

Wektory

W arkuszach rozszerzonych 2024–2026 wektory nigdy nie były osobnym zadaniem. Pojawiały się wewnątrz zadań z okręgiem albo trójkątem, za 4–5 punktów, jako zapis „punkt dzieli odcinek w danym stosunku”. W kluczach jest za to osobny punkt za poprawne przełożenie warunku wektorowego na współrzędne. To krótka lekcja: współrzędne i długość wektora, działania, podział odcinka i pole równoległoboku.

CZAS

ok. 25 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 3
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
IX.R3

W TEJ LEKCJI

- 0 Przesunięcie zapisane liczbami
- 1 Współrzędne, długość, działania
- 2 Podział odcinka
- 3 Równoległość i pole
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Przesunięcie zapisane liczbami

Wektor $\overrightarrow{AB}$ mówi, o ile trzeba przesunąć punkt A , żeby trafić w B : o $x_B - x_A$ w poziomie i o $y_B - y_A$ w pionie. Dwa wektory są równe, gdy opisują to samo przesunięcie, niezależnie od tego, gdzie się zaczynają. Dzięki temu warunek „ $ABCD$ jest równoległobokiem” to po prostu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, a zdanie „ M leży na odcinku AB dwa razy bliżej B niż A ” to $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Współrzędne, długość, działania

 WZORY (W BROSZURZE CKE)

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A], \quad |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2},$$

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2], \quad a\vec{u} = [au_1, au_2].$$

Koniec wektora: $B = A + \overrightarrow{AB}$, czyli do współrzędnych A dodaje się współrzędne wektora.

SYMULACJA 1

Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zaczepione w początku układu. Zmieniaj ich współrzędne i współczynnik t : rysunek pokazuje sumę $\vec{u} + \vec{v}$ (przekątną równoległoboku), wektor $t\vec{u}$ i pole równoległoboku rozpiętego na $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



— u i v — $u + v$ — $t \cdot u$

$u + v$ [5, 4]

$t \cdot u$ [6, 0; 1, 5]

$|u|, |v|$ 4,123; 3,162

$u_1 v_2 - u_2 v_1$ 11

pole równoległoboku 11

Suma $u + v$ to przekątna równoległoboku rozpiętego na u i v . Jego pole to $|u_1 v_2 - u_2 v_1| = 11$. Znak wyznacznika mówi tylko, czy v leży po lewej (+), czy po prawej (−) stronie u .

Stan na rysunku: $u = [4, 1]$, $v = [1, 3]$, $t = 1,5$, pole równoległoboku 11.

Przykład 1.1

Wektor i jego długość

Dane są $A = (1, -2)$ i $B = (4, 2)$. Oblicz współrzędne i długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

1 $\overrightarrow{AB} = [4 - 1, 2 + 2] = [3, 4]$.

2 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16}$.

Wynik: $[3, 4]$, długość 5.

Przykład 1.2

Czwarty wierzchołek równoległoboku

Punkty $A = (-1, 1)$, $B = (3, 2)$, $C = (5, 6)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz D .

1 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [2, 4]$.

2 $D = A + [2, 4]$.

Wynik: $D = (1, 5)$. Kontrola: środki przekątnych AC i BD to oba $(2, \frac{7}{2})$ ✓.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 4 min

1 Oblicz długość wektora $[-5, 12]$.

2 $\vec{u} = [2, -1]$, $\vec{v} = [-3, 4]$. Oblicz $2\vec{u} - \vec{v}$.

3 $A = (2, 1)$, $\overrightarrow{AB} = [4, -3]$. Wyznacz B .

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

PUNKT DZIELĄCY ODCINEK

- $\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB} \iff M = A + t(B - A)$ (współrzędna po współrzędnej). Dla $t \in [0, 1]$ punkt leży na odcinku.
- $|AM| : |MB| = k : l$ (punkt na odcinku) $\iff t = \frac{k}{k+l}$, czyli $M = \frac{l \cdot A + k \cdot B}{k+l}$.
- Środek ciężkości trójkąta: $\frac{A+B+C}{3}$.

Zapis typu $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{BM}$ rozwiązuje się jak równanie: $M - A = -2(M - B)$, więc $3M = A + 2B$.

Przykład 2.1

Stosunek z warunku wektorowego

$A = (1, -4)$, $B = (7, 2)$, $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{BM}$. Wyznacz M i stosunek $|AM| : |MB|$.

- 1 $M - A = -2M + 2B$, czyli $M = \frac{A+2B}{3} = \left(\frac{1+14}{3}, \frac{-4+4}{3}\right)$.
- 2 $M = A + \frac{2}{3}(B - A)$: punkt leży na odcinku, dwa razy dalej od A niż od B .

Wynik: $M = (5, 0)$, $|AM| : |MB| = 2 : 1$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

1 zadanie · ok. 2 min

- 1 Punkt M dzieli odcinek o końcach $A = (0, 0)$ i $B = (10, 5)$ w stosunku $|AM| : |MB| = 3 : 2$. Wyznacz M .

 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Równoległość i pole

WYZNACZNIK PARY WEKTORÓW

Dla $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i $\vec{v} = [v_1, v_2]$ liczba $d(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_2 - u_2v_1$ mówi dwie rzeczy:

- $d = 0 \iff$ wektory są równoległe (to ten sam warunek co $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ dla prostych w lekcji 9.1 Prosta na płaszczyźnie);
- $|d|$ to pole równoległoboku rozpiętego na $\vec{u}$ i $\vec{v}$, a $\frac{1}{2}|d|$ pole trójkąta.

W broszurze CKE jest wersja dla trójkąta o wierzchołkach A, B, C : $P = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$, czyli właśnie $\frac{1}{2}|d(\vec{AB}, \vec{AC})|$. Jest tam też wzór na środek ciężkości trójkąta.

Przykład 3.1

Pole z wektorów

Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u} = [4, 1]$ i $\vec{v} = [2, 3]$.

1 $d = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 10.$

Wynik: pole 10.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 3 min

1 Dla jakiego m wektory $[m, 2]$ i $[3, 6]$ są równoległe?

2 Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(4, 1)$, $(1, 3)$.

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 15 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · DZIAŁANIA

ZESTAWY A

1 Oblicz.



- a) $\overrightarrow{AB}$ i $|\overrightarrow{AB}|$ dla $A = (2, 5)$, $B = (-1, 1)$ b) $3\vec{u} - 2\vec{v}$ dla $\vec{u} = [1, 2]$, $\vec{v} = [3, -5]$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM B · PUNKTY

ZESTAWY B

1 Wyznacz punkt.



- a) B , gdy $A = (1, 1)$ i $\overrightarrow{AB} = [2, 7]$ b) M na AB ,
 $|AM| : |MB| = 1 : 3$,
 $A = (0, 0)$, $B = (8, 4)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

POZIOM C · RÓWNOLEGŁOŚĆ I POLE

ZESTAWY C

1 Oblicz.



- a) m , dla którego $[2, 3] \parallel [m, 9]$ b) pole trójkąta $(1, 1)$, $(5, 2)$, $(2, 4)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

Pełny trening (15 przykładów i zadań) →

W puli CKE z lat 2024–2026 są trzy zadania z wektorami, każde za 4–5 punktów i zawsze razem z okręgiem albo trójkątem: punkt dzielący odcinek w danym stosunku, równoległobok z danych wektorów. Osobny punkt w kluczu przyznaje się za zapis współrzędnych punktu przez współrzędne końców odcinka (np. $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$). Odwrócenie stosunku (np. 4 : 1 zamiast 1 : 4) ograniczało wynik. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

3 zadania · 11 pkt · ok. 30 min

- 1 (0–4 pkt) Równoległobok $ABCD$ ma wierzchołek $A = (-2, -1)$, a $\overrightarrow{AB} = [6, 2]$ i $\overrightarrow{AD} = [1, 4]$. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D , pole równoległoboku i długość przekątnej AC .
- 2 (0–4 pkt) Dane są punkty $A = (-1, 3)$ i $B = (5, -3)$. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Okrąg o środku M jest styczny do prostej $y = x + 6$. Wyznacz równanie tego okręgu.
- 3 (0–3 pkt) Wyznacz wszystkie wartości m , dla których wektory $\vec{u} = [m - 1, 3]$ i $\vec{v} = [2, m + 4]$ są równoległe.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Najczęstsze błędy

× „ $\overrightarrow{AB} = [x_A - x_B, y_A - y_B]$.”

Od końca odejmuje się początek: $[x_B - x_A, y_B - y_A]$. Odwrócenie daje wektor przeciwny.

× „ $|AM| : |MB| = 2 : 1$, więc $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.”

Stosunek 2 : 1 oznacza, że $|AM|$ to $\frac{2}{3}$ odcinka: $M = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

× „Czwarty wierzchołek równoległoboku $ABCD$: $D = B + \overrightarrow{AC}$.”

Dla kolejnych wierzchołków $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, czyli $D = A + C - B$.

× „Pole równoległoboku to $u_1v_2 - u_2v_1$.”

Wartość bezwzględna tej liczby. Znak zależy tylko od kolejności wektorów.

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Wektor od $(3, 7)$ do $(1, 2)$?

$[-2, -5]$.

2 Czy wektory $[2, -6]$ i $[-1, 3]$ są równoległe?

Tak: $2 \cdot 3 - (-6)(-1) = 0$ (drugi to $-\frac{1}{2}$ pierwszego).

3 Środek ciężkości trójkąta $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 6)$?

$(1, 2)$.

4 Ile wynosi $|t\vec{u}|$ dla $t = -3$ i $|\vec{u}| = 2$?

6.

DZIAŁANIA

$$\overrightarrow{AB} = B - A, \quad |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\text{równoległobok: } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

PODZIAŁ I POLE

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}: M = A + t(B - A)$$

$$k : l: M = \frac{lA + kB}{k+l}$$

$$\text{pole: } |u_1v_2 - u_2v_1|$$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są współrzędne wektora, jego długość, dodawanie wektorów, mnożenie przez liczbę i przesunięcie o wektor. Są też wzór na pole trójkąta przez współrzędne wierzchołków i współrzędne środka ciężkości trójkąta. Wzoru na punkt dzielący odcinek w danym stosunku nie ma.

Dalej: stereometria (lekcja 10.1 Proste, płaszczyzny i kąty w przestrzeni).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $\sqrt{25 + 144} = 13$.
2. $[4 + 3, -2 - 4] = [7, -6]$.
3. $B = (6, -2)$.

Zadania · część 2

1. $t = \frac{3}{5}$: $M = \frac{3}{5} \cdot (10, 5) = (6, 3)$.

Zadania · część 3

1. $6m - 6 = 0$, $m = 1$.
2. $\frac{1}{2}|4 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = \frac{11}{2}$.

Zestawy A

1. a) $[-3, -4]$, 5 b) $[-3, 16]$

Zestawy B

1. a) $(3, 8)$ b) $(2, 1)$

Zestawy C

1. a) 6 b) $\frac{11}{2}$

Zadania w stylu maturalnym

1. **Wierzchołki.** $D = A + \overrightarrow{AD} = (-1, 3)$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = [7, 6]$, $C = (5, 5)$.
2. **Pole.** $|6 \cdot 4 - 2 \cdot 1| = 22$.
3. **Przekątna.** $|AC| = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85}$.
1 pkt za D. 2 pkt za C. 3 pkt za pole 22 (dowolną poprawną metodą). 4 pkt za $\sqrt{85}$.
2. 1. **Punkt M.** $M = A + \frac{2}{3}[6, -6] = (-1 + 4, 3 - 4) = (3, -1)$.
2. **Promień.** prosta $x - y + 6 = 0$: $r = \frac{|3 + 1 + 6|}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.
3. **Równanie.** $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 50$.
1 pkt za zapis $x_M = x_A + \frac{2}{3}(x_B - x_A)$ (i analogicznie y_M). 2 pkt za $M = (3, -1)$. 3 pkt za $r = 5\sqrt{2}$. 4 pkt za równanie.
3. 1. **Warunek.** $(m - 1)(m + 4) - 3 \cdot 2 = 0$.
2. **Równanie.** $m^2 + 3m - 10 = 0$.
3. **Wynik.** $m = 2$ albo $m = -5$.
1 pkt za warunek równoległości. 2 pkt za równanie kwadratowe. 3 pkt za oba rozwiązania.

Matura z matematyki · Lekcja 9.4: Wektory · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt9_4.py).