

Ruch i jego przyczyny

Kinematyka i zasady dynamiki Newtona, opowiedziane tak, jak uczył Richard Feynman: najpierw zjawisko i pytanie, potem wzór. Przy każdym prawie sprawdzamy, skąd je znamy i gdzie przestaje działać.

CZAS

ok. 4 h teorii + 4–5 h zadań

ZADANIA

32 zadania w treści + 8 feynmanowskich, z odpowiedziami

ŹRÓDŁO

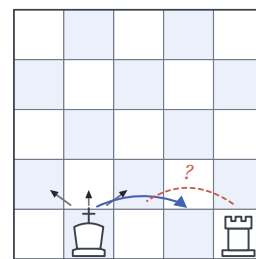
Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, rozdz. 1, 2, 7–12

W TYM DZIALE

- 0 Prolog: gra, której reguł nie znamy
- 1 Opis ruchu: gdzie i kiedy
- 2 Trzy wymiary: wektory
- 3 Ruch po okręgu
- 4 Trzy zasady dynamiki
- 5 Czym właściwie jest siła?
- 6 Jak z $F = ma$ powstaje ruch
- 7 Metoda i przykłady rozwiązań
- 8 Błędne intuicje
- 9 Zadania feynmanowskie
- 10 Sprawdź się
- 11 Karta wzorów i co dalej

Prolog: gra, której reguł nie znamy

W drugim wykładzie Feynman porównuje pracę fizyka do oglądania partii szachów przez kogoś, kto nie zna reguł i odgaduje je z obserwowanych ruchów. (FLP I-2-1) Rozwińmy ten obraz na własnym przykładzie. Oglądasz wiele partii i zapisujesz regułę: król przesuwa się zawsze tylko o jedno pole. Reguła sprawdza się w setkach ruchów, aż pewnego dnia król przeskakuje o dwa pola w bok, a wieża staje tuż obok niego, po jego drugiej stronie. To roszada, ruch rzadki i dozwolony tylko w ściśle określonych warunkach, na przykład wtedy, gdy ani król, ani ta wieża nie wykonały jeszcze w partii żadnego ruchu. Twoja reguła nie była fałszywa, była niepełna: opisywała tylko sytuacje, które zdążyłeś zobaczyć. Fizyka działa tak samo: prawa, które poznajemy, są najlepszymi dotąd odgadniętymi regułami, a każda z nich może pewnego dnia okazać się przybliżeniem.



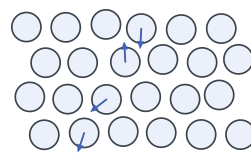
zawsze o jedno pole... aż do roszady

Ten dział dotyczy pierwszej i najbardziej udanej części tej gry: ruchu ciał. Zanim zaczniemy, potrzebujemy jednego zdania, które według Feynmana zawiera najwięcej wiedzy o świecie przy najmniejszej liczbie słów:

Wszystkie rzeczy zbudowane są z atomów — małych cząstek, które bez przerwy się poruszają, przyciągają się, gdy są w niewielkiej odległości, a odpychają, gdy próbuje się je wcisnąć jedną w drugą.

R. Feynman, FLP I-1-2 (tłum. własne)

Wróćmy do tego zdania dwa razy. Pierwszy raz zaraz, bo „punkt materialny”, którym będziemy się posługiwać, to przecież ogromna gromada atomów, którą dla wygody traktujemy jak kropkę. Drugi raz w części 5, gdzie się okaże, że siła, z jaką stół podtrzymuje książkę, to właśnie atomy „odpychające się, gdy wciska się je jedno w drugie”.



przyciągają się z bliska, odpychają przy ścisnieniu

Opis ruchu: gdzie i kiedy

1.1 Punkt materialny to celowe uproszczenie

Samochód, który przejechał sto kilometrów, ma przód i tył oddalone o cztery metry. Do opisu tej podróży ta różnica nie ma znaczenia, więc mówimy po prostu o „samochodzie” i jego położeniu. **Punkt materialny** to ciało, którego rozmiary są małe w porównaniu z odległościami, na jakich się porusza. (FLP I-8-1) To nie jest kłamstwo, tylko świadomie wybrana dokładność. Tę samą Ziemię traktujemy jak punkt, licząc jej orbitę wokół Słońca, ale nie wtedy, gdy liczymy, jak się obraca.

Feynman przyznaje otwarcie, że już tu kryją się subtelności. Co to właściwie jest czas? Co to jest odległość? Czy elektron, gdy na niego nie patrzymy, w ogóle „gdzieś jest”? Teoria względności i mechanika kwantowa pokażą, że te pytania mają nieoczywiste odpowiedzi. Na razie przyjmujemy, że wiemy z grubsza, czym jest czas i przestrzeń. Taka dokładność wystarcza do zbudowania mostu i wysłania sondy na Marsa.

1.2 Od tabeli do funkcji

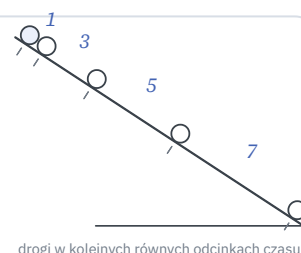
Ruch najprościej zapisać jako tabelę: w chwili t ciało było w miejscu x . Puśćmy kamień z wysokiego mostu i zmierzmy, ile przeleciał:

Spadek swobodny (opór powietrza pomijalny)						
t [s]	0	1	2	3	4	5
x [m]	0	4,91	19,62	44,15	78,48	122,63

Liczby układają się w regułę $x = 4,905 t^2$, czyli $x = \frac{1}{2}gt^2$ przy $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Ze wzoru możemy policzyć położenie w *dowolnej* chwili, także między pomiarami. Gdy piszemy $x = f(t)$, zakładamy coś ważnego: ciało ma jakieś położenie w każdej chwili, a nie tylko wtedy, gdy na nie patrzymy.

SKĄD TO WIEMY?

Galileusz nie miał zegara, który zmierzyłby czas spadania kamienia z wieży. Wymyślił więc, jak spadanie „spowolnić”: puszczał kulę po łagodnej równi pochyłej, a czas mierzył ilością wody wyciekającej z naczynia. Odkrył, że drogi przebywane w kolejnych równych odcinkach czasu mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste: $1 : 3 : 5 : 7$. Sprawdź to z tabelą: $4,91 : 14,71 : 24,53 : 34,33$. Suma kolejnych liczb nieparzystych to kwadrat ($1 + 3 + 5 = 3^2$), więc całkowita droga rośnie jak t^2 .



drogi w kolejnych równych odcinkach czasu

1.3 Prędkość chwilowa, czyli dwa pomiary prędkości

Na polskich drogach działają dwa rodzaje kontroli prędkości. Odcinkowy pomiar zapisuje, o której samochód minął pierwszą bramkę, a o której drugą, kilka kilometrów dalej, i dzieli długość odcinka przez czas przejazdu. Fotoradar mierzy prędkość w jednym miejscu, w ułamku sekundy. Kierowca przejechał odcinek 5 km w 4 minuty i 17 sekund, czyli średnio 70 km/h, ale fotoradar w połowie trasy pokazał 90 km/h. Które urządzenie ma rację?



90 km/h – ale tylko w tej chwili

Oba, bo mierzą co innego. Pomiar odcinkowy daje *średnią* prędkość na długim odcinku: kierowca mógł przyspieszyć przed fotoradarem i zwolnić gdzie indziej. Gdybyśmy jednak skracali odcinek do kilometra, do stu metrów, do metra, średnia prędkość zbliżałaby się do tego, co pokazał fotoradar. Prędkość „w danej chwili” to właśnie granica średnich prędkości liczonych na coraz krótszych odcinkach czasu. (Feynman wprowadza ten temat podobną scenką z policjantem i kierowczynią.) FLP I-8-2

Zróbmy to dla naszego kamienia w chwili $t_0 = 3$ s. Liczymy, o ile przesunął się w krótkim czasie Δt , i dzielimy przez ten czas:

Średnia prędkość $\Delta x / \Delta t$ tuż po chwili $t_0 = 3$ s		
Δt [s]	Δx [m]	$\Delta x / \Delta t$ [m/s]
1	34,335	34,335
0,1	2,99205	29,9205
0,01	0,2947905	29,47905
0,001	0,029434905	29,434905
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	29,43

Iloraz zbliża się do 29,43 m/s. Algebra pokazuje dlaczego. Dla $x = \frac{1}{2}gt^2$ mamy

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g \Delta t.$$

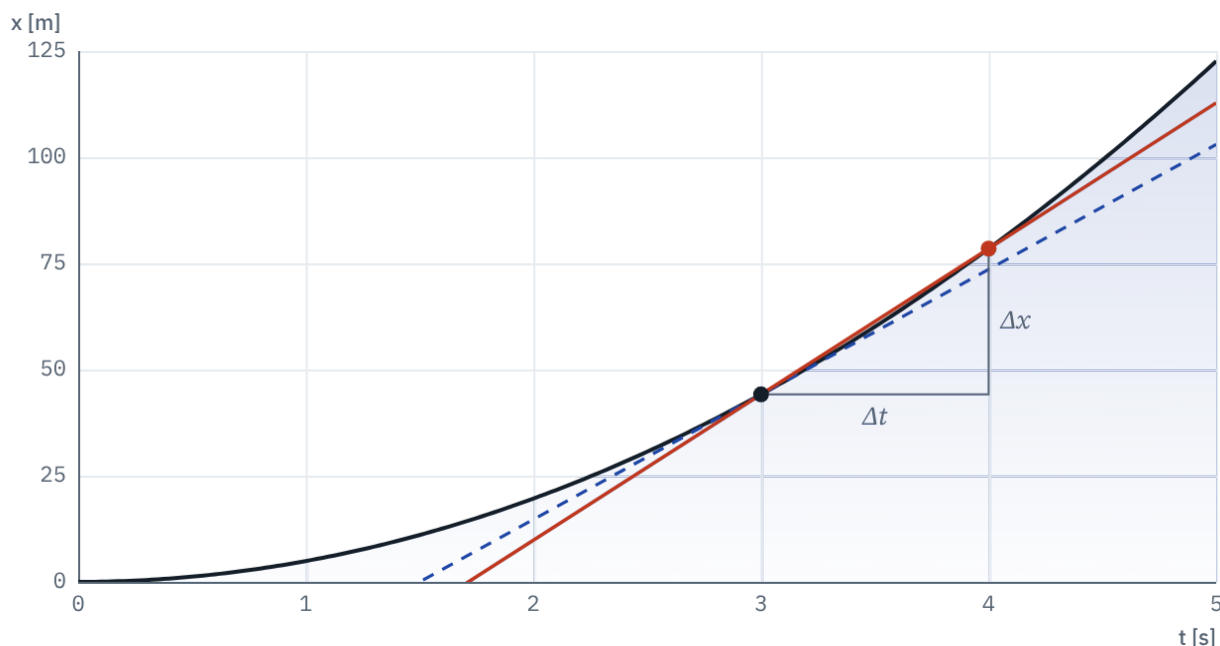
Pierwszy wyraz nie zależy od Δt , a drugi znika, gdy $\Delta t \rightarrow 0$. Prędkość w chwili t_0 to więc dokładnie $gt_0 = 29,43$ m/s. To jest definicja, którą Newton i Leibniz zamienili w nową dziedzinę matematyki. Rachunek różniczkowy powstał po to, żeby powiedzieć, co znaczy „jechać 90 km/h”.

DEFINICJA · PRĘDKOŚĆ CHWILOWA

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Fizyk czyta $dx = v dt$ jako „w bardzo krótkim czasie dt ciało przesuwają się o $v dt$ ”. To zdanie jest tym dokładniejsze, im krótszy jest czas.

SYMULACJA 1 Sieczna zamienia się w styczną. Zmniejszaj Δt i patrz, jak średnia prędkość zbliża się do chwilowej. Różnica to zawsze $\frac{1}{2}g \Delta t$.



— $x(t) = \frac{1}{2} g t^2$ — sieczna (prędkość średnia) - - - styczna (prędkość chwilowa)

Δt 1,00 s

$\Delta x / \Delta t$ 34,3350 m/s

$v = g \cdot t_0$ 29,4300 m/s

różnica = $\frac{1}{2}g\Delta t$ 4,9050 m/s

Stan na rysunku: $t_0 = 3,0$ s, $\Delta t = 1,00$ s.

⚠ PUŁAPKA

W zapisie $\Delta x / \Delta t$ symbol Δ nie jest liczbą, przez którą coś mnożymy, więc nie można go „skrócić”. Feynman porównuje to z $\sin \theta / \sin 2\theta$: nikt rozsądny nie skróci tu „sin” i nie dostanie $\frac{1}{2}$. Δx czytamy jako „mały przyrost x ”, czyli jeden symbol, a nie iloczyn.

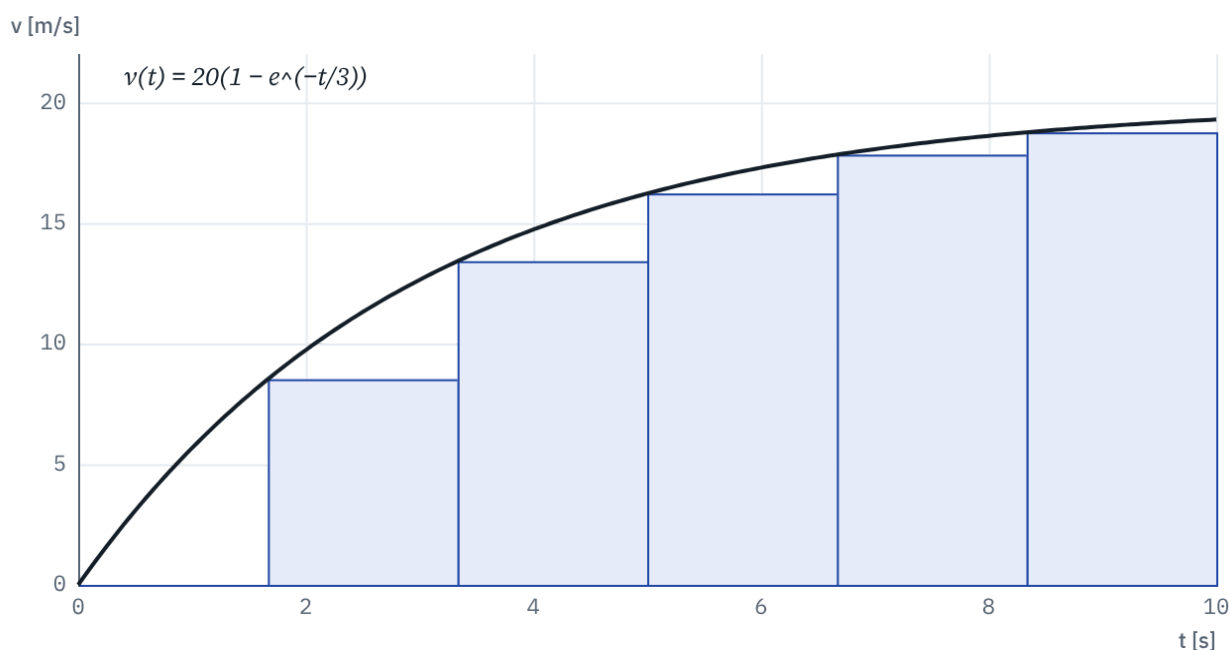
1.4 Droga jako całka: problem odwrotny

Teraz odwrotnie: licznik w samochodzie pokazuje prędkość w każdej chwili, a my chcemy wiedzieć, ile przejechaliśmy. Dzielimy czas na krótkie odcinki Δt . W każdym z nich prędkość jest prawie stała, więc droga na tym odcinku to w przybliżeniu $v_i \Delta t$. Sumujemy wszystkie odcinki i zmniejszamy Δt : FLP I-8-4

$$x(t) - x(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i v(t_i) \Delta t = \int_0^t v(t') dt'.$$

Na wykresie $v(t)$ każdy wyraz $v_i \Delta t$ to pole wąskiego prostokąta. Przebyta droga to **pole pod wykresem prędkości**. Różniczkowanie i całkowanie to dwie strony tego samego związku między położeniem a prędkością.

SYMULACJA 2 Samochód rusza spod światła z prędkością $v(t) = 20(1 - e^{-t/3})$ m/s. Zwiększaj liczbę prostokątów i porównaj sumę z dokładną drogą po 10 s.



$\Sigma v \cdot \Delta t$ 124,59 m

$\int v dt$ (dokładnie) 142,14 m

błąd -12,35 %

Stan na rysunku: $n = 6$, wysokość z lewego końca przedziału.

1.5 Przyspieszenie

Prędkość też się zmienia, a tempo tej zmiany to **przyspieszenie**:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad [a] = \text{m/s}^2.$$

Dla kamienia $v = gt$, więc $a = g$ i jest stałe. Gdy przyspieszenie jest stałe, dwa całkowania dają znane wzory:

$$v(t) = v_0 + at, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Jest jeszcze trzeci wzór, bez czasu. Z reguły łańcuchowej $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$, a po scałkowaniu przy stałym a :

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

⚠ PUŁAPKA

Te trzy wzory działają *tylko* przy stałym przyspieszeniu. Gdy siła zależy od położenia (sprężyna), prędkości (opór powietrza) albo czasu, trzeba wrócić do definicji $v = dx/dt$ i $a = dv/dt$ i całkować. Ten przypadek ćwiczą zadania z części 6.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

6 zadań · ok. 50 min

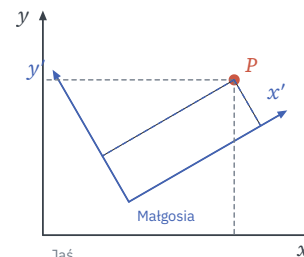
- 1 ■ ■ ■ Położenie hamującego samochodu opisuje wzór $x(t) = 20t - 2t^2$ (metry, sekundy). Wyznacz prędkość i przyspieszenie. Po jakim czasie samochód się zatrzyma i jaka jest droga hamowania? Co ten wzór „przewiduje” dla $t = 7$ s i dlaczego nie należy mu wtedy wierzyć?
- 2 ■ ■ ■ Pociąg rusza z przyspieszeniem $0,5 \text{ m/s}^2$ i przyspiesza przez 40 s. Potem jedzie 60 s ze stałą prędkością, a na koniec hamuje jednostajnie przez 20 s aż do zatrzymania. Narysuj wykres $v(t)$. Oblicz największą prędkość, całą drogę i prędkość średnią.
- 3 ■ ■ ■ Samochód jadący z prędkością 50 km/h hamuje awaryjnie na drodze 13 m. (a) Jaka będzie droga hamowania przy 90 km/h, jeśli opóźnienie jest takie samo? (b) Kierowca zaczyna hamować dopiero po 1 s od zauważenia przeszkody, a przez ten czas auto jedzie bez zmiany prędkości. Oblicz całkowitą drogę zatrzymania przy obu prędkościach.
- 4 ■ ■ ■ Prędkość ciała poruszającego się po prostej to $v(t) = t^2 - 6t + 8$ (m/s, s). W których chwilach ciało zawraca? Oblicz przemieszczenie i drogę w przedziale od 0 do 5 s.
- 5 ■ ■ ■ W lufie karabinu siła działająca na pocisk maleje liniowo w miarę jego przesuwania się: $a(x) = a_0(1 - x/L)$, gdzie $a_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$, a $L = 0,5 \text{ m}$ to długość lufy. Z jaką prędkością pocisk opuszcza lufę? Dlaczego nie wolno tu użyć wzoru $v^2 = 2a_0L$?
- 6 ■ ■ ■ W tabeli z części 1.3 średnia prędkość kamienia między $t_0 = 3 \text{ s}$ a $t_0 + \Delta t$ dla $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ wynosi 29,9205 m/s. (a) W której chwili kamień ma dokładnie taką prędkość chwilową? (b) Pokaż, że przy stałym przyspieszeniu średnia prędkość na dowolnym przedziale czasu jest równa prędkości chwilowej w środku tego przedziału. (c) Co z tego wynika dla metody kroków z części 6? Czy przy zmiennym przyspieszeniu jest tak samo?

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

2.1 Dlaczego w ogóle wektory?

Feynman nie wprowadza wektorów jako „strzałek ze zwrotem”. Wprowadza je przez **symetrię**. Dwóch obserwatorów, nazwijmy ich Jasiem i Małgosią, opisuje ten sam ruch. Jaś liczy odległości od drzwi laboratorium, a Małgosia od okna. Osie Małgosi są w dodatku obrócone o 30° . Ich liczby (x, y, z) są różne. Doświadczenie pokazuje jednak, że prawa fizyki u obojga mają *tę samą postać*. Nie ma w przyrodzie wyróżnionego miejsca ani wyróżnionego kierunku.

FLP I-11-1...4



Wektor to zapis wielkości, która przy obrocie osi zmienia składowe dokładnie tak, jak zmieniają się współrzędne przesunięcia. Zysk jest taki: jeśli prawo zapiszesz jako równość dwóch wektorów, np. $\vec{F} = m\vec{a}$, to automatycznie jest prawdziwe w każdym obróconym układzie. Nie musisz tego sprawdzać osobno. Zapis wektorowy to sposób na wbudowanie symetrii przestrzeni w samo równanie.

2.2 Położenie, prędkość, przyspieszenie

Położenie to wektor $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$. Wszystko, co zrobiliśmy w jednym wymiarze, robimy teraz dla każdej składowej osobno:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right], \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

W fizyce słowa **prędkość** (wektor $\vec{v}$) i **szybkość** (liczba $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$) znaczą co innego.

Wektor prędkości zmienia się, gdy ciało przyspiesza, zwalnia *albo* skręca. Wszystkie trzy przypadki to przyspieszenie. FLP I-9-2

2.3 Ruchy w różnych kierunkach są niezależne

Skoro $\vec{F} = m\vec{a}$ to trzy osobne równania, to siła pionowa zmienia tylko pionową składową prędkości. Ciało rzucone poziomo spada więc dokładnie tak samo jak ciało upuszczone. Jego ruch poziomy niczego w tym nie zmienia.



SKĄD TO WIEMY?

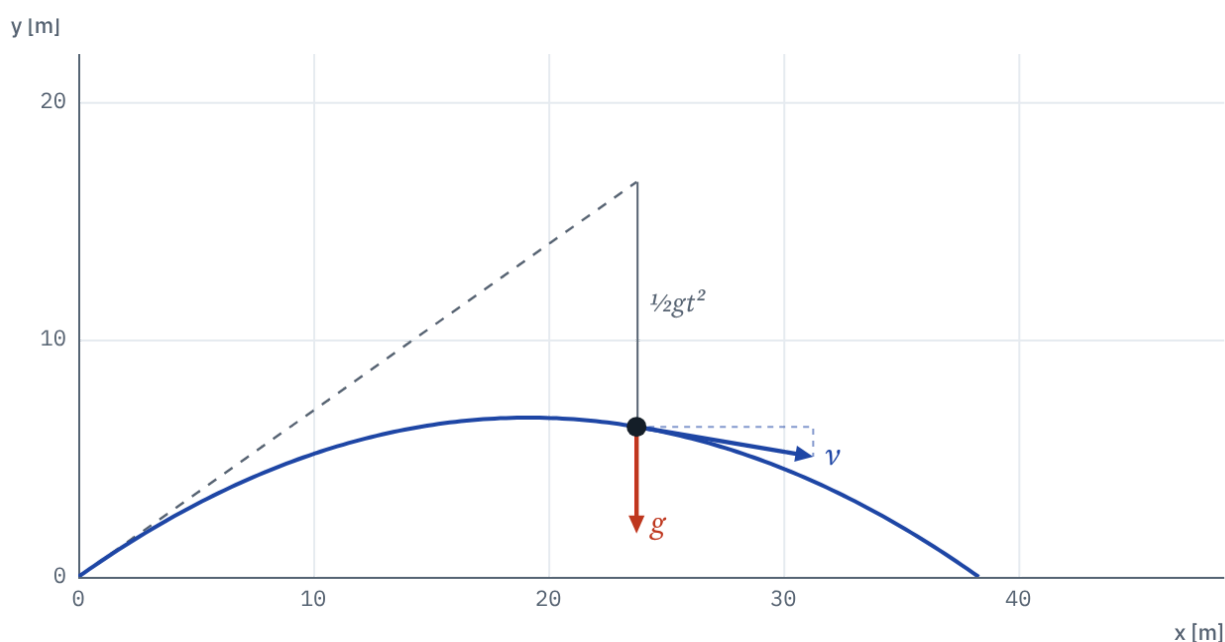
Klasyczny pokaz (Feynman opisuje go w rozdz. 7): sprężynowy mechanizm w tej samej chwili wystrzeliwuje jedną kulę poziomo i puszcza drugą swobodnie. Obie uderzają w podłogę w tym samym momencie. Rozpiętość lotu zależy od prędkości poziomej, a czas lotu tylko od wysokości.

Dla rzutu ukośnego z prędkością początkową v_0 pod kątem α (oś y w górę, start z początku układu):

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Zauważ, jak czyta się drugie równanie. Gdyby nie było grawitacji, ciało leciałoby po prostej. Grawitacja sprawia, że w chwili t jest ono *dokładnie* o $\frac{1}{2}gt^2$ *niżej* niż na tej prostej, niezależnie od kąta i prędkości. Ten obraz, „ruch po prostej plus spadanie”, przyda się za chwilę w ruchu po okręgu i przy Księżycu.

SYMULACJA 3 Rzut ukośny. Niebieska strzałka to prędkość, czerwona to przyspieszenie (zawsze g w dół, także w najwyższym punkcie). Przerywana linia pokazuje lot bez grawitacji, a pionowy odcinek ma zawsze długość $\frac{1}{2}gt^2$.



— prędkość v — przyspieszenie g - - - lot bez grawitacji

T 2,34 s

R 38,3 m

H 6,71 m

t 1,45 s

v_x 16,38 m/s

v_y -2,75 m/s

$\frac{1}{2}gt^2$ 10,31 m

Stan na rysunku: $v_0 = 20,0$ m/s, $\alpha = 35^\circ$, $t = 1,45$ s (jak w przykładzie 1.2).

Czas lotu (powrót do $y = 0$): $T = 2v_0 \sin \alpha / g$. Zasięg: $R = v_0 \cos \alpha \cdot T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, największy dla $\alpha = 45^\circ$. Kąty α i $90^\circ - \alpha$ dają ten sam zasięg, bo $\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha)$. Sprawdź to w symulacji dla 30° i 60° .

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

6 zadań · ok. 50 min

- 1 Jaś opisuje przesunięcie klocka po stole wektorem $\vec{s} = [3, 4]$ m. Osie Małgosi są obrócone o 30° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, więc jej wersory zapisane w osiach Jasia to $\hat{e}'_x = [\cos 30^\circ, \sin 30^\circ]$ i $\hat{e}'_y = [-\sin 30^\circ, \cos 30^\circ]$. Oblicz składowe przesunięcia u Małgosi jako iloczyny skalarne $s'_x = \vec{s} \cdot \hat{e}'_x$ i $s'_y = \vec{s} \cdot \hat{e}'_y$. Sprawdź, że długość wektora jest u obojga taka sama.
- 2 Położenie ciała opisuje $\vec{r}(t) = [3t, 4t - 5t^2]$ (SI). Wyznacz $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ i szybkość początkową. W której chwili $\vec{v} \perp \vec{a}$? Co się wtedy dzieje z ciałem?
- 3 Kamień rzucono poziomo z prędkością 15 m/s z wysokości 20 m. Po jakim czasie i w jakiej odległości (licząc w poziomie) upadnie? Z jaką prędkością i pod jakim kątem do poziomu uderzy w ziemię?
- 4 Piłkarz kopie piłkę leżącą 60 m od bramki z prędkością 25 m/s pod kątem 40° . Czy piłka przeleci pod poprzeczką, która jest na wysokości 2,44 m? Pomiń opór powietrza.
- 5 Kulomiot wypuszcza kulę na wysokości 1,8 m nad ziemią z prędkością 13 m/s. Oblicz zasięg dla kątów 40° i 45° . Który kąt jest lepszy? Dlaczego optymalny kąt jest tu mniejszy niż 45° ?
- 6 Małpa wisi na gałęzi 15 m nad lufą strzelby, w odległości 30 m w poziomie. Myśliwy celuje prosto w małpę. W chwili strzału małpa puszcza gałąź i spada swobodnie. (a) Pokaż, że pocisk trafi małpę niezależnie od prędkości wylotowej, o ile zdąży przed jej upadkiem. (b) Na jakiej wysokości nad lufą nastąpi trafienie, gdy $v_0 = 50$ m/s? (c) Przy jakiej najmniejszej prędkości pocisk trafi małpę, zanim ta spadnie do poziomu lufy? Pomiń opór powietrza.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

Ruch po okręgu: przyspieszenie bez przyspieszania

Ciało krąży po okręgu o promieniu R ze stałą szybkością v . Szybkość się nie zmienia, ale kierunek prędkości zmienia się bez przerwy, więc ciało *ma* przyspieszenie. Ile ono wynosi i dokąd jest skierowane? Pokażemy dwie drogi do odpowiedzi. Pierwsza pochodzi od Feynmana i jest tą, której użył Newton.

3.1 Droga Feynmana: ile ciało „spada” z prostej

Gdyby nie było siły, ciało poleciałoby po stycznej. W krótkim czasie t przeleciałoby odcinek vt . Okrąg odchodzi od stycznej, więc ciało jest w tym czasie bliżej środka o pewną odległość h . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta o przyprostokątnych R i vt mamy $(R + h)^2 = R^2 + (vt)^2$. Dla małych t wyraz h^2 jest zaniedbywalny, więc: FLP I-7-4

$$2Rh \approx (vt)^2 \implies h \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{R} t^2.$$

Porównaj z $\frac{1}{2}at^2$ z rzutu ukośnego. Ciało w ruchu po okręgu stale „spada” z prostej w stronę środka, z przyspieszeniem

 WYNIK · PRZYSPIESZENIE DOŚRODKOWE

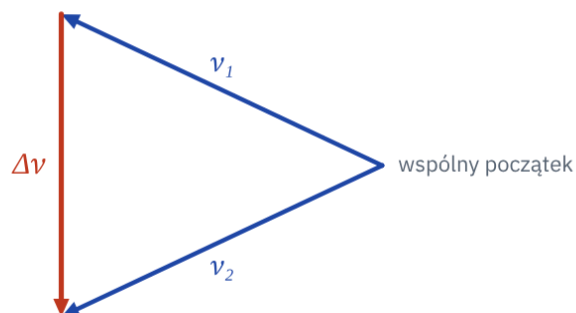
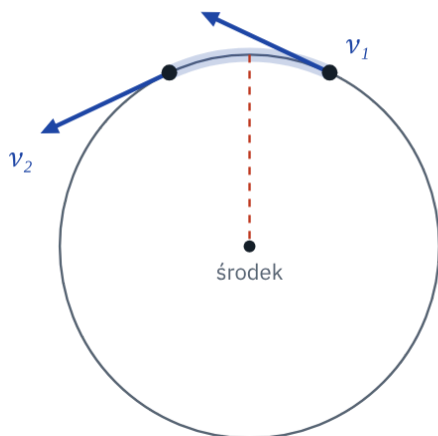
$$a_d = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \quad \text{skierowane do środka okręgu.}$$

3.2 Droga wektorowa: ile zmienia się prędkość

W czasie Δt ciało przesuwa się o kąt $\Delta\theta = v\Delta t/R$, a wektor prędkości obraca się o ten sam kąt. Długość obu wektorów to v , więc wektor różnicy $\Delta\vec{v}$ ma długość $|\Delta\vec{v}| \approx v \Delta\theta$ i dla małego $\Delta\theta$ jest prostopadły do $\vec{v}$, czyli skierowany do środka. Stąd $|\Delta\vec{v}|/\Delta t \approx v \cdot v/R = v^2/R$.

SYMULACJA 4

Przenieś oba wektory prędkości do wspólnego początku. Ich różnica $\Delta \vec{v}$ wskazuje środek okręgu, a $|\Delta \vec{v}|/\Delta t$ dąży do v^2/R , gdy $\Delta t \rightarrow 0$.



R 2 m

v 4 m/s

Δt 0,436 s

$|\Delta v|$ 3,381 m/s

$|\Delta v|/\Delta t$ 7,749 m/s²

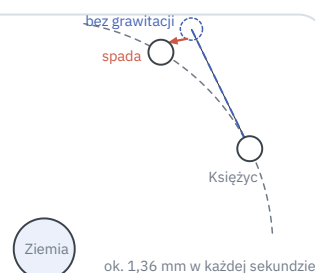
v^2/R 8,000 m/s²

Stan na rysunku: $\Delta \theta = 50^\circ$. Czerwona przerywana linia: kierunek do środka w połowie łuku.

Ogólnie, gdy ciało porusza się po krzywej i jednocześnie zmienia szybkość, przyspieszenie ma dwie składowe: **styczną** dv/dt (zmiana szybkości) i **normalną** v^2/R (zmiana kierunku), gdzie R to lokalny promień krzywizny toru.

SKĄD TO WIEMY? · TEST KSIĘŻYCA

Newton sprawdził prawo grawitacji, licząc, ile Księżyc „spada” w ciągu sekundy. Promień orbity to $3,844 \cdot 10^8$ m, a okres 27,32 doby. Stąd $a = 4\pi^2 R/T^2 \approx 2,72 \cdot 10^{-3}$ m/s². W ciągu sekundy Księżyc odchodzi od prostej o $\frac{1}{2}a \cdot (1 \text{ s})^2 \approx 1,36$ mm. Kamień przy powierzchni Ziemi spada w tym czasie 4,9 m. Stosunek przyspieszeń wynosi $9,81/0,00272 \approx 3600 = 60^2$, a Księżyc jest ok. 60 razy dalej od środka Ziemi niż my. To samo prawo $1/r^2$ opisuje jabłko i Księżyc.



ZADANIA · CZĘŚĆ 3

6 zadań · ok. 45 min

- 1 Ziemia obraca się wokół osi raz na dobę (przyjmij 24 h), a jej promień wynosi 6370 km. Oblicz szybkość i przyspieszenie dośrodkowe punktu na równiku. Jaki to ułamek g ? Powtórz rachunek dla Warszawy (szerokość geograficzna 52°). Dokąd jest skierowane przyspieszenie w Warszawie?
- 2 Bęben pralki o promieniu 25 cm wiruje z prędkością 1200 obr/min. Oblicz prędkość kątową bębna, szybkość punktu na jego ścianie i przyspieszenie dośrodkowe tego punktu. Ile to razy więcej niż g ?
- 3 Ciało krąży po okręgu o promieniu $R = 5$ m ze stałą szybkością $v = 10$ m/s. Oblicz wartość średniego przyspieszenia $|\Delta \vec{v}|/\Delta t$ (a) na ćwierci obrotu, (b) na połowie obrotu, (c) na pełnym obrocie. Porównaj z v^2/R .
- 4 Samochód rusza z miejsca na rondzie o promieniu 30 m i zwiększa szybkość o 1,5 m/s w każdej sekundzie. Po jakim czasie całkowite przyspieszenie osiągnie 3 m/s²? Jaka szybkość ma wtedy samochód i jaki kąt tworzy jego przyspieszenie z prędkością?
- 5 Ciało porusza się po elipsie: $\vec{r}(t) = [A \cos \omega t, B \sin \omega t]$. Wykaż, że $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$. Jaka siła mogłaby wywołać taki ruch? Planety też krążą po elipsach. Czym różni się siła działająca na planetę?
- 6 Zjeżdżalnia w aquaparku ma kształt linii śrubowej o promieniu $R = 3$ m i na każdym pełnym zwoju opada o $h = 2,5$ m. Pływak zjeżdża ze stałą szybkością 5 m/s. Oblicz wartość i kierunek jego przyspieszenia oraz promień krzywizny toru. Dlaczego przyspieszenie jest mniejsze niż v^2/R ?

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

4 Trzy zasady dynamiki

Do tej pory tylko *opisywaliśmy* ruch. Teraz pytamy, co go zmienia. Feynman podkreśla, że przed Newtonem ruch planet był zagadką, a po Newtonie dało się policzyć nawet to, jak Jowisz i Saturn zaburzają ruch Urana. FLP I-9-1

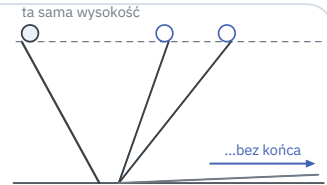
4.1 Pierwsza zasada: bezwładność

Ciało pozostawione samo sobie porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym albo spoczywa. W codziennym doświadczeniu tak to nie wygląda: pchnięty klocek się zatrzymuje.

Galileusz potrzebował wyobraźni, żeby zobaczyć, że klocek nie jest „pozostawiony sam sobie”, bo ociera się o stół.

SKĄD TO WIEMY?

Myślowy eksperyment Galileusza: kula stacza się z jednej równi i wtacza na drugą, prawie do tej samej wysokości, z której ruszyła. Im łagodniejsza druga równia, tym dalej kula musi się toczyć, żeby osiągnąć tę wysokość. Gdy druga równia staje się pozioma, kula nigdy tej wysokości nie osiągnie, więc powinna toczyć się bez końca. Im lepiej usuwamy tarcie (lód, poduszka powietrzna, próżnia kosmiczna), tym lepiej to widać.



Pierwsza zasada mówi też coś o tym, *skąd* patrzymy. Układy odniesienia, w których swobodne ciała poruszają się jednostajnie, nazywamy **inercjalnymi**. Pozostałe zasady obowiązują w tej prostej postaci właśnie w nich. Hamujący autobus nie jest układem inercjalnym, a „siłą”, która rzuca cię do przodu, zajmiemy się w dziale 7.

4.2 Druga zasada: zmiana pędu

Newton sformułował ją za pomocą pędu $\vec{p} = m\vec{v}$:

PRAWO · II ZASADA DYNAMIKI

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \stackrel{m=\text{const}}{=} m\vec{a}$$

W składowych to trzy niezależne równania: $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, $F_z = ma_z$. Po lewej stronie stoi *wypadkowa* wszystkich sił działających na ciało.

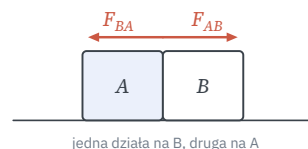
Trzy uwagi, które Feynman robi i które warto zapamiętać:

1. **Masa to miara bezwładności, a nie ciężar.** Masa mówi, jak trudno zmienić ruch ciała, a ciężar to siła, którą przyciąga je Ziemia. Na Marsie ten sam kamień waży ok. 2,6 raza mniej, ale tak samo trudno go rozpędzić. To, że ciężar i masa są do siebie proporcjonalne, to fakt doświadczalny, a nie definicja. Za tym faktem kryje się coś głębokiego, do czego wrócimy przy teorii względności.
2. **Przyspieszenie ma kierunek siły, a nie kierunek prędkości.** Siła prostopadła do prędkości nie zmienia szybkości, tylko zakrzywia tor. Tak działa ruch po okręgu.
3. **Wersja $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ jest ogólniejsza.** W teorii względności pęd rośnie z prędkością szybciej niż $m\vec{v}$ (dokładnie $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$). Wtedy $m\vec{a}$ przestaje się zgadzać, a $d\vec{p}/dt$ działa nadal. Feynman mówi

tu o „masie rosnącej z prędkością”. To ten sam fakt w starszym języku.

4.3 Trzecia zasada: akcja i reakcja

Jeśli ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{AB}$, to B działa na A siłą $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$. Te dwie siły działają na różne ciała, więc nigdy się nie znoszą w równaniu ruchu jednego ciała. Dodane dla całego układu dają za to ważny wynik: siły wewnętrzne sumują się do zera, więc całkowity pęd układu zmieniają tylko siły zewnętrzne. Jeśli ich nie ma, pęd jest zachowany. To temat działu 3. (FLP I-10-1)



Feynman dodaje uczciwie, że trzecia zasada *nie jest ściśle prawdziwa*. (FLP I-12-1) Dla poruszających się ładunków siły magnetyczne, z jakimi działają na siebie nawzajem, nie są równe i przeciwne. Zasada zachowania pędu przetrwa, ale tylko jeśli przypiszemy pęd także samemu polu elektromagnetycznemu. Dla klocków, nici i bloczków trzecia zasada jest doskonała.

4.4 Siły się dodają

Wypadkowa sił to ich suma wektorowa. Wydaje się to oczywiste, ale to również fakt doświadczalny, nazywany zasadą superpozycji. Dzięki niemu każdą siłę możemy rozłożyć na składowe wzdłuż wygodnych osi i pisać osobne równania dla każdej z nich.

5 Czym właściwie jest siła?

To najważniejsza część tego działu, bo większość studentów tego nie słyszy. Jeśli zdefiniujemy siłę jako „masę razy przyspieszenie”, to $F = ma$ staje się tautologią i niczego nie przewiduje.

Feynman wyśmiewa to tak: wymyślmy nową wielkość, „gorcę” (ang. *gorce*), jako tempo zmiany położenia. Mamy teraz cudowne prawo: wszystko stoi w miejscu, chyba że działa na to gorca. Prawo jest zawsze prawdziwe i niczego nie mówi. (FLP I-12-1)

Prawdziwa treść praw Newtona tkwi w tym, że siły mają **własności niezależne od $F = ma$** :

Jedną z najważniejszych cech siły jest to, że ma ona materialne pochodzenie — i nie jest to tylko definicja.

R. Feynman, FLP I-12-1 (tłum. własne)

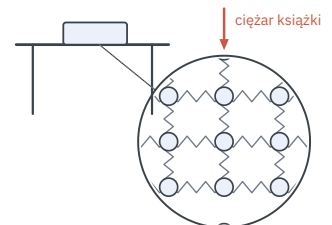
Jeśli widzisz przyspieszenie, szukaj ciała, które je powoduje. Druga zasada jest w tym sensie *programem badawczym*: obiecuje, że gdy zmierzymy $m\vec{a}$ i nazwiemy to siłą, okaże się, że siły podlegają prostym prawom. I tak właśnie jest:

Siła	Prawo	Status	Kiedy zawodzi
Grawitacja	$F = \frac{GMm}{r^2}$; przy powierzchni $F = mg$, $g = GM/R_Z^2$	fundamentalna	silne pola, duże prędkości (ogólna teoria względności)
Sprężystość	$F = -kx$ (prawo Hooke'a)	empiryczna	duże odkształcenia, granica sprężystości
Reakcja podłoża N , naciąg nici N_n	brak wzoru: tyle, ile trzeba, żeby spełnić więzy	siła więzów	gdy potrzebna siła przekracza wytrzymałość (nić pęka, lód się łamie)
Tarcie	statyczne $T_s \leq \mu_s N$, kinetyczne $T_k = \mu_k N$	empiryczna	bardzo gładkie lub czyste powierzchnie, duże prędkości
Opór ośrodka	$F \propto v$ (wolno) lub $F \propto v^2$ (szybko)	empiryczna	przejście między reżimami, turbulencja

5.1 Siły więzów: reakcja i naciąg

Książka leży na stole i nie spada, więc stół działa na nią siłą N w górę. Skąd stół „wie”, jak mocno pchać? Wracamy do zdania o atomach. Ciężar książki minimalnie wciska atomy blatu w siebie. Odpychają się one tym silniej, im mocniej je ściśnięto, aż siła odpychania zrówna się z tym, co trzeba zrównoważyć. Stół działa jak bardzo sztywna sprężyna. Ugięcie jest niewidoczne, ale prawdziwe.

FLP I-12-3

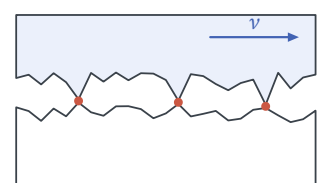


atomy blatu ściśnięte o ułamek nanometra

W zadaniach nie liczymy tego ugięcia. Siła reakcji ma *taką wartość, jaka jest potrzebna, żeby ciało nie wniknęło w podłoże*. Tak samo nić napina się tak, żeby nie zmieniła długości. Takie siły nazywamy **siłami więzów**, a ich wartość wynika z równań ruchu, nie z osobnego wzoru. Dlatego $N = mg$ jest prawdą tylko w szczególnym przypadku (zob. Błędne intuicje).

5.2 Tarcie: pożyteczna reguła, a nie prawo przyrody

Wzór $T = \mu N$ to przybliżenie empiryczne. Współczynnik μ zależy od materiałów, czystości powierzchni i wilgoci, a od prędkości zależy słabo. Nie da się go wyliczyć z teorii, trzeba go zmierzyć. Feynman opisuje doświadczenia, w których powierzchnie oczyszczone w próżni skleja się ze sobą (spawanie na zimno). „Tarcie” to w gruncie



czerwone: chwilowe „spawy” atomów

rzeczy wiązania tworzące się i zrywane między atomami dwóch powierzchni. FLP I-12-2

Warto zapamiętać jedną rzecz o tarciu **statycznym**: tak jak reakcja, ma ono taką wartość, jaka jest potrzebna, żeby nie było poślizgu, tylko *nie większą* niż $\mu_s N$. Kłosek leżący na płaskim stole bez żadnej siły poziomej doznaje tarcia równego zero, a nie $\mu_s mg$.

5.3 Wszystkie siły kontaktowe są elektryczne

Reakcja, naciąg, tarcie, sprężystość, opór powietrza: każda z tych sił to w gruncie rzeczy elektryczne oddziaływanie między atomami. W przyrodzie znamy tylko cztery oddziaływania podstawowe: grawitacyjne, elektromagnetyczne, silne jądrowe i słabe. W mechanice inżynierskiej odczuwamy dwa pierwsze. Prawo grawitacji jest fundamentalne i bardzo dokładne. Prawa sił kontaktowych są użytecznymi, przybliżonymi podsumowaniami ogromnej liczby zderzeń atomów. FLP I-12-4

ZADANIA · CZĘŚCI 4-5

8 zadań · ok. 70 min

- 1 Skrzynia o masie 50 kg stoi na podłodze. Współczynniki tarcia wynoszą $\mu_s = 0,4$ i $\mu_k = 0,3$. Pchamy ją poziomo siłą (a) 150 N, (b) 250 N. Ile wynosi siła tarcia i przyspieszenie skrzyni w każdym przypadku?
- 2 Książkę o masie 1 kg dociskamy poziomo do pionowej ściany. Współczynnik tarcia statycznego wynosi $\mu_s = 0,5$. (a) Jaka najmniejsza siła docisku utrzyma książkę w spoczynku? (b) Dociskamy siłą 40 N. Ile wynosi teraz siła tarcia?
- 3 Dwa stykające się klocki, $m_1 = 2$ kg i $m_2 = 3$ kg, leżą na gładkim stole. Pchamy klocek m_1 poziomo siłą 10 N. (a) Oblicz przyspieszenie i siłę, z jaką m_1 pcha m_2 . (b) Czym jest siła, z jaką m_2 działa na m_1 ? (c) Ile wyniesie siła między klockami, gdy tą samą siłą popchniemy od drugiej strony klocek m_2 ?
- 4 Sanki o masie 20 kg ciągniemy po śniegu ($\mu_k = 0,1$) siłą skierowaną pod kątem 30° do poziomu. (a) Jaka siła zapewni ruch jednostajny? (b) Porównaj ją z siłą potrzebną przy ciągnięciu poziomym. Czy ciągnięcie pod kątem się tu opłaca? (c) Przy jakim kącie potrzebna siła jest najmniejsza?
- 5 Klocek $m_1 = 4$ kg leży na poziomym stole ($\mu_s = \mu_k = 0,25$). Nić biegnie od niego przez nieważki bloczek na krawędzi stołu do wiszącego ciężarka $m_2 = 2$ kg. Oblicz przyspieszenie układu i naciąg nici N_n . Jaka najmniejsza masa m_2 wprowadzi układ w ruch?

- 6 Kłosek wepchnięto w górę równi o kącie 30° z prędkością 6 m/s . Współczynniki tarcia wynoszą $\mu_s = \mu_k = 0,2$. (a) Jak daleko wjedzie? (b) Czy potem zjedzie, a jeśli tak, to z jakim przyspieszeniem? (c) Z jaką prędkością wróci do punktu startu?
- 7 Pod jakim kątem należy wyprofilować zakręt o promieniu 100 m , żeby samochód jadący 72 km/h nie potrzebował tarcia? Ile wynosi wtedy siła reakcji jezdnii działająca na auto o masie 1200 kg ? Porównaj ją z ciężarem auta.
- 8 Człowiek o masie 70 kg siedzi na krześle o masie 10 kg . Krzesło wisi na linie przerzuconej przez błocek u sufitu, a człowiek sam ciągnie drugi koniec liny. (a) Z jaką siłą musi ciągnąć, żeby unosić się ze stałą prędkością? (b) A żeby unosić się z przyspieszeniem 1 m/s^2 ? (c) Z jaką siłą naciska wtedy na krzesło?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

6 Jak z $F = ma$ powstaje ruch

Tu kryje się sedno mechaniki. Feynman pokazuje je bez rozwiązywania żadnego równania różniczkowego, za pomocą kartki i ołówka. (FLP I-9-5, 9-6)

6.1 Stan i mały krok w przyszłość

Weźmy ciało na sprężynie: $F = -kx$. Dla wygody wybierzmy jednostki, w których $k/m = 1$, więc $a = -x$. Załóżmy, że w chwili t znamy położenie x i prędkość v . Co będzie w chwili $t + \varepsilon$, gdy ε jest małe?

$$x(t + \varepsilon) \approx x(t) + v(t)\varepsilon \quad (\text{kinematyka})$$

$$v(t + \varepsilon) \approx v(t) + a(t)\varepsilon, \quad a(t) = -x(t) \quad (\text{dynamika})$$

Pierwsza linijka to sama definicja prędkości. W drugiej pracuje prawo Newtona, bo to ono mówi, ile wynosi przyspieszenie *właśnie w tym położeniu*. Mając nowe x i v , powtarzamy krok i tak bez końca.

Prędkość zmienia się troszkę z powodu siły, a położenie zmienia się troszkę z powodu prędkości.

R. Feynman, FLP I-9-5 (tłum. własne)

Para (x, v) to **stan** układu. Z niego i z prawa siły wynika cała przyszłość. To właśnie jest determinizm mechaniki klasycznej i jednocześnie przepis na każdą symulację fizyczną: od gier komputerowych po prognozę pogody.

6.2 Sztuczka Feynmana: prędkość z połowy kroku

Ze zwykłym przepisem jest kłopot. Do przesunięcia używamy prędkości z *początku* kroku, choć przez cały krok ona się zmienia. Feynman proponuje „subtelne ulepszenie”: brać prędkość ze środka przedziału. Wartości prędkości liczymy więc w chwilach $t \pm \varepsilon/2$, a położenia w chwilach t :



$$x(t + \varepsilon) = x(t) + \varepsilon v(t + \frac{\varepsilon}{2}), \quad v(t + \frac{3\varepsilon}{2}) = v(t + \frac{\varepsilon}{2}) + \varepsilon a(t + \varepsilon).$$

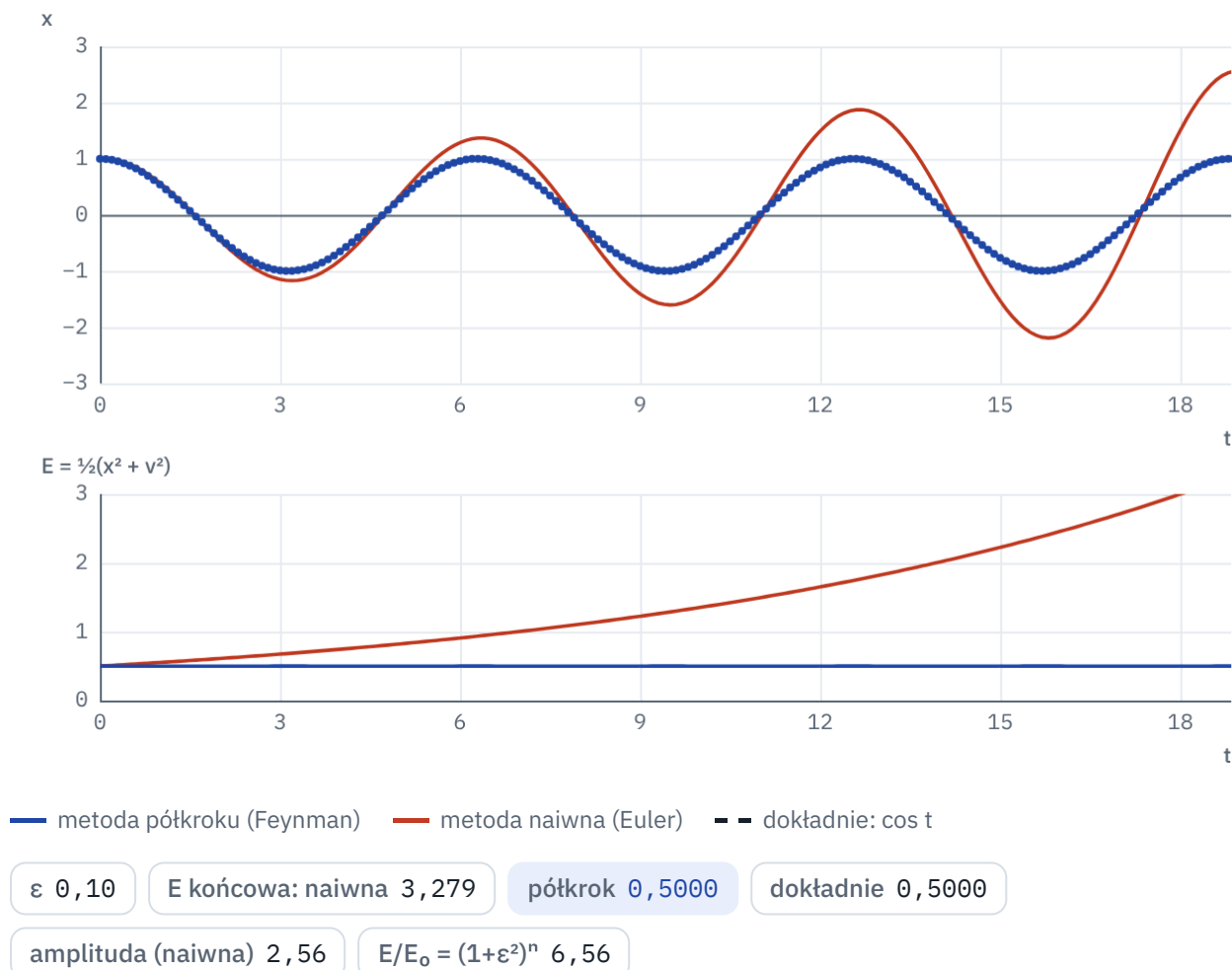
Na start potrzebna jest prędkość po pół kroku: $v(\varepsilon/2) = v(0) + \frac{\varepsilon}{2}a(0)$. Ta metoda nosi dziś nazwę **leapfrog** (żabi skok). Już przy kroku $\varepsilon = 0,1$ daje w pokazanym zakresie wyniki zgodne z dokładnym $x = \cos t$ z dokładnością do ok. 10^{-4} :

Rozwiązanie $dv/dt = -x$, $x(0) = 1$, $v(0) = 0$, krok $\varepsilon = 0,1$ (por. tabela 9-1 u Feynmana)

t	x (półkrok)	$\cos t$ (dokładnie)	v w chwili $t - \varepsilon/2$
0,0	1,0000	1,0000	—
0,1	0,9950	0,9950	-0,0500
0,2	0,9800	0,9801	-0,1495
0,3	0,9553	0,9553	-0,2475
0,4	0,9210	0,9211	-0,3430
0,5	0,8775	0,8776	-0,4351

SYMULACJA 5

Ten sam rachunek w pętli. Porównaj metodę naiwną z metodą półkroku i zmieniaj ε . Dolny wykres pokazuje energię $E = \frac{1}{2}(x^2 + v^2)$, która powinna być stała.



Stan na rysunku: $\varepsilon = 0,10$, czas 0... 6π (trzy okresy). Wartości spoza zakresu osi są ucięte.

Symulacja pokazuje coś, czego nie widać w pierwszych wierszach tabeli. Metoda naiwna sama z siebie pompuje energię do układu, w każdym kroku dokładnie o czynnik $(1 + \varepsilon^2)$, i drgania rosną. Metoda półkroku utrzymuje energię w wąskim paśmie przez dowolnie długi czas. Wybór algorytmu to część fizyki, a nie tylko informatyki.

6.3 Ta sama maszyna liczy orbitę planety

Zamieńmy sprężynę na Słońce. Siła jest skierowana do początku układu i ma wartość GMm/r^2 . W jednostkach, w których $GM = 1$, składowe przyspieszenia wynoszą

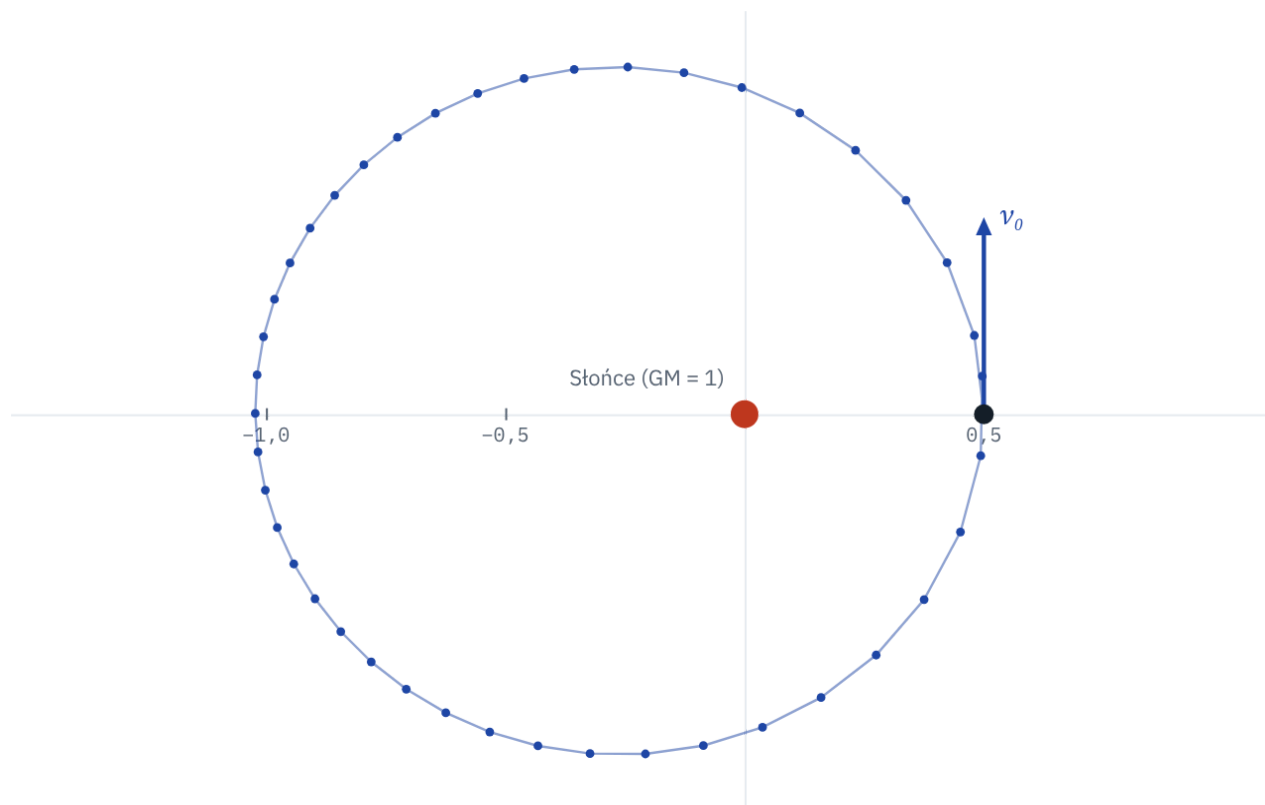
$$a_x = -\frac{x}{r^3}, \quad a_y = -\frac{y}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Feynman bierze stan początkowy $x = 0,5$, $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 1,63$ i krok $\varepsilon = 0,1$. Po ok. 20 krokach rachunku ręcznego ma pół orbity, a jej kształt odpowiada elipsie. Nikt nie wpisał w ten rachunek

pierwszego prawa Keplera. Wynikło ono samo z $\vec{F} = m\vec{a}$ i z prawa $1/r^2$. FLP I-9-7

SYMULACJA 6 Orbita liczona metodą półkroku, punkt po punkcie, jak u Feynmana.

Zmień prędkość początkową: przy $v_y = \sqrt{GM/r} = \sqrt{2} \approx 1,41$ orbita jest okręgiem, a przy $v_y \geq \sqrt{2GM/r} = 2$ planeta ucieka i już nie wraca.



v_0 1,63

energia E -0,672

peryhelium 0,500

aphelium 1,022

mimośród 0,343

okres (rachunek) 4,152

Kepler: $2\pi \cdot a^{1,5}$ 4,037

Stan na rysunku: $x_0 = 0,5$, $y_0 = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 1,63$, $\epsilon = 0,10$ – warunki z FLP I-9-7. Każda kropka to jeden krok rachunku.

6.4 Kiedy da się rozwiązać „na papierze”

Dla sprężyny zgadujemy $x = \cos t$ i sprawdzamy: $\dot{x} = -\sin t$, $\ddot{x} = -\cos t = -x$. Zgadza się. W ogólnych jednostkach rozwiązaniem $m\ddot{x} = -kx$ jest $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ z $\omega = \sqrt{k/m}$. Szczegóły w dziale 6. Rozwiązań analitycznych jest jednak niewiele. Metoda kroków działa zawsze i to ona jest prawdziwym sensem drugiej zasady.

 **ZADANIA · CZĘŚĆ 6**

6 zadań · ok. 60 min

- 1 Kamień spada swobodnie z prędkością początkową zero. Zrób ręcznie trzy kroki o długości $\varepsilon = 0,5$ s (a) metodą naiwną: $x_{n+1} = x_n + v_n \varepsilon$, $v_{n+1} = v_n + g \varepsilon$; (b) metodą półkroku z części 6.2. Porównaj położenia z dokładnym $x = \frac{1}{2}gt^2$. Dlaczego jedna z metod jest tu dokładna?

- 2 Rozwiąż ręcznie równanie $dv/dt = -x$ z warunkami $x(0) = 1$, $v(0) = 0$ (jednostki z części 6.1) metodą półkroku z dużym krokiem $\varepsilon = 0,5$. Zrób trzy kroki i porównaj $x(1,5)$ z dokładnym $\cos 1,5$. Dla porównania zrób też trzy kroki metodą naiwną.

- 3 Silnik modelu rakiety daje przyspieszenie $a(t) = 10 - 2t$ (m/s²) przez 5 s. Rakieta startuje z miejsca, grawitację pomijamy. (a) Kiedy prędkość jest największa i ile wynosi? Jaką drogę rakieta przebywa w tym czasie? (b) Kolega bierze średnie przyspieszenie 5 m/s² i wzory dla ruchu jednostajnie przyspieszonego. Co otrzymuje? Dlaczego prędkość wychodzi mu dobrze, a droga źle?

- 4 Ślizgacz po wyłączeniu napędu hamuje wyłącznie oporem wody proporcjonalnym do prędkości: $dv/dt = -v/\tau$, gdzie $\tau = 2$ s, a $v_0 = 10$ m/s. (a) Wyznacz $v(t)$, $x(t)$ i całkowitą drogę. (b) Ile wyszłoby ze wzorów dla stałego opóźnienia, gdyby przyjąć opóźnienie z chwili wyłączenia silnika? (c) Po jakim czasie ślizgacz się zatrzyma?

- 5 Piłkę do koszykówki puszczone swobodnie z dużej wysokości. Z oporem powietrza jej przyspieszenie wynosi $a = g(1 - v^2/v_{gr}^2)$, gdzie prędkość graniczna $v_{gr} = 20$ m/s. (a) Skąd się bierze ten wzór? (b) Zrób cztery kroki $v_{n+1} = v_n + a(v_n) \varepsilon$ z $\varepsilon = 0,5$ s i podaj prędkość po 2 s. (c) Porównaj wynik z prędkością bez oporu i z wynikiem dokładnym $v = v_{gr} \tanh(gt/v_{gr}) \approx 15,1$ m/s. Dlaczego metoda kroków daje za dużo?

- 6 Powtórz początek rachunku Feynmana z części 6.3. W jednostkach, w których $GM = 1$, planeta startuje z punktu $x = 0,5$, $y = 0$ z prędkościami $v_x = 0$, $v_y = 1,63$. Zrób dwa kroki metodą półkroku z $\varepsilon = 0,1$. Podaj położenie w chwili $t = 0,2$ i odległość od Słońca. Czy planeta się oddala, czy zbliża? Uzasadnij to bez liczenia, porównując v_y z prędkością na orbicie kołowej.

■■■ podstawowe
 ■■■ średnie
 ■■■■ feynmanowskie

☰ METODA NA KAŻDE ZADANIE Z DYNAMIKI

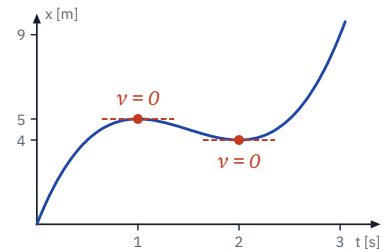
1. **Oszacuj.** Zanim zaczniesz liczyć, zgadnij rząd wielkości wyniku. Na koniec to szacowanie będzie twoim sprawdzianem.
2. **Rysunek i wybór ciała.** Każde ciało rozpatrujesz osobno.
3. **Wszystkie siły** na każde ciało. Każda siła musi mieć sprawcę (materialne pochodzenie!). „Siły bezwładności” w układzie inercyjnym nie istnieją.
4. **Osie,** najlepiej wzdłuż ruchu i prostopadle do niego.
5. **II zasada w składowych** dla każdego ciała i każdej osi.
6. **Więzy:** nierozciągliwa nić, brak poślizgu, ruch po okręgu ($a = v^2/R$).
7. **Rozwiązanie na symbolach,** liczby dopiero na końcu.
8. **Sprawdzenie:** jednostki, przypadki graniczne, porównanie z oszacowaniem.

Przykład 1.1

Ruch z wzoru: kiedy ciało stoi?

Położenie ciała na prostej opisuje $x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ (metry, sekundy). Kiedy ciało się zatrzymuje? Jakie jest jego przyspieszenie w tych chwilach? Jaką drogę przebywa w czasie od 0 do 3 s, a jakie jest przemieszczenie?

- 1 Prędkość: $v = \dot{x} = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2)$. Ciało stoi, gdy $v = 0$, czyli w chwilach $t = 1$ s i $t = 2$ s.
- 2 Przyspieszenie: $a = \dot{v} = 12t - 18$. Dla $t = 1$: $a = -6 \text{ m/s}^2$, dla $t = 2$: $a = +6 \text{ m/s}^2$. W chwili zatrzymania ciało ma niezerowe przyspieszenie, czyli zawraca.
- 3 Położenia: $x(0) = 0$, $x(1) = 5$, $x(2) = 4$, $x(3) = 9$ m. Między 0 a 1 s ciało jedzie do przodu, między 1 a 2 s cofa się, potem znów jedzie do przodu.
- 4 Droga to suma długości odcinków: $5 + 1 + 5 = 11$ m. Przemieszczenie: $x(3) - x(0) = 9$ m.



Wykres $x(t)$: dwa punkty zawrócenia

Wynik: zatrzymania w $t = 1$ s i $t = 2$ s ($a = \mp 6 \text{ m/s}^2$); droga 11 m, przemieszczenie 9 m.

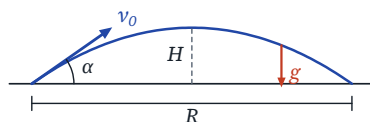
Sprawdzenie: droga to $\int_0^3 |v| dt$, a przemieszczenie to $\int_0^3 v dt$. Różnią się dokładnie o dwukrotność odcinka „do tyłu”: $11 - 9 = 2 \cdot 1 \checkmark$

Przykład 1.2

Rzut ukośny piłki

Piłkę kopnięto z ziemi z prędkością $v_0 = 20 \text{ m/s}$ pod kątem $\alpha = 35^\circ$. Oblicz czas lotu, zasięg i największą wysokość. Pomijamy opór powietrza.

- 1 Oszacowanie: przy 45° zasięg wynosiłby $v_0^2/g \approx 41 \text{ m}$. Przy 35° będzie trochę mniej.
- 2 Składowe: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 16,38 \text{ m/s}$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 11,47 \text{ m/s}$.
- 3 Czas lotu z $y(T) = 0$: $T = 2v_{0y}/g = 2,339 \text{ s}$.
- 4 Zasięg: $R = v_{0x}T = v_0^2 \sin 2\alpha/g = 38,3 \text{ m}$.
- 5 Wysokość: w szczycie $v_y = 0$, więc z $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gH$ dostajemy $H = v_{0y}^2/(2g) = 6,71 \text{ m}$.



Oznaczenia w rzucie ukośnym

Wynik: $T \approx 2,34 \text{ s}$, $R \approx 38,3 \text{ m}$, $H \approx 6,71 \text{ m}$.

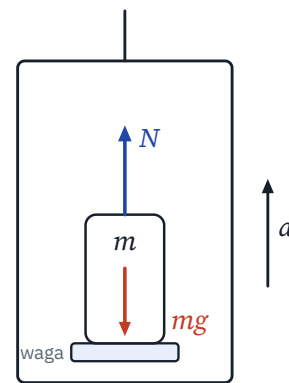
Sprawdzenie: zasięg nieco mniejszy niż przy 45° ✓. Kąt $55^\circ = 90^\circ - 35^\circ$ dałby ten sam zasięg ($\sin 70^\circ = \sin 110^\circ$), ale wyższy lot ($H \propto \sin^2 \alpha$) ✓. Prawdziwa piłka przez opór powietrza poleci krócej, nawet o kilkanaście procent.

Przykład 1.3

Waga łazienkowa w windzie

Osoba o masie 70 kg stoi na wadze w windzie, która rusza w górę z przyspieszeniem 2 m/s^2 . Co pokazuje waga? A co pokaże, gdy winda hamuje, jadąc w górę, z opóźnieniem 2 m/s^2 ? A gdy lina pęknie?

- 1 Siły na osobę: ciężar mg w dół i reakcja wagi N w górę. Waga mierzy N , a nie ciężar. Wyświetla N/g w kilogramach.
- 2 Oś w górę, II zasada: $N - mg = ma$, więc $N = m(g + a)$.
- 3 Ruszanie w górę, $a = +2$: $N = 70 \cdot 11,81 = 826,7 \text{ N}$. Waga pokazuje $826,7/9,81 = 84,3 \text{ kg}$.
- 4 Hamowanie podczas jazdy w górę, $a = -2$: $N = 70 \cdot 7,81 = 546,7 \text{ N}$, czyli $55,7 \text{ kg}$.
- 5 Spadek swobodny, $a = -g$: $N = 0$. Waga pokazuje zero.



Siły działające na osobę

Wynik: 84,3 kg, 55,7 kg i 0 kg. Ciężar przez cały czas wynosi $mg = 686,7 \text{ N}$.

Sprawdzenie: dla $a = 0$ dostajemy $N = mg$ ✓. Astronauta na orbicie jest w stanie „nieważkości” z tego samego powodu co ostatni pasażer: on i stacja spadają razem ✓

Przykład 1.4

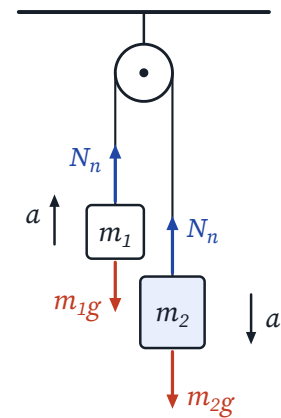
Maszyna Atwooda: najpierw symbole

Dwa ciężarki $m_1 = 1,0 \text{ kg}$ i $m_2 = 1,5 \text{ kg}$ wiszą na nici przełożonej przez nieważki bloczek bez tarcia. Oblicz przyspieszenie układu i naciąg nici N_n .

- 1 Cięższy m_2 opada, m_1 się podnosi. Dla każdego ciała oś wzdułuż jego ruchu.
- 2 m_2 : $m_2 a = m_2 g - N_n$. m_1 : $m_1 a = N_n - m_1 g$.
- 3 Dodajemy stronami (naciąg się znosi): $(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$, więc

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}, \quad N_n = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

- 4 Liczby: $a = 9,81 \cdot 0,5/2,5 = 1,96 \text{ m/s}^2$, $N_n = 2 \cdot 1,5 \cdot 9,81/2,5 = 11,77 \text{ N}$.



Sily na každy ciężarek

Wynik: $a \approx 1,96 \text{ m/s}^2$, $N_n \approx 11,8 \text{ N}$.

Sprawdzenie przypadków granicznych (właśnie dlatego liczymy na symbolach):

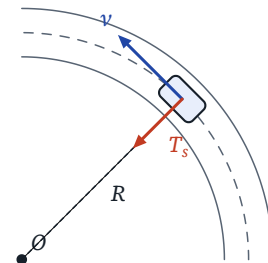
$m_1 = m_2$ daje $a = 0$ i $N_n = mg \checkmark$. $m_1 \rightarrow 0$ daje $a \rightarrow g$ (swobodny spadek) i $N_n \rightarrow 0 \checkmark$. Naciąg leży między ciężarami: $9,81 < 11,77 < 14,72 \text{ N} \checkmark$. Atwood opisał tę maszynę w 1784 r. Służyła do „spowolnienia” spadania, żeby dało się dokładnie sprawdzić prawa ruchu jednostajnie przyspieszonego. To ta sama idea co równia Galileusza.

Przykład 1.5

Samochód na płaskim zakręcie

Z jaką największą prędkością samochód może przejechać płaski zakręt o promieniu $R = 50\text{ m}$ na suchym asfalcie ($\mu_s = 0,8$)? A na mokrym ($\mu_s = 0,4$)?

- 1 Siły: ciężar mg , reakcja N i tarcie. Która siła zakrzywia tor? Tylko tarcie może działać poziomo, w stronę środka zakrętu.
- 2 Dlaczego *statyczne*? Toczące się koło nie ślizga się po asfalcie. Punkt styku opony z drogą jest chwilowo nieruchomy.
- 3 Pion: $N = mg$ (tu to prawda, bo innych sił pionowych nie ma). Poziom: $mv^2/R = T_s \leq \mu_s mg$.
- 4 Stąd $v_{\max} = \sqrt{\mu_s g R}$. Sucho: $\sqrt{0,8 \cdot 9,81 \cdot 50} = 19,8\text{ m/s} \approx 71\text{ km/h}$. Mokra: $14,0\text{ m/s} \approx 50\text{ km/h}$.



Widok z góry

Wynik: 71 km/h na sucho i 50 km/h na mokro.

Sprawdzenie: masa się skróciła, więc ciężarówka i rower mają tę samą granicę (przy tym samym μ) ✓. Dwa razy mniejsze μ obniża $v_{\max}$ tylko o czynnik $\sqrt{2}$, a nie dwukrotnie. To dobra lekcja o tym, jak wzory „chowają” zależności.

Przykład 1.6

Skok do wody: szacowanie po feynmanowsku

Skoczek (70 kg) spada z 10-metrowej wieży i wyhamowuje w wodzie na drodze ok. 2 m. Jak dużą średnią siłą działa na niego woda?

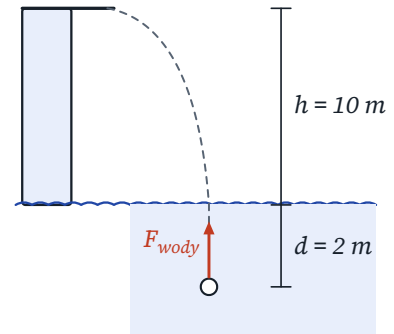
- 1 Prędkość przy wejściu do wody (spadek swobodny):

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 10} = 14,0 \text{ m/s, czyli ok. 50 km/h.}$$

- 2 Średnie opóźnienie przy hamowaniu na drodze d : z

$$0 = v^2 - 2ad \text{ wynika } a = v^2/(2d) = 196/4 = 49 \text{ m/s}^2 \approx 5g.$$

- 3 II zasada (oś w górę): $F_{\text{wody}} - mg = ma$, więc $F_{\text{wody}} = m(a + g) = 70 \cdot 58,9 \approx 4,1 \text{ kN}$.



Wysokość skoku i droga hamowania

Wynik: ok. 4 kN, czyli mniej więcej sześciokrotność ciężaru skoczka.

Sprawdzenie i lekcja: zauważ elegancki skrót: $a/g = h/d = 10/2 = 5$, więc $F = mg(1 + h/d)$. Nadwyżka siły ponad ciężar, $F - mg$, jest odwrotnie proporcjonalna do drogi hamowania. Dlatego skoczkowie wchodzi do wody „szpicem” (dłuższa droga hamowania), a strefy zgniotu w samochodach są celowo miękkie ✓

8

Błędne intuicje, które trzeba oduczyć

Każda z tych intuicji jest naturalna i każda jest błędna. Najbardziej uparta jest pierwsza: Arystoteles uczył jej przez prawie dwa tysiące lat.

× „Ruch wymaga siły; gdy siła znika, ciało staje.”

Siła nie podtrzymuje ruchu, tylko go *zmienia*. Ciało staje, bo działa na nie tarcie, czyli siła. Przy stałej prędkości siły się równoważą, ale wcale nie muszą być zerowe.

× „Przyspieszenie ma kierunek prędkości.”

Ma kierunek wypadkowej siły. W ruchu po okręgu jest prostopadłe do prędkości, a w szczycie rzutu pionowego prędkość jest zerowa, a przyspieszenie wynosi g .

× „Reakcja podłoża zawsze wynosi mg .”

Tylko na poziomej powierzchni, gdy nie działają inne siły pionowe i nie ma przyspieszenia w pionie. Na równi $N = mg \cos \alpha$, w windzie $N = m(g + a)$, a w szczycie garbu na drodze $N = m(g - v^2/R)$.

× „Akcja i reakcja się znoszą, więc nic nie może ruszyć.”

Działają na *różne* ciała. Koń ciągnie wóz, a wóz ciągnie konia. Koń rusza, bo odpycha się kopytami od ziemi, a ziemia pcha go do przodu mocniej, niż wóz ciągnie go do tyłu.

× „Na ciało krążące po okręgu działa siła odśrodkowa.”

W układzie inercyjnym nie ma żadnej siły odśrodkowej. Jest tylko siła dośrodkowa (naciąg, tarcie, grawitacja), która zakrzywia tor. „Odśrodkowa” pojawia się dopiero w obracającym się układzie odniesienia (dział 7).

× „Cięższe ciała spadają szybciej.”

Bez oporu powietrza wszystkie spadają z tym samym przyspieszeniem g , bo dwa razy większa siła ciężkości działa na dwa razy większą bezwładność. Astronauta David Scott pokazał to na Księżycu w 1971 r. z młotkiem i piórem.

× „ $\Delta x / \Delta t$ to to samo co x/t .”

Prędkość średnia na przedziale to stosunek *przyrostów*. Iloraz x/t jest prędkością średnią od chwili 0 tylko wtedy, gdy $x(0) = 0$. Prędkością chwilową jest jedynie w ruchu jednostajnym.

9 Zadania feynmanowskie

Te zadania nie sprawdzają, czy pamiętasz wzór. Sprawdzają, czy umiesz zacząć: oszacować, wybrać układ, sprawdzić przypadek graniczny, zauważyć pułapkę. Tak pracuje Feynman w swoich wykładach: najpierw mówi „mniej więcej tyle”, a dopiero potem liczy dokładnie. Rozwiązania są pełne, ale zajrzyj do nich dopiero po własnej próbie.

ZADANIA FEYNMANOWSKIE

8 zadań · ok. 90 min

- 1 **Mrugnięcie na autostradzie.** Jedziesz autostradą z prędkością 140 km/h i mrugasz. Ile metrów przejeżdżasz z zamkniętymi oczami? Ile kilometrów przejedziesz „na ślepo” w ciągu godziny jazdy? Przyjmij rozsądne wartości, zamiast ich szukać.

- 2 **Ręce bramkarza.** Napastnik strzela z prędkością ok. 100 km/h, a bramkarz łapie piłkę o masie ok. 0,43 kg. Oszacuj średnią siłę, z jaką piłka działa na dłoń, i czas hamowania piłki. Co się zmieni, jeśli bramkarz trzyma ręce sztywno?

- 3 **Wymiary zamiast wzorów** (metoda z lekcji 0.5 Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru). (a) Czas spadania t ciała puszczonego z wysokości h może zależeć tylko od h , g i masy m . Porównując jednostki, pokaż, że $t = C\sqrt{h/g}$, gdzie C jest liczbą. Ile razy dłużej spada kamień z wieży cztery razy wyższej? A na Księżycu, gdzie $g_K = 1,62 \text{ m/s}^2$? (b) Okres wahadła może zależeć od długości l , od g , od masy m i od amplitudy kątowej θ_0 . Co mówi o nim analiza wymiarowa? Wahadło o długości 1,00 m ma przy małej amplitudzie okres 2,006 s. Jak długie musi być wahadło o okresie 1,000 s? Ile wynosi okres metrowego wahadła na Księżycu?

- 4 **Który wzór może być dobry?** Kłosek m_1 leży na gładkiej równi o kącie α . Nić biegnie od niego przez nieważki bloczek na szczycie równi do ciężarka m_2 , który wisi pionowo. Kolega podaje pięć wzorów na przyspieszenie układu (dodatnie, gdy m_2 opada):

$$(A) a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} \quad (B) a = g \frac{m_2 - m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2}$$

$$(C) a = g \frac{m_2 + m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} \quad (D) a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_2}$$

$$(E) a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 m_2}$$

Bez wyprowadzania wskaż, które na pewno są błędne. Sprawdź jednostki i przypadki graniczne: $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 0$, $m_1 = 0$.

- 5 **Piłka w pociągu.** Siedzisz w pociągu jadącym ze stałą prędkością 30 m/s i podrzucasz piłkę pionowo w górę z prędkością 5 m/s względem siebie. (a) Gdzie spadnie piłka? Jak jej tor widzi osoba stojąca na peronie? (b) Teraz pociąg rusza ze stacji z przyspieszeniem $0,8 \text{ m/s}^2$. Gdzie i jak daleko od ręki spadnie piłka podrzucona tak samo? (c) A gdy pociąg hamuje z takim samym opóźnieniem? Rozwiąż wszystko w układzie związanym z peronem.

- 6 **Waga łazienkowa na równi.** Osoba o masie 75 kg staje na wadze łazienkowej. Waga mierzy siłę nacisku prostopadłą do swojej płytki i wyświetla ją podzieloną przez g . Co pokaże waga, gdy (a) leży na nieruchomej równi o kącie 20° , płytką równoległą do równi, a osoba stoi spokojnie; (b) leży poziomo na wózku, który bez tarcia zjeżdża z tej samej równi? Skąd w przypadku (b) bierze się siła, która przyspiesza osobę w poziomie?

- 7 **Księżyc spada.** Księżyc krąży wokół Ziemi po orbicie o promieniu 384 400 km z okresem 27,32 doby. (a) O ile metrów „spada” w stronę Ziemi, czyli odchodzi od prostej, w ciągu jednej minuty? Porównaj to z drogą kamienia, który przy powierzchni Ziemi spada przez 1 s. (b) Satelita geostacjonarny okrąża Ziemię raz na dobę. Wyznacz promień jego orbity, korzystając tylko z danych o Księżycu i z tego, że przyciąganie Ziemi maleje jak $1/r^2$. Nie używaj G ani masy Ziemi.

- 8 **Auto na luzie.** Samochód o masie 1200 kg toczy się na luzie po płaskiej drodze. Hamują go opór powietrza cv^2 z $c = 0,40 \text{ kg/m}$ i stały opór toczenia 140 N. Ile czasu i na jakiej drodze zwolni z 30 m/s do 20 m/s? (a) Najpierw oszacuj wynik, przyjmując stałe opóźnienie z chwili początkowej. (b) Potem policz ręcznie, dzieląc przedział prędkości na dwa kroki po 5 m/s. Siła zależy tylko od v , więc rób kroki w prędkości, a nie w czasie, i bierz przyspieszenie ze środka kroku, jak w metodzie Feynmana z części 6.2.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

Więcej w tym duchu: ćwiczenia do *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1964), rozdz. 8–12.

10 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź. Te pytania nie wymagają liczenia, ale bez zrozumienia nie da się na nie odpowiedzieć.

- 1 **Piłka rzucona pionowo w górę jest w najwyższym punkcie. Ile wynosi jej prędkość, a ile przyspieszenie?**

Prędkość wynosi 0, a przyspieszenie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ w dół. Gdyby przyspieszenie też było zerowe, piłka zostałaby w powietrzu na zawsze.

- 2 **Samochód jedzie po rondzie ze stałym wskazaniem prędkościomierza. Czy jego przyspieszenie jest zerowe?**

Nie. Szybkość jest stała, ale kierunek prędkości się zmienia. Przyspieszenie v^2/R jest skierowane do środka ronda, a zapewnia je tarcie statyczne opon.

- 3 **W tabeli z części 1.3 iloraz dla $\Delta t = 0,001 \text{ s}$ wynosi 29,434905 m/s. Dlaczego jest większy od 29,43 i o ile dokładnie?**

Bo kamień przyspiesza, więc średnia prędkość tuż po chwili t_0 jest większa od chwilowej. Różnica to $\frac{1}{2}g\Delta t = 0,004905 \text{ m/s}$, dokładnie tyle, ile wynika z algebry.

- 4 Kulę wystrzelono poziomo, a drugą w tej samej chwili upuszczono z tej samej wysokości. Która pierwsza uderzy w ziemię?

Obie jednocześnie (bez oporu powietrza). Ruch pionowy nie zależy od poziomego, bo $F_y = ma_y$ nie zawiera v_x .

- 5 Kłosek spoczywa na równi o kącie α ze współczynnikiem μ_s . Ile wynosi siła tarcia? Czy $\mu_s mg \cos \alpha$?

Nie. Tarcie statyczne ma wartość potrzebną do równowagi: $T = mg \sin \alpha$. Wzór $\mu_s mg \cos \alpha$ to tylko górna granica, osiągnięta w chwili, gdy klocek właśnie ma ruszyć.

- 6 Ile waży jabłko w spadającej swobodnie windzie? Co pokaże waga, na której leży?

Ciężar, czyli siła grawitacji, wynosi nadal mg . Waga pokaże zero, bo mierzy siłę nacisku N , a ta znika, gdy jabłko i waga spadają razem.

- 7 Dlaczego metoda naiwna w symulacji 5 „pompuje” energię, choć każdy jej krok wygląda rozsądnie?

Do przesunięcia używa prędkości z początku kroku, a do zmiany prędkości położenia z początku kroku. Dla oscylatora daje to $x_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = (1 + \varepsilon^2)(x_n^2 + v_n^2)$, czyli energia rośnie w każdym kroku o ten sam czynnik. Metoda półkroku jest symetryczna w czasie i takiego dryfu nie ma.

- 8 Czy $F = ma$ to definicja siły?

Gdyby było tylko definicją, nic by nie przewidywało (por. „gorca” Feynmana). Prawo ma treść, bo siły mają niezależne własności: materialne źródło, proste prawa (grawitacja, Hooke), dodawanie się wektorowe i trzecią zasadę. Dlatego z $F = ma$ można policzyć orbitę planety.

11 Karta wzorów i co dalej

KINEMATYKA

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt'$$

$$\text{stałe } a: v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\text{stałe } a: v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$$

$$\text{rzut: } R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$\text{okrąg: } a_d = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

DYNAMIKA

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \text{ (różne ciała!)}$$

$$F_g = \frac{GMm}{r^2}, \quad F = mg \text{ przy powierzchni}$$

$$F = -kx \text{ (Hooke)}$$

$$T_s \leq \mu_s N, \quad T_k = \mu_k N$$

$$\text{półkrok: } v_{n+\frac{1}{2}} = v_{n-\frac{1}{2}} + a(x_n) \varepsilon$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+\frac{1}{2}} \varepsilon$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** rozdz. 8 (całość), rozdz. 9 (całość, szczególnie 9-5...9-7), 12-1.
- **Dla chętnych:** 1-1...1-2 (atomy), 2-1 (szachy), 7-4 (test Księżyca), 11-1...11-5 (symetria i wektory), 12-2...12-5 (tarcie, siły molekularne, siły podstawowe, siły pozorne).

Następny dział: **Energia**. Zaczniemy od wakacyjnego budżetu, którego suma się nie zmienia, choć pieniądze przechodzą z portfela do skarbonki i na euro. Zobaczymy, dlaczego zasada zachowania energii jest najpotężniejszym narzędziem mechaniki i dlaczego, jak mówi Feynman, nie wiemy, czym energia jest.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $v = 20 - 4t$ m/s, $a = -4$ m/s². Samochód staje po 5 s, droga hamowania wynosi 50 m. Dla $t = 7$ s wzór daje $x = 42$ m, czyli samochód „cofa się”. Po zatrzymaniu hamulce nie pchają auta do tyłu, tylko trzymają je w miejscu, więc wzór obowiązuje tylko dla $0 \leq t \leq 5$ s.

2. $v_{\max} = 20$ m/s. Droga: $400 + 1200 + 200 = 1800$ m. Prędkość średnia: $1800 \text{ m} / 120 \text{ s} = 15$ m/s.

3. Z $v^2 = 2as$ przy stałym a droga hamowania rośnie jak v^2 (tu $a \approx 7,4$ m/s²).

(a) $s = 13 \text{ m} \cdot (90/50)^2 \approx 42,1$ m. (b) Przy 50 km/h: $13,9 + 13 \approx 26,9$ m. Przy 90 km/h: $25 + 42,1 \approx 67,1$ m. Prędkość wzrosła 1,8 raza, a droga zatrzymania prawie 2,5 raza.

4. $v = (t - 2)(t - 4)$, więc ciało zawraca w chwilach $t = 2$ s i $t = 4$ s. Funkcja pierwotna $X(t) = t^3/3 - 3t^2 + 8t$ daje $X(0) = 0$, $X(2) = 20/3$, $X(4) = 16/3$, $X(5) = 20/3$ m.

Przemieszczenie: $20/3 \approx 6,67$ m. Droga: $20/3 + 4/3 + 4/3 = 28/3 \approx 9,33$ m.

5. $v dv = a(x) dx$, więc $\frac{1}{2}v^2 = \int_0^L a_0(1 - x/L) dx = \frac{1}{2}a_0L$.

$v = \sqrt{a_0L} \approx 316$ m/s. Wzór dla stałego przyspieszenia dałby $\sqrt{2a_0L} \approx 447$ m/s, bo zakłada, że przez całą lufę siła jest tak duża jak na początku.

6. (a) Z $v = gt$: $t = 29,9205/9,81 = 3,05$ s, czyli dokładnie w środku przedziału.

(b) $\frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = v_0 + at_1 + \frac{1}{2}a \Delta t = v(t_1 + \frac{\Delta t}{2})$.

(c) Przesuwanie położenia o ε $v(t + \varepsilon/2)$ jest więc przy stałej sile dokładne. Przy zmiennym przyspieszeniu równość jest tylko przybliżona, ale błąd na jeden krok jest rzędu ε^3 , a przy prędkości z początku kroku rzędu ε^2 .

Zadania • część 2

1. $s'_x = 3 \cos 30^\circ + 4 \sin 30^\circ \approx 4,60$ m, $s'_y = -3 \sin 30^\circ + 4 \cos 30^\circ \approx 1,96$ m. Długość: $\sqrt{4,60^2 + 1,96^2} = 5,00$ m = $\sqrt{3^2 + 4^2}$. Składowe zależą od wyboru osi, długość nie.

2. $\vec{v} = [3, 4 - 10t]$ m/s, $\vec{a} = [0, -10]$ m/s², $|\vec{v}(0)| = 5$ m/s. Warunek $\vec{v} \cdot \vec{a} = -10(4 - 10t) = 0$ daje $t = 0,4$ s. To najwyższy punkt toru rzutu ukośnego (tu z $g = 10$ m/s²).

3. $t = \sqrt{2h/g} \approx 2,02$ s, odległość $\approx 30,3$ m. W chwili upadku $v_y = gt \approx 19,8$ m/s, $|\vec{v}| \approx 24,8$ m/s, kąt $\approx 52,9^\circ$ poniżej poziomu.

4. Czas dolotu wynika z ruchu poziomego: $t = 60/(25 \cos 40^\circ) \approx 3,13$ s. Wtedy $y = 25 \sin 40^\circ \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$.

$y \approx 2,20$ m. Tak, piłka przelatuje ok. 24 cm pod poprzeczką (i już opada).

5. Z $v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = -1,8$ m wyznaczamy czas lotu, a zasięg to $v_0 \cos \alpha \cdot t$.

40° : 18,89 m, 45° : 18,87 m, lepszy jest 40° . Start powyżej ziemi i tak wydłuża lot, więc opłaca się oddać trochę czasu lotu w zamian za większą prędkość poziomą. Optimum to ok. 42° (18,94 m).

6. (a) Bez grawitacji pocisk leciałby po linii celowania i trafiłby nieruchomą małpę. Grawitacja w czasie t obniża i pocisk, i małpę o to samo $\frac{1}{2}gt^2$, więc spotkanie następuje tak czy inaczej.
- (b) Odległość do małpy $L = \sqrt{30^2 + 15^2} \approx 33,5$ m, czas lotu $L/v_0 \approx 0,671$ s, spadek $\approx 2,21$ m. Trafienie ok. 12,8 m nad lufą. (c) Małpa spada 15 m w czasie $\sqrt{2 \cdot 15/g} \approx 1,75$ s, więc potrzeba $v_0 > L/1,75$ s $\approx 19,2$ m/s.

Zadania • część 3

1. $\omega = 2\pi/86\,400$ s $\approx 7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Równik: $v \approx 463$ m/s, $a = \omega^2 R \approx 0,0337$ m/s², czyli ok. 0,34% g . Warszawa krąży po okręgu o promieniu $R \cos 52^\circ \approx 3920$ km: $v \approx 285$ m/s, $a \approx 0,0207$ m/s². Przyspieszenie jest skierowane do osi Ziemi, a nie do jej środka.
2. $\omega = 1200 \cdot 2\pi/60 \approx 126$ rad/s, $v = \omega R \approx 31,4$ m/s, $a = \omega^2 R \approx 3950$ m/s², czyli ok. 400 g .
3. (a) $|\Delta \vec{v}| = v\sqrt{2}$, $\Delta t = \pi R/(2v)$, więc $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{v^2}{R} \approx 18,0$ m/s². (b) $|\Delta \vec{v}| = 2v$, $\Delta t = \pi R/v$, więc $\frac{2}{\pi} \frac{v^2}{R} \approx 12,7$ m/s². (c) Zero, bo prędkość wraca do początkowej.
- Wartość $v^2/R = 20$ m/s² to granica dla $\Delta t \rightarrow 0$. Średnie przyspieszenie na długim łuku „nie widzi” całego skręcania.
4. Składowa styczna $a_t = 1,5$ m/s² jest stała, a normalna $a_n = v^2/R$ rośnie. Całkowite przyspieszenie to $\sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.
- $a_n = \sqrt{3^2 - 1,5^2} \approx 2,60$ m/s², $v = \sqrt{a_n R} \approx 8,83$ m/s (ok. 32 km/h), $t = v/a_t \approx 5,89$ s. Kąt: $\tan \varphi = a_n/a_t = \sqrt{3}$, czyli $\varphi = 60^\circ$.
5. $\ddot{x} = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x$ i $\ddot{y} = -\omega^2 y$. Siła $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$ to siła sprężyny o współczynniku $k = m\omega^2$ zaczepionej w środku elipsy.
- Przyciąganie planety rośnie, gdy planeta się zbliża ($\propto 1/r^2$), a tu siła maleje razem z r . Słońce leży w ognisku elipsy, a nie w jej środku.
6. $u = h\omega/2\pi$, więc $v = \omega\sqrt{R^2 + (h/2\pi)^2}$, skąd $\omega \approx 1,652$ rad/s. Przyspieszenie $\vec{a} = [-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0]$ jest poziome i skierowane do osi zjeżdżalni.
- $a = R\omega^2 \approx 8,19$ m/s², promień krzywizny $\rho = v^2/a \approx 3,05$ m. Część prędkości jest skierowana w dół i ta część nie skręca, dlatego a jest mniejsze niż $v^2/R \approx 8,33$ m/s².

Zadania • części 4–5

1. Największe możliwe tarcie statyczne to $\mu_s mg \approx 196$ N. (a) $150 < 196$, więc skrzynia stoi: $T_s = 150$ N, $a = 0$. (b) $250 > 196$, więc skrzynia rusza: $T_k = \mu_k mg \approx 147$ N, $a = (250 - 147,2)/50 \approx 2,06$ m/s².
2. (a) Reakcja ściany jest równa sile docisku, $N = F$. Warunek $mg \leq \mu_s N$ daje $F \geq mg/\mu_s \approx 19,6$ N. (b) Tarcie wynosi nadal $mg = 9,81$ N, a nie $\mu_s \cdot 40$ N = 20 N. Tarcie statyczne ma taką wartość, jaka jest potrzebna do równowagi.
3. (a) $a = F/(m_1 + m_2) = 2$ m/s², m_1 pcha m_2 siłą $m_2 a = 6$ N. (b) To siła z III zasady: 6 N w przeciwną stronę, przyłożona do m_1 . Dlatego na m_1 działa wypadkowa $10 - 6 = 4$ N = $m_1 a$. (c) $m_1 a = 4$ N. Siła między klockami rozpędza tylko ten klocek, którego nie pchamy bezpośrednio.
4. (a) Pion: $N = mg - F \sin 30^\circ$. Poziom: $F \cos 30^\circ = \mu_k N$. Stąd $F = \frac{\mu_k mg}{\cos 30^\circ + \mu_k \sin 30^\circ} \approx 21,4$ N.

- (b) Poziomo wystarczy $F = \mu_k mg \approx 19,6$ N, czyli mniej. Przy małym μ_k strata na składowej poziomej przeważa nad zyskiem z mniejszego nacisku. (c) Mianownik $\cos \theta + \mu_k \sin \theta$ jest największy dla $\tan \theta = \mu_k$, czyli $\theta \approx 5,7^\circ$. Wtedy $F \approx 19,5$ N.
5. Dla każdego ciała oś wzdłuż jego ruchu: $m_2 a = m_2 g - N_n$, $m_1 a = N_n - \mu_k m_1 g$. Po dodaniu stronami naciąg się znosi: $a = g \frac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2}$.
- $a \approx 1,64$ m/s², $N_n = m_2(g - a) \approx 16,4$ N. Układ ruszy, gdy $m_2 g > \mu_s m_1 g$, czyli dla $m_2 > 1$ kg.
6. (a) W drodze w górę i składowa ciężaru, i tarcie działają w dół równi. Opóźnienie: $g(\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha) \approx 6,60$ m/s², droga $v_0^2/(2a) \approx 2,73$ m.
- (b) Zjedzie, bo $\tan 30^\circ \approx 0,58 > \mu_s$. Tarcie zmienia zwrot: $a = g(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha) \approx 3,21$ m/s². (c) Z $v^2 = 2as$ przy zjeżdżaniu: $v \approx 4,2$ m/s, wyraźnie mniej niż 6 m/s.
7. Działają tylko ciężar i reakcja N prostopadła do jezdni. Pion: $N \cos \alpha = mg$. Poziom, do środka zakrętu: $N \sin \alpha = mv^2/R$. Stąd $\tan \alpha = v^2/(gR) = 400/981$.
- $\alpha \approx 22,2^\circ$. $N = mg/\cos \alpha \approx 12,7$ kN, o ok. 8% więcej niż ciężar 11,8 kN.
8. (a) Lina działa na układ dwa razy w górę: na krzeselko i na ręce. $2N_n = (m + M)g$, więc $N_n \approx 392$ N, tylko połowa ciężaru układu. (b) $2N_n - (m + M)g = (m + M)a$, więc $N_n = 40$ kg $\cdot$ 10,81 m/s² ≈ 432 N.
- (c) Dla samego człowieka: $N_n + N - mg = ma$, więc $N = m(g + a) - N_n \approx 324$ N. Przy stałej prędkości byłoby to ok. 294 N.

Zadania · część 6

- Położenia po 0,5 s, 1 s i 1,5 s. (a) Metoda naiwna: 0; 2,45; 7,36 m. (b) Metoda półkroku: 1,23; 4,91; 11,04 m. Dokładnie: 1,23; 4,91; 11,04 m. Przy stałym przyspieszeniu prędkość ze środka kroku jest dokładnie średnią prędkością na tym kroku (por. ostatnie zadanie do części 1), więc metoda półkroku nie popełnia błędu. Metoda naiwna bierze prędkość z początku kroku, czyli za małą.
- Półkrok: $v(0,25) = -0,25$, $x(0,5) = 0,875$; $v(0,75) = -0,6875$, $x(1,0) \approx 0,531$; $v(1,25) \approx -0,953$, $x(1,5) \approx 0,055$. Dokładnie $\cos 1,5 \approx 0,071$. Metoda naiwna daje kolejno $x = 1$; 0,75; 0,25, czyli błąd ponad dziesięć razy większy.
- (a) $v = 10t - t^2$, maksimum gdy $a = 0$, czyli w $t = 5$ s: $v_{\max} = 25$ m/s. Droga: $x(5) = 5t^2 - t^3/3 = 125 - 41,7 \approx 83,3$ m.
- (b) Kolega dostaje $v = 25$ m/s, ale $x = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5^2 = 62,5$ m. Prędkość to pole pod wykresem $a(t)$, a to pole zależy tylko od średniej. Droga zależy od tego, kiedy rakieta nabrała prędkości. Prawdziwa rakieta przyspiesza najmocniej na początku, więc dłużej leci szybko.
- (a) Rozdzielamy zmienne: $dv/v = -dt/\tau$, więc $v = 10 e^{-t/2}$ m/s i $x = 20(1 - e^{-t/2})$ m. Droga całkowita: $v_0 \tau = 20$ m.
- (b) Opóźnienie początkowe $v_0/\tau = 5$ m/s² daje zatrzymanie po 2 s na drodze 10 m, dwa razy za krótkiej. (c) Formalnie nigdy: prędkość maleje wykładniczo i nie osiąga zera, a mimo to droga jest skończona. Po $5\tau = 10$ s zostaje mniej niż 1% prędkości początkowej.
- (a) $ma = mg - cv^2$. Przy $v = v_{\text{gr}}$ jest $a = 0$, więc $c/m = g/v_{\text{gr}}^2$. (b) Kolejne prędkości: 4,91; 9,51; 13,31; 16,04 m/s.

(c) Bez oporu po 2 s byłoby $gt = 19,6$ m/s, z oporem dokładnie 15,1 m/s. Metoda bierze przyspieszenie z początku kroku, a ono w trakcie kroku maleje, więc przyrost prędkości jest za duży. Krok 0,25 s zmniejsza błąd mniej więcej o połowę. Przyspieszenie liczone dla prędkości ze środka kroku daje od razu 15,02 m/s.

$$6. \vec{a}(0) = [-4, 0], \vec{v}(0,05) = [-0,2, 1,63]; \vec{r}(0,1) = [0,480, 0,163], r \approx 0,507; \vec{a}(0,1) \approx [-3,685, -1,251]; \\ \vec{v}(0,15) \approx [-0,568, 1,505]; \vec{r}(0,2) \approx [0,423, 0,313], r \approx 0,527.$$

Planeta się oddala. Prędkość 1,63 jest większa od prędkości na orbicie kołowej $\sqrt{GM/r} = \sqrt{2} \approx 1,41$, więc grawitacja nie nadąży zakrzywić toru do okręgu. Punkt startu to peryhelium.

Zadania feynmanowskie

1. Szacujemy dane. Mrugnięcie trwa ok. 0,1–0,3 s, weźmy 0,2 s. Mrugamy ok. 15 razy na minutę.
 2. Prędkość: $140/3,6 \approx 39$ m/s. W czasie jednego mrugnięcia auto przejeżdża $39 \cdot 0,2 \approx 8$ m, mniej więcej dwie swoje długości.
 3. W ciągu godziny: $15 \cdot 60 = 900$ mrugnięć, razem $900 \cdot 0,2$ s = 180 s, czyli 3 minuty z zamkniętymi oczami.
 4. W 3 minuty przy 140 km/h auto przejeżdża $140 \cdot 3/60 = 7$ km.
 5. **Wynik:** ok. 8 m na mrugnięcie i kilka kilometrów na godzinę jazdy. Dane wejściowe znamy z dokładnością do czynnika 2, więc wynik też. Rząd wielkości jest jednak pewny i tylko o niego tu chodzi. Dla porównania: w czasie reakcji kierowcy (ok. 1 s) auto przejeżdża ok. 40 m.
2. 1. Dane: $v \approx 28$ m/s. Dłonie i ramiona ustępują na drodze ok. $d = 20$ cm.
 2. Średnie opóźnienie z $v^2 = 2ad$: $a = v^2/(2d) \approx 28^2/0,4 \approx 1960$ m/s², czyli ok. 200g.
 3. Siła: $F = ma \approx 0,43 \cdot 1960 \approx 840$ N, tyle co ciężar człowieka o masie ok. 85 kg. Czas hamowania: $t = 2d/v \approx 0,014$ s.
 4. Sztynne ręce to droga ok. 5 cm, czyli cztery razy mniejsza. Siła rośnie wtedy czterokrotnie, do ponad 3 kN, i działa na małą powierzchnię palców. Dlatego bramkarze „amortyzują” piłkę.
 5. **Sprawdzenie:** ciężar piłki (ok. 4 N) jest ok. 200 razy mniejszy od tej siły, więc słusznie go pominęliśmy.
3. 1. Szukamy $t = C m^\alpha h^\beta g^\gamma$, więc $s = \text{kg}^\alpha \text{m}^\beta (\text{m s}^{-2})^\gamma$. Kilogramy: $\alpha = 0$. Sekundy: $-2\gamma = 1$, czyli $\gamma = -\frac{1}{2}$. Metry: $\beta + \gamma = 0$, czyli $\beta = \frac{1}{2}$. Zatem $t = C \sqrt{h/g}$, a masa wypada. Jeśli nic poza h , g i m się nie liczy (brak oporu powietrza), ciała ciężkie i lekkie spadają jednakowo.
 2. Wieża cztery razy wyższa: $t \propto \sqrt{h}$, więc czas jest dwa razy dłuższy. Księżyc: $\sqrt{9,81/1,62} \approx 2,46$ raza dłużej. Liczba C nie była potrzebna (z rachunku $C = \sqrt{2}$).
 3. Wahadło: θ_0 jest bezwymiarowe, więc analiza wymiarowa nie wyklucza zależności od niego. Wynik to $T = f(\theta_0) \sqrt{l/g}$, a masa znów wypada. Przy małych amplitudach f jest praktycznie stałą.
 4. Okres 1 s: $l \propto T^2$, więc $l = 1,00$ m $\cdot (1,000/2,006)^2 \approx 0,249$ m. Księżyc: $T = 2,006$ s $\cdot \sqrt{9,81/1,62} \approx 4,94$ s.
 5. **Wniosek:** analiza wymiarowa dała całą zależność od l i g . Nie dała tylko liczby $f = 2\pi$, którą zastąpił jeden pomiar: $2\pi/\sqrt{9,81} \approx 2,006$.
4. 1. Jednostki: w (E) dzielimy kilogramy przez kg^2 , więc a wychodzi w $\text{m}/(\text{s}^2 \text{kg})$. Wzór (E) odpada.
 2. $\alpha = 90^\circ$: klocek wisi pionowo i mamy maszynę Atwooda z przykładu 1.4, $a = g(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)$. (B) daje $g m_2/(m_1 + m_2)$, (C) daje g , a (D) daje $g(m_2 - m_1)/m_2$. Odpadają (B), (C) i (D).
 3. $\alpha = 0$: klocek leży na gładkim stole, a ciężar $m_2 g$ rozpędza oba ciała, więc $a = g m_2/(m_1 + m_2)$. Wzór (A) to spełnia.
 4. $m_1 = 0$: ciężarek spada swobodnie, $a = g$. (A) to spełnia. Ponadto (A) daje $a = 0$ dla $m_2 = m_1 \sin \alpha$, czyli wtedy, gdy ciężar ciężarka równoważy składową ciężaru klocka wzdłuż równi. To ma sens.
 5. **Wynik:** zostaje tylko (A). Przejście testów nie dowodzi, że wzór jest dobry, ale każdy test zajmuje kilka sekund i wyłapuje większość błędów. Dlatego warto liczyć na symbolach.

5. 1. (a) W chwili wyrzutu piłka ma poziomą prędkość pociągu, 30 m/s. W poziomie nic na nią nie działa, więc leci dalej z tą prędkością, dokładnie tak jak ręka. Spada z powrotem do ręki. Pasażer widzi rzut pionowy, a osoba na peronie rzut ukośny po paraboli. Prawa ruchu są w obu układach takie same.
2. (b) Czas lotu zależy tylko od ruchu pionowego: $T = 2v_0/g = 2 \cdot 5/9,81 \approx 1,02$ s.
3. Piłka zachowuje poziomą prędkość z chwili wyrzutu, a ręka w tym czasie przyspiesza. Ręka wyprzedza piłkę o $\frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 1,02^2 \approx 0,42$ m.
4. Piłka spada ok. 42 cm za ręką, w stronę tyłu pociągu. Pasażerowi wydaje się, że coś pchnęło piłkę do tyłu. Na piłkę nie działa jednak żadna pozioma siła: to pociąg przyspieszył pod nią do przodu.
5. (c) Przy hamowaniu ręka zostaje w tyle, więc piłka spada ok. 42 cm przed ręką, w stronę lokomotywy.
6. 1. (a) Osoba spoczywa, więc siły się równoważą. Prostopadle do płytki: $N = mg \cos \alpha$. Wzdłuż płytki składową ciężaru równoważy tarcie statyczne butów. Waga pokazuje $75 \cos 20^\circ \approx 70,5$ kg.
2. (b) Przyspieszenie $g \sin \alpha$ wzdłuż równi ma składową pionową $g \sin^2 \alpha$ w dół i poziomą $g \sin \alpha \cos \alpha$.
3. Pion: $mg - N = mg \sin^2 \alpha$, więc $N = mg \cos^2 \alpha$. Waga pokazuje $75 \cos^2 20^\circ \approx 66,2$ kg.
4. Poziom: osobę rozpędza tarcie statyczne między butami a płytką, $T_s = mg \sin \alpha \cos \alpha \approx 236$ N. Bez tarcia (np. w skarpetkach na śliskiej płytce) osoba zsunęłaby się z płytki do tyłu.
5. **Sprawdzenie:** dla $\alpha = 0$ waga pokazuje 75 kg, a dla $\alpha \rightarrow 90^\circ$ zero (swobodny spadek razem z wózkiem). Waga nigdy nie mierzy ciężaru, tylko składową siły nacisku prostopadłą do swojej płytki.
7. 1. (a) $T = 27,32 \cdot 86\,400$ s $\approx 2,36 \cdot 10^6$ s, więc $a_K = 4\pi^2 r/T^2 \approx 2,72 \cdot 10^{-3}$ m/s².
2. W ciągu minuty Księżyc przelatuje ok. 61 km, małeńki fragment orbity, więc wolno użyć $h = \frac{1}{2}at^2$: $h = \frac{1}{2} \cdot 2,72 \cdot 10^{-3} \cdot 60^2 \approx 4,9$ m.
3. Kamień przy Ziemi spada w ciągu sekundy $\frac{1}{2}g \cdot (1 \text{ s})^2 \approx 4,9$ m. Księżyc w minutę spada tyle, co kamień w sekundę. Jego przyspieszenie jest ok. $60^2 = 3600$ razy mniejsze, a jest on ok. 60 razy dalej od środka Ziemi.
4. (b) $4\pi^2 r/T^2 \propto 1/r^2$ oznacza, że r^3/T^2 jest takie samo dla wszystkiego, co krąży wokół Ziemi (III prawo Keplera). Stąd $r_{\text{geo}} = r_K (T_{\text{geo}}/T_K)^{2/3} = 384\,400 \text{ km} \cdot (1/27,32)^{2/3} \approx 42\,400$ km.
5. **Wynik:** ok. 42 400 km od środka Ziemi, czyli ok. 36 000 km nad powierzchnią. Rzeczywisty promień orbity geostacjonarnej to 42 164 km. Różnica (0,5%) bierze się z dwóch uproszczeń: względem gwiazd Ziemia obraca się w 23 h 56 min, a nie w 24 h, a masa Księżyca nie jest znikomo mała w porównaniu z masą Ziemi.
8. 1. Przyspieszenie: $a(v) = -(140 + 0,40 v^2)/1200$ w m/s². Na początku $|a| = 500/1200 \approx 0,417$ m/s².
2. (a) Przy stałym opóźnieniu 0,417: $t = 10/0,417 = 24$ s, $x = (30^2 - 20^2)/(2 \cdot 0,417) = 600$ m. To za mało, bo opór maleje razem z prędkością.
3. (b) Krok 1, środek $v = 27,5$ m/s: $|a| = 442,5/1200 \approx 0,369$ m/s², $\Delta t = 5/0,369 \approx 13,56$ s, $\Delta x = 27,5 \cdot 13,56 \approx 373$ m.
4. Krok 2, środek $v = 22,5$ m/s: $|a| = 342,5/1200 \approx 0,285$ m/s², $\Delta t \approx 17,52$ s, $\Delta x = 22,5 \cdot 17,52 \approx 394$ m.
5. **Wynik:** ok. 31 s i ok. 767 m. Całkowanie dokładne ($dt = dv/a$, $dx = v dv/a$) daje 31,2 s i 766 m. Dwa kroki ze środka przedziału pomyliły się o mniej niż 0,5%, a wzory dla stałego opóźnienia o ponad 20%.

Fizyka · Dział 1: Ruch i jego przyczyny · Źródło: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011). Cytaty w tłumaczeniu własnym, odnośniki w formacie tom–rozdział–podrozdział.