii kinetycznej i potencjalnej) wynika: FLP II-40-3

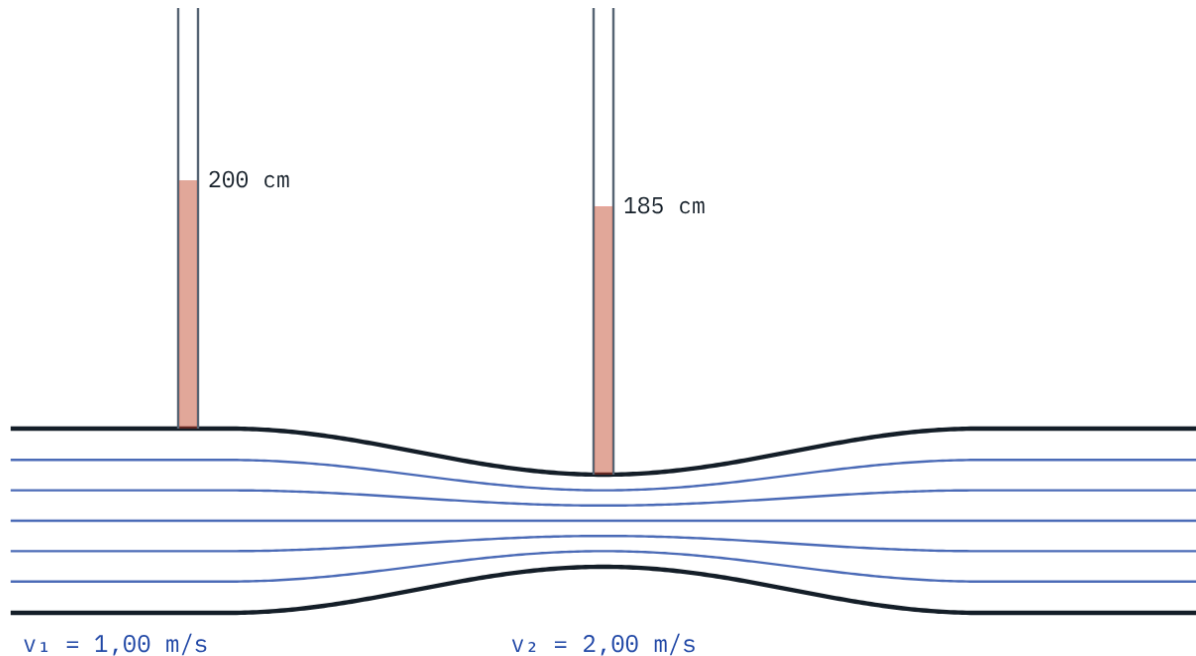
PRAWO · TWIERDZENIE BERNOULLIEGO

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{const} \quad \text{wzdłuż linii prądu.}$$

Warunki: płyn nieściśliwy, bez lepkości, przepływ ustalony. Jeśli przepływ jest bezwirowy, stała jest ta sama w całym przepływie. $\frac{1}{2}\rho v^2$ to ciśnienie dynamiczne: o tyle ciśnienie w rurce zwróconej otworem pod prąd, gdzie płyn zostaje zatrzymany, przewyższa ciśnienie statyczne.

Zastosowania: woda wypływa z otworu na głębokości h pod powierzchnią z prędkością $\sqrt{2gh}$, jak ciało spadające z tej wysokości (prawo Torricellego). W przewężeniu rury ciśnienie spada (zwężka Venturiego). **Rurka Pitota** na samolocie mierzy różnicę między ciśnieniem całkowitym (otwór zwrócony do przodu) i statycznym (otwór boczny), równą $\frac{1}{2}\rho v^2$; stąd prędkościomierz (przykład 10.2).

SYMULACJA 1 Zwężka Venturiego z dwiema rurkami manometrycznymi. W szerokiej części woda płynie z prędkością v_1 , w przewężeniu szybciej. Wysokość słupa w rurce pokazuje ciśnienie (nadciśnienie względem atmosfery). Zmieniaj prędkość i stopień przewężenia.



— linie prądu — słup wody w rurce manometru

$$v_2 = v_1 \cdot A_1 / A_2 \quad 2,00 \text{ m/s}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad 1,50 \text{ kPa}$$

$$\text{różnica słupów wody } 15,3 \text{ cm}$$

$$\text{strumień objętości } (A_1 = 10 \text{ cm}^2) \quad 1,00 \text{ l/s}$$

W przewężeniu woda płynie szybciej (równanie ciągłości), więc jej ciśnienie jest niższe (Bernoulli): różnicę widać w wysokościach słupów w rurkach. Zwężka Venturiego tak właśnie mierzy przepływ.

Stan na rysunku: $v_1 = 1,00 \text{ m/s}$, $A_1/A_2 = 2,00$; $v_2 = 2,00 \text{ m/s}$, $p_1 - p_2 = 1,50 \text{ kPa}$.

2.3 Cyrkulacja i wiry

Cyrkulacja to całka prędkości wzdłuż zamkniętej krzywej, $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$ (lekcja 3.4 Całki krzywoliniowe, pola potencjalne i różniczki zupełne), a **wirowość** to rotacja pola prędkości, $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$. W płynie idealnym cyrkulacja wokół krzywej poruszającej się razem z płynem się nie zmienia (twierdzenie Kelvina), a linie wirowe płyną razem z płynem: dlatego pierścień dymu tak długo zachowuje kształt. Cyrkulacja wróci w części 5 jako klucz do siły nośnej.

FLP II-40-4, 40-5

⚠️ PUŁAPKA · BERNOULLI W ZŁYM MIEJSCU

Twierdzenie Bernoulliego porównuje punkty na tej samej linii prądu (albo w przepływie bezwirowym). Struga powietrza wydmuchiwana z ust ma ciśnienie atmosferyczne, choć jest szybka: nie powstała przez przyspieszenie powietrza z otoczenia wzdłuż jednej linii prądu, tylko w płucach, przy wyższym ciśnieniu. Unoszenie się kartki w pokazie „dmuchamy nad kartką” wynika w dużej części z zakrzywienia strugi wzdłuż kartki, a nie z samego „szybciej, więc niższe ciśnienie”.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Woda płynie rurą o średnicy 4 cm z prędkością 1 m/s, a potem przewężeniem o średnicy 2 cm. Jaka jest prędkość w przewężeniu i różnica ciśnień?

- 2 Z jaką prędkością wypływa woda z otworu 1 m pod powierzchnią w beczce? Na jaką odległość poziomą doleci, jeśli otwór jest 1 m nad ziemią?

- 3 Wiatr o prędkości 30 m/s (wichura) wieje nad płaskim dachem o powierzchni 100 m². Oszacuj, z jaką siłą może go podrywać, przyjmując różnicę ciśnień rzędu $\frac{1}{2}\rho v^2$.

- 4 Pokaż, że strumień wody z kranu zwęża się ku dołowi. Jeśli na wylocie ma prędkość 0,5 m/s i średnicę 1 cm, jaką średnicę ma 10 cm niżej?

- 5 Wyprowadź twierdzenie Bernoulliego z zasady zachowania energii dla odcinka strugi między przekrojami 1 i 2, w czasie, w którym przez każdy przekrój przepływa objętość ΔV .


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

3 Lepkość

Teoria płynu idealnego ma poważną wadę, znaną jako paradoks d'Alemberta: ciało poruszające się ze stałą prędkością w takim płynie nie doznaje żadnego oporu. Prawdziwe płyny mają lepkość: sąsiednie warstwy poruszające się z różnymi prędkościami ciągną się nawzajem. Między dwiema płytami, z których górna przesuwana się z prędkością u nad dolną w odległości d , potrzebna jest siła na jednostkę pola $\eta u/d$. (FLP II-41-1)

PRAWO · LEPKOŚĆ NEWTONOWSKA

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

τ to naprężenie styczne (siła na jednostkę pola), η lepkość dynamiczna (Pa·s), ν lepkość kinematyczna (m²/s). Woda w 20 °C: $\eta = 1,0 \text{ mPa}\cdot\text{s}$, $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Powietrze: $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, ale $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, piętnaście razy więcej niż woda. Miód: kilka Pa·s.

Lepkość gazu wynika z ruchu cząsteczek (dział 8 „Ciepło i teoria kinetyczna”): cząsteczki przeskakujące między warstwami przenoszą pęd. Dlatego lepkość gazów rośnie z temperaturą, a cieczy maleje. Dopisanie siły lepkości do równania Eulera daje **równanie Naviera–Stokesa**:

FLP II-41-2

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

To równanie opisuje prawie wszystkie przepływy, od kropli po huragany, ale rozwiązuje się je dokładnie tylko w nielicznych przypadkach. Dwa najważniejsze:

- **Przepływ Poiseuille'a** w rurze o promieniu R i długości L : profil prędkości jest paraboliczny, $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)$, a strumień objętości $Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L}$. Czwarta potęga promienia sprawia, że zwężenie naczynia krwionośnego o 20% zmniejsza przepływ ponad dwukrotnie (przykład 10.3).
- **Opór Stokesa** na małą kulę o promieniu a poruszającą się powoli: $F = 6\pi\eta a v$ (dział 8, ruchy Browna). Kropelka mgły o średnicy 10 μm opada w powietrzu z prędkością ok. 3 mm/s, dlatego mgła wisi godzinami (przykład 10.4).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Płyta o polu 0,5 m² sunie z prędkością 0,2 m/s po warstwie oleju ($\eta = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) grubości 1 mm. Jaka siła jest potrzebna?
- 2 O ile zmieni się przepływ przez rurę, gdy podwoimy jej średnicę przy tym samym spadku ciśnienia? A gdy podwoimy długość?
- 3 Kulka stalowa o średnicy 2 mm ($\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$) opada w glicerynie ($\rho = 1260 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 1,4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$). Oblicz prędkość graniczną ze wzoru Stokesa i sprawdź, czy wzór był uprawniony ($\text{Re} < 1$).

- 4 Wyprowadź z profilu parabolicznego, że średnia prędkość w przepływie Poiseuille'a to połowa prędkości na osi.

- 5 Dlaczego olej silnikowy gęstnieje na mrozie, a lepkość powietrza w upale rośnie?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

4 Liczba Reynoldsa, warstwa przyścienna i opór

Porównajmy w równaniu Naviera–Stokesa wyraz bezwładności $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \sim \rho v^2/L$ z wyrazem lepkości $\eta \nabla^2 \vec{v} \sim \eta v/L^2$. Ich stosunek to jedyna bezwymiarowa liczba, od której zależy charakter przepływu wokół ciała o danym kształcie (lekcja 0.5 Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru): FLP II-41-3

🔧 DEFINICJA · LICZBA REYNOLDSA

$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}.$$

Dwa przepływy wokół geometrycznie podobnych ciał przy tej samej liczbie Reynoldsa (i małej liczbie Macha) są podobne: różnią się tylko skalą. Na tym opiera się badanie modeli w tunelach aerodynamicznych. Bakteria pływa przy $\text{Re} \sim 10^{-4}$, człowiek idący w powietrzu przy $\sim 10^5$, samochód przy $\sim 10^7$.

Feynman opisuje, jak zmienia się przepływ wokół walca, gdy rośnie Re . FLP II-41-4 Przy $\text{Re} < 1$ linie prądu opływają walec symetrycznie (przepływ pełzający, rządzi lepkość). Około $\text{Re} \approx 10$ za walcem pojawiają się dwa stojące wiry. Powyżej ok. 40–50 wiry odrywają się na przemian z jednej i drugiej strony, tworząc **ścieżkę wirową Kármána**. (Poza Feynmanem: odrywają się z częstotliwością ok. $0,2 v/d$, co słysząc jako „śpiew” drutów na wietrze.) Przy $\text{Re} \sim 10^3$ – 10^5 ślad za walcem jest turbulentny, a w okolicy $\text{Re} \approx 3 \cdot 10^5$ opór gwałtownie spada (kryzys oporu, symulacja 2).

4.1 Warstwa przyścienna

Nawet przy ogromnych Re lepkość nie znika z gry. Płyn tuż przy powierzchni ciała przylega do niej (ma prędkość zerową), a w cienkiej **warstwie przyściennej** prędkość rośnie do wartości przepływu zewnętrznego. Pojęcie warstwy przyściennej wprowadził Prandtl (1904); dla warstwy laminarnej jej grubość to ok. $5x/\sqrt{\text{Re}_x}$ (rozwiązanie Blasiusa, 1908), gdzie x to odległość od krawędzi natarcia: na skrzydle o cięciwie 2 m przy 50 m/s wychodzi kilka milimetrów, a warstwa turbulentna, jaka rzeczywiście tam występuje, ma kilka centymetrów. Poza tą warstwą płyn

zachowuje się jak idealny, ale to warstwa decyduje o oporze: gdy przy tylnej części ciała ciśnienie rośnie, spowolniony płyn w warstwie nie daje rady płynąć „pod górę ciśnienia” i warstwa się odrywa, zostawiając za ciałem szeroki, wirujący ślad o niskim ciśnieniu. FLP II-41-4, 41-5

4.2 Opór

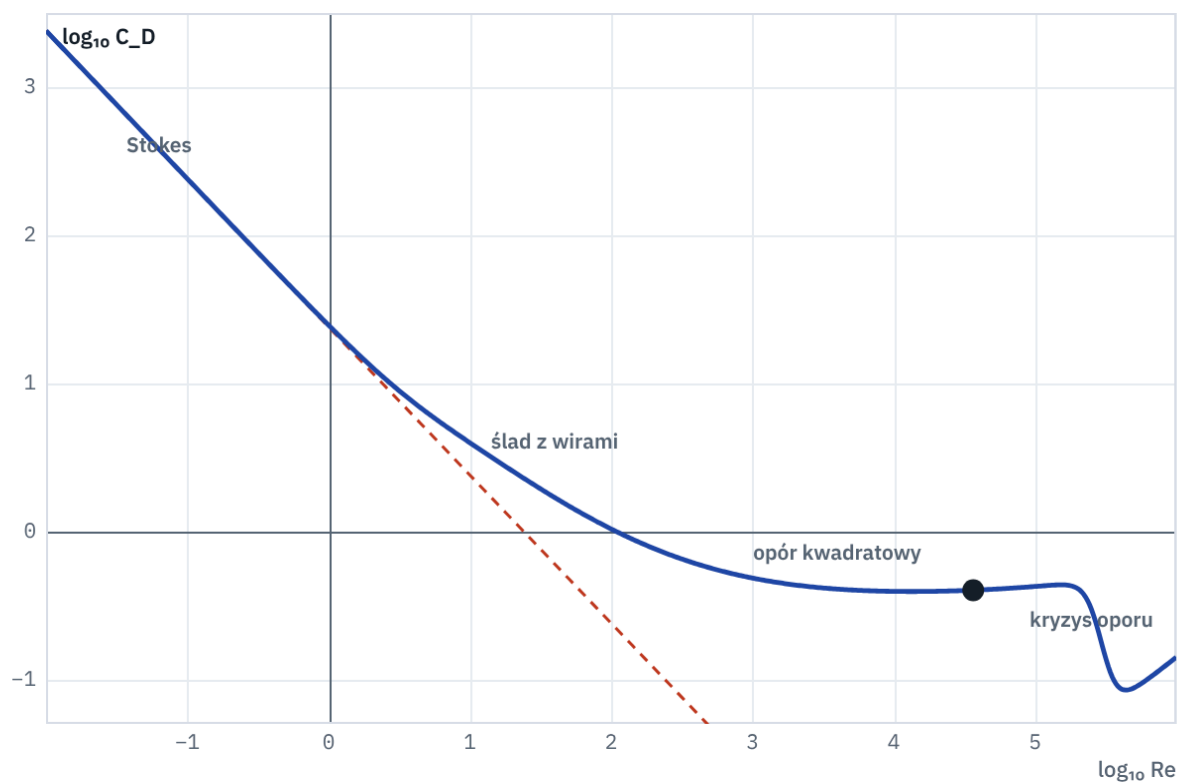
Siłę oporu przy dużych Re zapisuje się wzorem z analizy wymiarowej:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 A,$$

gdzie A to pole przekroju poprzecznego, a współczynnik oporu C_D zależy od kształtu i (słabo) od Re . Typowe wartości: płaska płyta prostopadła do przepływu ok. 1,2; walec 1,0–1,2; kula 0,4–0,5 (przed kryzysem oporu); samochód osobowy 0,25–0,35; kształt opływowy (kropla) ok. 0,04. Kula w przepływie pełzającym ma $C_D = 24/Re$, co jest wzorem Stokesa zapisanym w tej samej postaci.

SYMULACJA 2

Współczynnik oporu kuli w funkcji liczby Reynoldsa (dopasowanie do pomiarów, skala logarytmiczna) i prawo Stokesa. Wybierz płyn, średnicę kuli i prędkość: punkt pokazuje, w jakim reżimie jesteś i jaka jest siła oporu. Spróbuj: kropelka mgły w powietrzu, kulka w miodzie, piłka do golfa przy 70 m/s.



— $C_D(Re)$ dla kuli (pomiar, dopasowanie) - - - prawo Stokesa $24/Re$

liczba Reynoldsa $Re = \rho v d / \eta$ $3,66 \cdot 10^4$

C_D 0,401

siła oporu $5,72 \cdot 10^{-2}$ N

sam wzór Stokesa $3\pi\eta v$ $9,37 \cdot 10^{-5}$ N

Kula 2,2 cm w płynie: powietrze, $v = 25,1$ m/s. Opór kwadratowy: $C_D \approx 0,4-0,5$, $F \approx \frac{1}{2} C_D \rho v^2 A$.

Stan na rysunku: powietrze, $d = 2,2$ cm, $v = 25,1$ m/s; $Re = 3,66 \cdot 10^4$, $C_D = 0,401$, siła $5,72 \cdot 10^{-2}$ N.

SKĄD TO WIEMY?

Krzywą $C_D(\text{Re})$ dla kuli zmierzono w tunelach aerodynamicznych i wodnych w zakresie ok. dziewięciu rzędów wielkości Re ; dopasowanie w symulacji 2 pochodzi z takich danych. Spadek oporu zmierzył Eiffel (1912), a wyjaśnił Prandtl w 1914 r.: założył na kulę cienki drucik w kształcie pierścienia, nieco przed linią oderwania. Drucik zaburzał warstwę przyścienną, robił ją turbulentną, warstwa odrywała się później i opór spadał. Piłki golfowe mają dołki z tego samego powodu: przy prędkościach uderzenia ($\text{Re} \approx 2 \cdot 10^5$) gładka piłka miałaby opór mniej więcej dwa razy większy.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Oblicz Re dla: samochodu (4 m, 30 m/s, powietrze), pływaka (2 m, 1,5 m/s, woda), bakterii (2 μm , 30 $\mu\text{m/s}$, woda).

- 2 Samochód ma $C_D = 0,3$ i pole przekroju 2,2 m². Jaką moc pochłania opór powietrza przy 108 km/h, a jaką przy 144 km/h?

- 3 Skoczek spadochronowy o masie 80 kg w pozycji „na brzuchu” ma $C_D A \approx 0,45 \text{ m}^2$. Jaką osiąga prędkość graniczną? Ile razy musi wzrosnąć $C_D A$ po otwarciu spadochronu, by spadał z prędkością 5 m/s?

- 4 Linka latawca o średnicy 1,5 mm brzęczy w wietrze 6 m/s. Oszacuj częstotliwość dźwięku. Jaka jest liczba Reynoldsa?

- 5 Oszacuj grubość warstwy przyściennej na końcu skrzydła o cięciwie 2 m przy 50 m/s ze wzoru $\delta \approx 5x/\sqrt{\text{Re}_x}$. Dlaczego wynik, choć mały, ma tak duże znaczenie?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5 Siła nośna: cyrkulacja, skrzydło i latawiec

Ta część wykracza poza wykłady Feynmana, który na przykładzie walca pokazuje tylko, że bez cyrkulacji nie ma siły nośnej, a z cyrkulacją się ona pojawia. Skrzydło ustawione pod niewielkim kątem do przepływu odchyła strumień powietrza w dół; z trzeciej zasady dynamiki powietrze pcha skrzydło w górę. Matematycznie: przepływ wokół skrzydła to opływ bez cyrkulacji plus wir

z cyrkulacją Γ , przez co nad skrzydłem powietrze płynie szybciej, a pod nim wolniej, i z twierdzenia Bernoulliego ciśnienie na górze jest mniejsze. FLP II-40-4

PRAWO · TWIERDZENIE KUTTY-ŻUKOWSKIEGO I WSPÓŁCZYNNIK SIŁY NOŚNEJ

$$L' = \rho v \Gamma, \quad L = \frac{1}{2} C_L \rho v^2 S, \quad C_L \approx 2\pi\alpha \quad (\text{cienki profil, mały kąt } \alpha \text{ w radianach}).$$

L' to siła nośna na jednostkę rozpiętości, S powierzchnia skrzydła. Cyrkulacja ustala się tak, by powietrze schodziło gładko z ostrej krawędzi spływu (warunek Kutty); przy starcie skrzydło zostawia za sobą „wir startowy” o przeciwnej cyrkulacji. Dla skrzydła o skończonym wydłużeniu $AR = b^2/S$ nachylenie jest mniejsze, ok. $2\pi AR/(AR + 2)$, a powyżej kąta krytycznego (zwykle $12-16^\circ$) przepływ odrywa się od górnej powierzchni i siła nośna spada: **przecignięcie**.

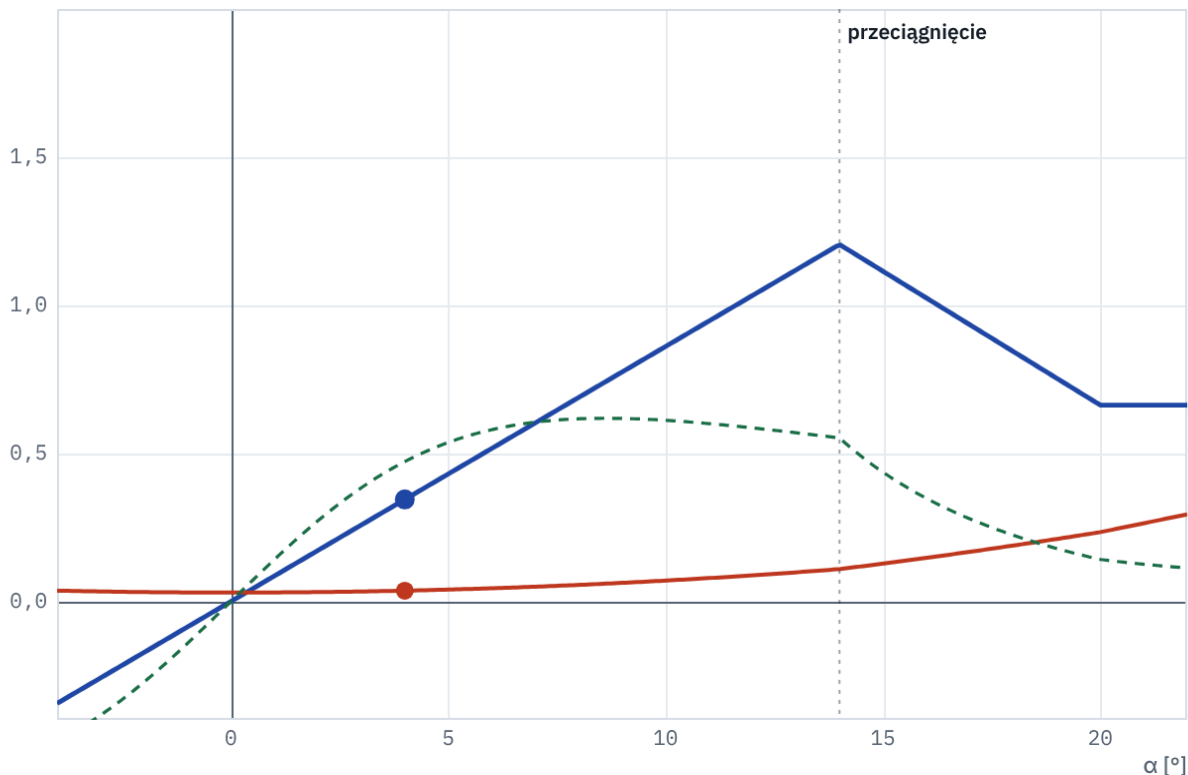
Skończone skrzydło płaci za siłę nośną dodatkowym **oporem indukowanym**: na końcach skrzydła powietrze przepływa spod spodu na górę, tworząc wiry brzegowe, które odchylają strumień w dół i pochylają siłę aerodynamiczną do tyłu. Współczynnik oporu to w przybliżeniu

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi e AR},$$

gdzie C_{D0} to opór przy zerowej sile nośnej, a $e \approx 0,7-0,9$ to współczynnik Oswalda. Stosunek L/D (doskonałość) mówi, ile metrów samolot przeleci w locie ślizgowym na każdy metr wysokości: Cessna ok. 9, szybowiec 40–60, albatros ok. 20.

SYMULACJA 3

Skrzydło lekkiego samolotu (powierzchnia $16,2 \text{ m}^2$, masa samolotu 1100 kg , model uproszczony): współczynniki siły nośnej i oporu w funkcji kąta natarcia, z przeciągnięciem przy 14° . Zmieniaj kąt natarcia i prędkość i znajdź lot poziomy (siła nośna równa ciężarowi). Zmieniaj wydłużenie skrzydła i obserwuj doskonałość.



— współczynnik siły nośnej C_L — współczynnik oporu C_D - - - doskonałość L/D ($\times 0,05$)

C_L / C_D 0,344 / 0,0365

siła nośna $L = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_L$ 10,33 kN

ciężar samolotu (1100 kg) 10,79 kN

opór D 1094 N

doskonałość L/D 9,4

Siła nośna równoważy ciężar: lot poziomy. Większe wydłużenie zmniejsza opór indukowany: dlatego szybowce mają długie, wąskie skrzydła.

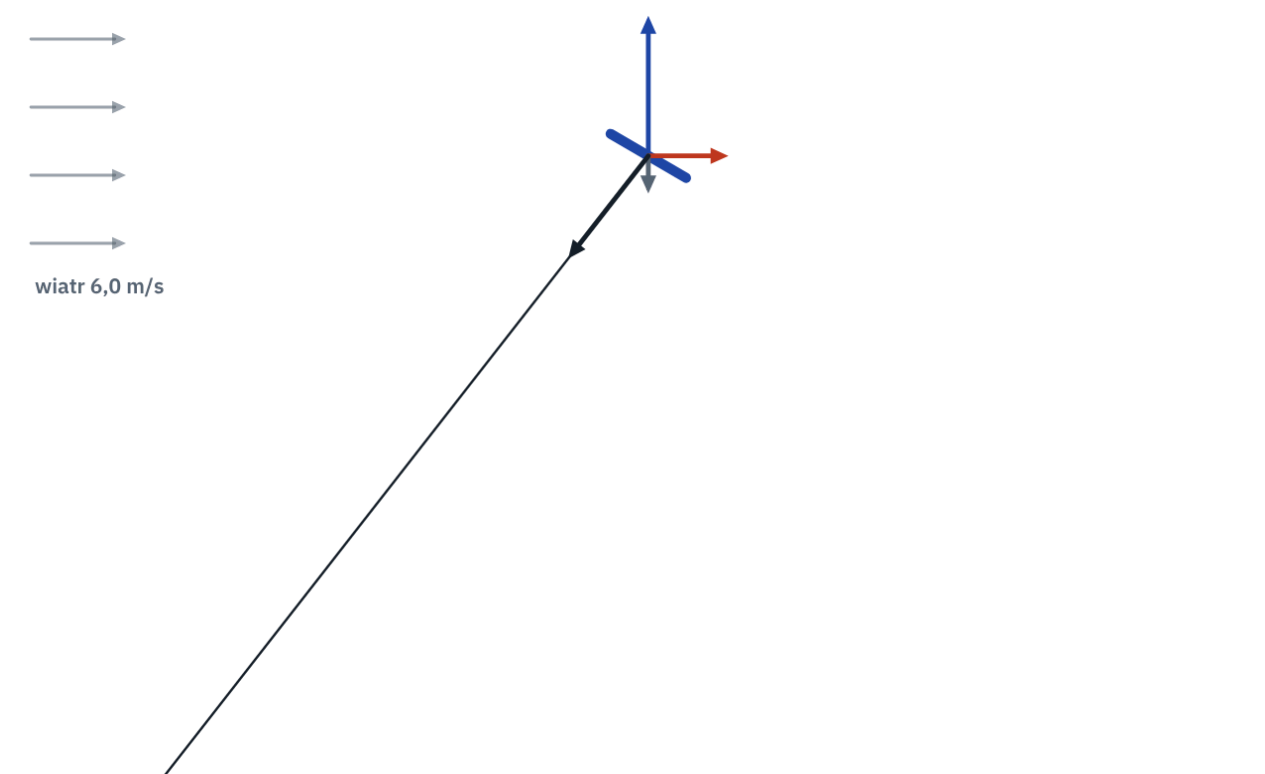
Stan na rysunku: $\alpha = 4,0^\circ$, $v = 55 \text{ m/s}$, $AR = 7,3$, $S = 16,2 \text{ m}^2$; $C_L = 0,344$, $L = 10,33 \text{ kN}$, $L/D = 9,4$.

5.1 Latawiec

Latawiec to skrzydło przy dużym kącie natarcia, zwykle $20\text{--}45^\circ$, uwiązane linką. Siła aerodynamiczna na płaską powierzchnię działa w przybliżeniu prostopadle do niej; jej składowa prostopadła do wiatru to siła nośna L , a składowa wzdłuż wiatru to opór D . W równowadze siła aerodynamiczna, ciężar i naciąg linki sumują się do zera. Kąt natarcia ustala uzda (miejsce przyczepienia linki), a ogon stabilizuje latawiec, przesuwając środek oporu do tyłu.

Prosty model płaskiej płyty przy dużych kątach natarcia: siła normalna $F_N = qSC_N$ z $C_N \approx 1,2 \sin \alpha$ (przy 90° płyta ma $C_D \approx 1,2$). Wtedy $L = F_N \cos \alpha$, $D = F_N \sin \alpha$. To przybliżenie rzędu kilkudziesięciu procent, ale dobrze pokazuje kompromis: umiarkowanie mały kąt natarcia (ok. 15°) daje wysoko stojący latawiec, duży daje silny naciąg, a zbyt mały – za małą siłę nośną (symulacja 4, przykład 10.6).

SYMULACJA 4 Latawiec $0,8 \text{ m}^2$ o masie 250 g w równowadze sił, w modelu płaskiej płyty. Strzałki: siła nośna (prostopadle do wiatru), opór (z wiatrem), ciężar i naciąg linki (wzdłuż linki, której ciężar pomijamy). Zmieniaj prędkość wiatru i kąt natarcia ustawiony uzdą.



— siła nośna L — opór D — ciężar — naciąg linki T

ciśnienie dynamiczne $q = \frac{1}{2}\rho v^2$ 22,1 Pa

siła nośna L 9,17 N

opór D 5,29 N

ciężar 2,45 N

naciąg linki T 8,55 N

kąt linki nad ziemią 52°

Trzy siły: aerodynamiczna, ciężar i naciąg linki, równoważą się. Linka ustawia się wzdłuż wypadkowej siły aerodynamicznej i ciężaru, pod kątem 52° nad ziemią. Kąt natarcia ok. 15° daje wysoko stojący latawiec i słaby naciąg; duży kąt to silny naciąg, ale latawiec stoi niżej, a zbyt mały kąt nie da dość siły nośnej.

Stan na rysunku: latawiec $0,8 \text{ m}^2$, $0,25 \text{ kg}$; wiatr $6,0 \text{ m/s}$, $\alpha = 30^\circ$; $L = 9,17 \text{ N}$, $D = 5,29 \text{ N}$, naciąg $8,55 \text{ N}$.

⚠️ PUŁAPKA · „RÓWNY CZAS PRZELOTU”

Popularne wyjaśnienie mówi, że powietrze nad wypukłym skrzydłem ma dłuższą drogę i musi „dogonić” powietrze płynące pod spodem w tym samym czasie, więc płynie szybciej. Nic takiego nie musi zachodzić; w rzeczywistości powietrze nad skrzydłem dociera do krawędzi spływu wyraźnie wcześniej. Siłę nośną ma też płaska płyta pod kątem natarcia (latawiec, papierowy samolocik) i samolot lecący do góry nogami. O sile nośnej decydują kąt natarcia i cyrkulacja, a nie sama wypukłość.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Samolot o masie 1100 kg i powierzchni skrzydeł $16,2 \text{ m}^2$ leci poziomo z prędkością 55 m/s na poziomie morza. Jaki jest współczynnik siły nośnej?
- 2 Ten sam samolot ma $C_{L,\max} = 1,6$ (z klapami). Z jaką najmniejszą prędkością może lecieć poziomo?
- 3 Jaka cyrkulacja jest potrzebna wokół skrzydła o rozpiętości 11 m, by przy 55 m/s utrzymać 1100 kg (rozkład siły nośnej przyjmij jednorodny)?
- 4 Jak zmienia się opór indukowany, gdy samolot leci dwa razy szybciej przy tym samym ciężarze? A opór pasywny C_{D0} ? Dlaczego istnieje prędkość najmniejszego oporu?
- 5 Latawiec z prologu ($0,8 \text{ m}^2$, $0,25 \text{ kg}$, $C_N = 1,2 \sin \alpha$) przy kącie natarcia 45° . Jaki jest najmniejszy wiatr, przy którym się utrzyma?

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

☰ METODA DLA ZADAŃ Z PŁYNÓW

1. **Spoczynek czy ruch?** W spoczynku: $p = p_0 + \rho gh$ i wypór. W ruchu: równanie ciągłości $Av = \text{const}$ i Bernoulli wzdłuż linii prądu.
2. **Policz Re**, zanim wybierzesz wzór na opór: $Re < 1$ Stokes, $Re \gg 1000$ wzór kwadratowy z C_D .
3. **Siły aerodynamiczne**: zawsze $q = \frac{1}{2}\rho v^2$ razy powierzchnia razy współczynnik; sprawdź, którą powierzchnię (przekrój czy skrzydło) wiąże podany współczynnik.
4. **Równowaga**: rysuj wszystkie siły (nośna prostopadle do przepływu, opór wzdłuż, ciężar, naciąg lub ciąg) i rozkładaj na składowe.
5. **Sprawdź założenia**: nieściśliwość ($Mach < 0,3$), brak lepkości poza warstwą przyścienną, przepływ ustalony.
6. **Sprawdzenie**: jednostki, rząd wielkości ($1 \text{ atm} = 10 \text{ m wody}$, q przy 30 m/s to ok. 550 Pa).

Przykład 10.1

Dlaczego pływa stalowy statek

Barka ma prostopadłościenny kadłub $50 \text{ m} \times 10 \text{ m}$. Ile ładunku przyjmie, zanurzając się z 1 m do 3 m w wodzie morskiej? Jaka jest średnia gęstość barki z ładunkiem przy zanurzeniu 3 m , jeśli kadłub ma wysokość 5 m ?

- 1 Wyparta objętość przy zanurzeniu 3 m : $50 \cdot 10 \cdot 3 = 1500 \text{ m}^3$, masa wody $1500 \cdot 1025 \approx 1,54 \cdot 10^6 \text{ kg}$. Przy 1 m : $5,1 \cdot 10^5 \text{ kg}$.
- 2 Ładunek to różnica: ok. 1000 ton .
- 3 Średnia gęstość całości (objętość kadłuba 2500 m^3): $1,54 \cdot 10^6 / 2500 \approx 615 \text{ kg/m}^3$, mniej niż woda.

Wynik: barka przyjmie ok. 1000 t ładunku; pływa, bo jej średnia gęstość z powietrzem w środku jest mniejsza od gęstości wody.

Sprawdzenie: każdy centymetr zanurzenia to $50 \cdot 10 \cdot 0,01 \cdot 1025 \approx 5 \text{ t}$ ładunku; 200 cm to ok. 1000 t ✓.

Przykład 10.2

Prędkościomierz samolotu

Rurka Pitota pokazuje różnicę ciśnienia całkowitego i statycznego 600 Pa. Jaka jest prędkość samolotu na poziomie morza, a jaka na wysokości 3000 m (gęstość 0,909 kg/m³)?

- 1 Bernoulli między punktem spiętrzenia i przepływem swobodnym: $\Delta p = \frac{1}{2}\rho v^2$.
- 2 Poziom morza: $v = \sqrt{2 \cdot 600 / 1,225} \approx 31,3$ m/s.
- 3 3000 m: $v = \sqrt{2 \cdot 600 / 0,909} \approx 36,3$ m/s.

Wynik: ten sam odczyt to 31 m/s przy ziemi i 36 m/s na 3000 m. Prędkościomierz jest wyskalowany dla gęstości przy ziemi i pokazuje prędkość przyrządową (IAS); prędkość rzeczywista (TAS) jest na wysokości większa.

Sprawdzenie: dla pilota to zaleta: siła nośna zależy od $\frac{1}{2}\rho v^2$, czyli od wskazania prędkościomierza, więc prędkość przeciągnięcia „na wskaźniku” jest taka sama na każdej wysokości ✓.

Przykład 10.3

Zwężone naczynie krwionośne

Błazka miażdżycowa zmniejsza promień tętnicy o 20% na pewnym odcinku. Ile razy wzrasta opór hydrauliczny tego odcinka? O ile musiałyby wzrosnąć różnica ciśnień, by utrzymać ten sam przepływ, gdyby cały opór tętnicy pochodził z tego odcinka?

- 1 Poiseuille: $Q \propto R^4 \Delta p$, opór $\propto 1/R^4$.
- 2 $1/0,8^4 \approx 2,44$: opór rośnie prawie dwa i pół raza.
- 3 Przy tej samej różnicy ciśnień przepływ spada do $0,8^4 \approx 41\%$; żeby go utrzymać, różnica ciśnień musiałyby wzrosnąć 2,44 raza.

Wynik: 20% mniejszy promień to 2,4 raza większy opór. Organizm kompensuje to częściowo rozszerzaniem innych naczyń i podnoszeniem ciśnienia.

Sprawdzenie: prawo Poiseuille'a dotyczy przepływu laminarnego w sztywnej rurze; krew nie jest cieczą newtonowską, a tętnice są sprężyste, więc to oszacowanie, ale kierunek i siła efektu są właściwe ✓.

Przykład 10.4

Mgła i deszcz

Oblicz prędkość opadania kropelki mgły o średnicy $10\ \mu\text{m}$ i kropli deszczu o średnicy $2\ \text{mm}$ w powietrzu. Sprawdź, który wzór na opór stosuje się w każdym przypadku.

- 1 Mgła, Stokes: $v = \frac{2a^2\rho_w g}{9\eta} = \frac{2 \cdot (5 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 1000 \cdot 9,81}{9 \cdot 1,81 \cdot 10^{-5}} \approx 3\ \text{mm/s}$; $\text{Re} \approx 0,002 \checkmark$.
- 2 Deszcz: przy Re rzędu setek wzór kwadratowy z $C_D \approx 0,5$: $mg = \frac{1}{2}C_D\rho_a v^2\pi a^2$, czyli $v = \sqrt{\frac{8a\rho_w g}{3C_D\rho_a}} \approx 6,5\ \text{m/s}$; $\text{Re} \approx 900 \checkmark$.

Wynik: mgła opada z prędkością $3\ \text{mm/s}$ (ok. $10\ \text{m}$ na godzinę), kropla deszczu $6,5\ \text{m/s}$. Promień różni się 200 razy, prędkość ponad 2000 razy.

Sprawdzenie: zmierzona prędkość graniczna kropli o średnicy $2\ \text{mm}$ to ok. $6,5\ \text{m/s}$ $\checkmark$. Duże krople (powyżej ok. $5\ \text{mm}$) spłaszczają się i rozpadają, więc deszcz rzadko spada szybciej niż $9\ \text{m/s}$.

Przykład 10.5

Lekki samolot w locie poziomym

Samolot: $1100\ \text{kg}$, skrzydło $16,2\ \text{m}^2$, wydłużenie $7,3$, $e = 0,8$, $C_{D0} = 0,03$. Lot poziomy z prędkością $55\ \text{m/s}$ na poziomie morza. Oblicz kąt natarcia, opór, doskonałość i moc potrzebną do lotu.

- 1 $C_L = 0,36$ (zadanie 5.1). Nachylenie krzywej nośnej $2\pi \cdot 7,3/9,3 \approx 4,93\ \text{rad}$, więc $\alpha \approx 0,073\ \text{rad} \approx 4,2^\circ$ (od kąta zerowej siły nośnej).
- 2 $C_D = 0,03 + 0,36^2/(\pi \cdot 0,8 \cdot 7,3) \approx 0,03 + 0,007 = 0,037$.
- 3 $L/D \approx 9,7$; opór $mg/(L/D) \approx 1,1\ \text{kN}$; moc $Dv \approx 61\ \text{kW}$.

Wynik: ok. 4° kąta natarcia, opór $1,1\ \text{kN}$, doskonałość prawie 10 i ok. $61\ \text{kW}$ mocy użytecznej, czyli ok. $75\ \text{kW}$ na wale silnika przy sprawności śmigła $0,8$.

Sprawdzenie: lekkie samoloty tej klasy mają silniki o mocy $110\text{--}130\ \text{kW}$ i przy ok. 60% mocy przelatują z prędkością ok. $55\text{--}60\ \text{m/s}$ $\checkmark$.

Przykład 10.6

Latawiec w równowadze

Latawiec z prologu ($0,8 \text{ m}^2$, $0,25 \text{ kg}$) przy wietrze 6 m/s i kącie natarcia 30° , w modelu $C_N = 1,2 \sin \alpha$. Oblicz siłę nośną, opór, naciąg linki i kąt, pod jakim linka wznosi się nad ziemię (linkę traktujemy jako prostą i nieważką).

- 1 $q = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 36 \approx 22,1 \text{ Pa}$; $F_N = qS \cdot 1,2 \sin 30^\circ \approx 10,6 \text{ N}$.
- 2 $L = F_N \cos 30^\circ \approx 9,2 \text{ N}$, $D = F_N \sin 30^\circ \approx 5,3 \text{ N}$, ciężar $2,45 \text{ N}$.
- 3 Linka musi zrównoważyć wypadkową: składowa pozioma $5,3 \text{ N}$, pionowa $9,2 - 2,45 = 6,7 \text{ N}$. Naciąg $\approx 8,6 \text{ N}$, kąt $\arctg(6,7/5,3) \approx 52^\circ$.

Wynik: naciąg ok. $8,6 \text{ N}$, linka pod kątem ok. 52° do ziemi. Przy kącie natarcia 15° naciąg spada do ok. 3 N , a linka staje bardziej stromo (ok. 64°).

Sprawdzenie: przy wietrze 3 m/s siła nośna przy 30° ($2,3 \text{ N}$) nie równoważy ciężaru, a model daje najmniejszy wiatr ok. $2,9 \text{ m/s}$ przy 45° (zadanie 5.5) ✓.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Powietrze nad skrzydłem musi dogonić powietrze pod spodem.”

Nie musi i tego nie robi: dociera do krawędzi spływu wcześniej. Siła nośna wynika z kąta natarcia i cyrkulacji.

× „Szybciej płynący płyn zawsze ma niższe ciśnienie.”

Tylko wzdłuż jednej linii prądu (lub w przepływie bezwirowym) i bez lepkości. Struga z wentylatora ma ciśnienie atmosferyczne.

× „Ciężkie przedmioty toną, lekkie pływają.”

Decyduje średnia gęstość, nie ciężar. Lotniskowiec o masie $100\,000 \text{ t}$ pływa, gwóźdź tonie.

× „Ciśnienie w wodzie naciska tylko w dół.”

Ciśnienie działa jednakowo we wszystkich kierunkach; dlatego woda wypływa z boku butelki i naciska na dno łodzi od spodu.

× „Gęsta ciecz jest lepka.”

Rtęć jest 13,6 razy gęstsza od wody, a ma podobną lepkość (1,5 mPa·s). Olej jest lżejszy od wody i sto razy bardziej lepki.

× „Im szybciej, tym zawsze większy opór.”

W kryzysie oporu kuli (Re ok. $3 \cdot 10^5$) siła oporu w pewnym zakresie *maleje* przy rosnącej prędkości.

× „Skrzydło musi być wypukłe od góry.”

Płaska płyta też daje siłę nośną, a samoloty akrobacyjne mają symetryczne profile i latają do góry nogami, zwiększając kąt natarcia.

8 Zadania feynmanowskie

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 2 godziny

- 1 **Myszy i ludzie.** Przy oporze kwadratowym prędkość graniczna to $\sqrt{2mg/(\rho C_D A)}$.
Pokaż, że dla zwierząt podobnych kształtem rośnie jak $\sqrt{L}$ (gdzie L to rozmiar). Jeśli człowiek (1,8 m) spada z prędkością ok. 55 m/s, to z jaką prędkością spada mysz (3 cm)? Haldane pisał („On Being the Right Size”, 1926), że mysz zrzucona do szybu kopalni wstaje i odchodzi. Dlaczego?

- 2 **Słomka i pompa.** Studniarze i górnicy w XVII w. nie mogli wypompować wody z głębokości większej niż ok. 10 m pompami ssącymi. Wyjaśnij to. Jak rozwiązano problem?

- 3 **Podkręcona piłka.** Piłka obracająca się w locie skręca (efekt Magnusa). Wyjaśnij to za pomocą cyrkulacji. W którą stronę skręci piłka nożna kopnięta tak, że patrząc z góry obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara?

- 4 **Start jumbo jeta.** Boeing 747 o masie 400 t i powierzchni skrzydeł 511 m² odrywa się od ziemi przy ok. 80 m/s. Jaki C_L jest potrzebny? Dlaczego przy starcie wysuwa się kłapy, a w przelocie je chowa?

- 5 **Tunel wodny.** Chcemy zbadać opływ samochodu (4 m, 30 m/s w powietrzu) na modelu w skali 1:10. Jaka prędkość powietrza w tunelu trzeba by ustawić, by zachować Re ? Dlaczego to niemożliwe i jak pomaga tunel wodny?
- 6 **Śpiewające druty.** Przewody trakcji elektrycznej i liny masztów „śpiewają” na wietrze. Przy jakiej częstotliwości śpiewa drut o średnicy 2 mm przy wietrze 10 m/s? Co się stanie, jeśli ta częstotliwość pokryje się z częstotliwością własną liny?
- 7 **Latawiec w ciszy.** Jest bezwietrznie. Dlaczego latawiec da się podnieść, biegnąc? Z jaką prędkością trzeba biec dla latawca z przykładu 10.6? Co się dzieje z latawcem, gdy przestajesz biec?
- 8 **Kropla, która nie spada.** Chmura składa się z kropelek o średnicy ok. 10–20 μm . Prądy wznoszące w chmurze kłębiastej mają prędkość kilku metrów na sekundę. Dlaczego chmury nie opadają i co musi się stać, żeby spadł deszcz?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Od czego zależy ciśnienie na dnie naczynia z wodą?**
Tylko od głębokości (i ciśnienia nad powierzchnią): $p = p_0 + \rho gh$; nie od kształtu naczynia.
- 2 **Ile wynosi siła wyporu?**
Ciężar wypartej cieczy: $\rho_{\text{płynu}} V_{\text{zanurzone}} g$.
- 3 **Jak zmienia się prędkość wody, gdy rura zwęża się do połowy pola przekroju?**
Rośnie dwukrotnie (równanie ciągłości).
- 4 **Co mierzy rurka Pitota?**
Ciśnienie dynamiczne $\frac{1}{2}\rho v^2$, czyli różnicę ciśnienia całkowitego i statycznego.

5 Co mówi liczba Reynoldsa?

Stosunek sił bezwładności do sił lepkości; przepływy o tej samej Re wokół podobnych ciał są podobne.

6 Jak opór kropelki mgły zależy od prędkości, a jak opór samochodu?

Mgła ($Re < 1$): liniowo, $F = 6\pi\eta av$. Samochód: kwadratowo, $F = \frac{1}{2}C_D\rho v^2 A$.

7 Co dzieje się przy przeciągnięciu skrzydła?

Przepływ odrywa się od górnej powierzchni, siła nośna spada, a opór rośnie.

8 Dlaczego szybowce mają długie, wąskie skrzydła?

Duże wydłużenie zmniejsza opór indukowany $C_L^2/(\pi eAR)$, więc rośnie doskonałość L/D .

SPOCZYNEK I PRZEPŁYW IDEALNY

$p = p_0 + \rho gh$; $F_w = \rho_{\text{pl}} V g$; $1 \text{ atm} \approx 10,3 \text{ m}$ wody

ciągłość: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, $Av = \text{const}$

Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{const}$

Torricelli: $v = \sqrt{2gh}$; Pitot: $\Delta p = \frac{1}{2}\rho v^2$

cyrkulacja $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$; Kutta-Żukowski
 $L' = \rho v \Gamma$

LEPKOŚĆ, OPÓR, SIŁA NOŚNA

$\tau = \eta du/dy$; $\nu = \eta/\rho$; $\text{Re} = vL/\nu$

Poiseuille: $Q = \pi R^4 \Delta p / (8\eta L)$; Stokes:

$F = 6\pi\eta av$

opór: $F_D = \frac{1}{2}C_D\rho v^2 A$; warstwa: $\delta \approx 5x/\sqrt{\text{Re}_x}$

nośna: $L = \frac{1}{2}C_L\rho v^2 S$, $C_L \approx 2\pi\alpha \frac{AR}{AR+2}$

$C_D = C_{D0} + C_L^2/(\pi e AR)$; Strouhal: $f \approx 0,2v/d$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** t. II, rozdz. 40 (przepływ „suchej wody”) i 41 (przepływ „mokrej wody”).
- **Dla chętnych:** aerodynamika skrzydła wykracza poza Feynmana; przystępne wprowadzenie dają materiały NASA Glenn Research Center („Beginner's Guide to Aeronautics”) i podręczniki aerodynamiki, np. J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*.

Następny dział: **Fale i dźwięk**. Ścisłość powietrza, którą tu pomijaliśmy, pozwala mu przenosić fale ciśnienia. Zobaczmy, jak z równań ruchu ośrodka wynika równanie falowe, skąd bierze się prędkość dźwięku i dlaczego struny i piszczałki brzmią harmonicznie. A siły aerodynamiczne z tego działu wrócą w automatyce, w równaniach ruchu samolotu.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Nadciśnienie $\rho gh \approx 294$ kPa, bezwzględne ok. 395 kPa (3,9 atm). Siła: $\frac{1}{2}\rho gh^2 \cdot b \approx 441$ MN (licząc tylko nadciśnienie, bo atmosfera naciska z obu stron).
2. Zanurzona część to $917/1025 \approx 89,5\%$, wystaje ok. 10,5%.
3. Ciśnienie jest to samo: $F = 11\,770 \text{ N} \cdot 2/200 \approx 118$ N. Objętość cieczy się nie zmienia: mały tłok przesuwa się o 10 m (w praktyce w wielu ruchach pompki). Praca jest ta sama po obu stronach.
4. Zanurzenie $0,6 \cdot 10 = 6$ cm. Pełne zanurzenie: wypór $1000 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 = 9,81$ N minus ciężar 5,89 N, czyli 3,9 N.
5. Ssanie tylko zmniejsza ciśnienie nad napojem w słomce; do góry pcha go ciśnienie atmosferyczne. Nawet przy próżni w słomce podniesie go najwyżej na $p_0/\rho g \approx 10,3$ m. Na Evereście ($p \approx 34$ kPa) tylko na ok. 3,5 m.

Zadania · część 2

1. Pole maleje 4 razy: $v_2 = 4$ m/s. $\Delta p = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (16 - 1) = 7,5$ kPa.
2. $v = \sqrt{2gh} \approx 4,4$ m/s; czas spadania $\sqrt{2 \cdot 1/9,81} \approx 0,45$ s, zasięg ok. 2 m.
3. $\frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 900 \approx 550$ Pa, razy 100 m²: ok. 55 kN, ciężar ok. 5,6 tony. Dlatego wichury zrywają dachy, a nie wgniatają ich do środka.
4. Woda przyspiesza w spadku: $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 1,49$ m/s. Av stałe: $d = d_0 \sqrt{v_0/v} \approx 0,58$ cm.
5. Praca sił ciśnienia: $p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$. Zmiana energii: masa $\rho \Delta V$ „przeniesiona” z 1 do 2: $\rho \Delta V \left[\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) \right]$. Przyrównanie daje $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz$ stałe.

Zadania · część 3

1. $F = \eta Au/d = 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,2/0,001 = 10$ N.
2. $Q \propto R^4$: 16 razy więcej. Podwojenie długości: dwa razy mniej.
3. $v = \frac{2a^2(\rho_k - \rho_c)g}{9\eta} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 6540 \cdot 9,81}{12,6} \approx 1,0$ cm/s. $Re = 1260 \cdot 0,010 \cdot 0,002/1,4 \approx 0,018 \checkmark$. Tak mierzy się lepkość wiskozymetrem kulkowym.
4. $\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{2v_0}{R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = \frac{2v_0}{R^2} \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{v_0}{2}$.
5. W cieczy cząsteczki są stale w kontakcie i przeskok warstwy wymaga pokonania bariery energetycznej; w wyższej temperaturze częściej się to udaje (czynniki Boltzmanna, dział 8), więc lepkość maleje. W gazie pęd przenoszą swobodne cząsteczki, a w wyższej temperaturze są szybsze i przenoszą go więcej: lepkość rośnie (w najprostszym modelu jak $\sqrt{T}$, w rzeczywistości nieco szybciej).

Zadania · część 4

1. $8 \cdot 10^6$; $3 \cdot 10^6$; $6 \cdot 10^{-5}$. Bakteria żyje w świecie, w którym bezwładność nie gra roli: przestaje płynąć natychmiast, gdy przestaje poruszać wicią.

2. $P = \frac{1}{2} C_D \rho A v^3$: przy 30 m/s ok. 11 kW, przy 40 m/s ok. 26 kW. Moc rośnie jak v^3 : o jedną trzecią szybciej to 2,4 raza więcej mocy.
3. $v = \sqrt{2mg/(\rho C_D A)} \approx 53$ m/s (ok. 190 km/h). Dla 5 m/s: $C_D A \approx 51$ m², ponad 100 razy więcej.
4. $f \approx 0,2v/d = 0,2 \cdot 6/0,0015 = 800$ Hz. $Re = 6 \cdot 0,0015/1,5 \cdot 10^{-5} = 600$: zakres ścieżki wirowej Kármána ✓.
5. $Re = 50 \cdot 2/1,5 \cdot 10^{-5} \approx 6,7 \cdot 10^6$, $\delta \approx 10/2580 \approx 3,9$ mm (w praktyce warstwa jest już turbulentna i grubsza, kilka centymetrów). W tej warstwie gradient prędkości jest ogromny, więc to w niej działają siły lepkości, a jej oderwanie decyduje o oporze i o przeciągnięciu skrzydła.

Zadania • część 5

1. $C_L = 2mg/(\rho v^2 S) = 2 \cdot 10\,791/(1,225 \cdot 3025 \cdot 16,2) \approx 0,36$.
2. $v_{\min} = \sqrt{2mg/(\rho S C_{L,\max})} \approx 26$ m/s (ok. 94 km/h): prędkość przeciągnięcia.
3. $L' = mg/b \approx 981$ N/m, $\Gamma = L'/(\rho v) \approx 14,6$ m²/s.
4. $C_L \propto 1/v^2$, więc $D_i = qS C_L^2/(\pi e AR) \propto v^2 \cdot v^{-4} = v^{-2}$: cztery razy mniejszy. Opór pasożytniczy $\propto v^2$: cztery razy większy. Suma ma minimum, gdy oba są równe.
5. Siła nośna $L = qS \cdot 1,2 \sin \alpha \cos \alpha$ jest największa przy 45°: $L = 0,6 qS$. Warunek $L = mg$: $q = 2,45/(0,6 \cdot 0,8) \approx 5,1$ Pa, $v = \sqrt{2q/\rho} \approx 2,9$ m/s.

Zadania feynmanowskie

1. $m \propto L^3$, $A \propto L^2$, więc $v \propto \sqrt{L}$. Mysz: $55\sqrt{0,03/1,8} \approx 7$ m/s (w rzeczywistości jeszcze mniej, bo futro i rozłożone łapki zwiększają $C_D A$).
2. Energia na jednostkę masy przy uderzeniu $\propto v^2 \propto L$, a wytrzymałość kości i tkanek na jednostkę masy rośnie przy małych rozmiarach (przekrój do masy $\propto 1/L$). Mysz uderza 60 razy łagodniej na kilogram niż człowiek, a jest dużo bardziej odporna.
1. Pompa ssąca tylko obniża ciśnienie nad wodą; wodę podnosi ciśnienie atmosferyczne, a ono zrównoważy słup wody o wysokości najwyżej $p_0/\rho g \approx 10,3$ m. Ten problem doprowadził Torricellego do barometru (1643).
2. Rozwiązanie: pompy tłoczące umieszczone na dole (pchające wodę do góry) albo kilka pomp ssących jedna nad drugą, każda podnosząca wodę o kilka metrów.
1. Obracająca się powierzchnia wlece za sobą powietrze w warstwie przyściennej i przesuwają punkty oderwania: przepływ wokół piłki dostaje cyrkulację. Z twierdzenia Kutty-Żukowskiego pojawia się siła prostopadła do prędkości. Prościej: ślad za piłką jest odchylony w jedną stronę, więc piłka jest pchana w drugą.
2. Obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara (patrząc z góry) przy locie „do przodu”: lewa strona piłki porusza się do przodu (pod wiatr), prawa do tyłu (z wiatrem). Powietrze szybciej opływa stronę, która porusza się z wiatrem, czyli prawą; siła działa w prawo.
1. $C_L = 2mg/(\rho v^2 S) \approx 2,0$. Gładkie skrzydło osiąga najwyżej ok. 1,4–1,6, zanim nastąpi przeciągnięcie.
2. Kłapy i sloty zwiększają krzywiznę i powierzchnię skrzydła oraz opóźniają oderwanie: $C_{L,\max}$ rośnie do 2,5–3. W przelocie (250 m/s na 11 km, gdzie $\rho \approx 0,36$) potrzebne C_L to ok. 0,5–0,7, a kłapy dawałyby tylko dodatkowy opór.

5. 1. $Re = 8 \cdot 10^6$; model 0,4 m w powietrzu wymagałby 300 m/s, blisko prędkości dźwięku: powietrze przestaje być nieściśliwe i przepływ jest zupełnie inny.
2. W wodzie (ν 15 razy mniejsze): $v = 8 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} / 0,4 = 20$ m/s, osiągalne. W praktyce często godzi się na mniejsze Re i poprawia wyniki, bo C_D powyżej 10^6 zmienia się powoli.
6. 1. $f \approx 0,2v/d = 1000$ Hz (liczba Strouhala ok. 0,2 w szerokim zakresie Re).
2. Odrywające się na przemian wiry działają na linę okresową siłą poprzeczną. Przy zgodności częstotliwości pojawia się rezonans (dział 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe”); wiry potrafią się wtedy „zablokować” na częstotliwości drgań. Dlatego na wysokich kominach montuje się spiralne żebra, które psują regularność wirów.
7. 1. Siły aerodynamiczne zależą od prędkości względem powietrza. Biegając z prędkością u , tworzysz „wiatr” u względem latawca.
2. Według modelu potrzeba ok. 2,9 m/s przy najlepszym kącie natarcia (zadanie 5.5): szybki marsz lub trucht.
3. Po zatrzymaniu prędkość względna maleje, latawiec ślizga się w dół, a jego opór przez chwilę jeszcze napina linkę. Bez wiatru spadnie.
8. 1. Prędkość opadania kropli 10–20 μm to 3–12 mm/s (Stokes, $v \propto a^2$). Najsłabszy prąd wznoszący ją przewyższa.
2. Deszcz wymaga wzrostu kropli milion razy w objętości (do ok. 1–2 mm), przez zderzenia i zlewanie się kropeł lub przez wzrost kryształków lodu kosztem kropeł wody. Dopiero takie krople spadają z prędkością metrów na sekundę i pokonują prąd wznoszący.

Fizyka · Dział 10: Płyiny: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. II (Addison-Wesley 1964; New Millennium Edition 2011), rozdz. 40–41; aerodynamika skrzydła i latawca według standardowych modeli inżynierskich. Odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział. Wszystkie liczby policzone na nowo.