

Prosta i okrąg, dwa okręgi, styczna i prosta prostopadła

Na poziomie rozszerzonym geometria analityczna to wyłącznie zadania otwarte za 3–6 punktów, często z dopiskiem „Rozważ wszystkie przypadki”. W maju 2025 zadanie z dwoma okręgami rozwiązało 23% zdających, w maju 2026 zadanie z trójkątem i okręgiem 33%. Układy równań z prostą i okręgiem były w lekcji 4.2 Układy równań z równaniem kwadratowym. Tu dochodzą narzędzia, które skracają rachunek: odległość punktu od prostej, styczna prostopadła do promienia, symetralna jako zbiór punktów równo odległych i położenie dwóch okręgów.

CZAS

ok. 40 min
czytania + ok. 60
min zadań

ZADANIA

4 zadania w
treści, próbka
treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
IX.R1, IX.R2,
IX.R4

W TEJ LEKCJI

- 0 Odległość zamiast układu
- 1 Odległość punktu od prostej
- 2 Styczna i symetralna
- 3 Dwa okręgi
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Odległość zamiast układu

Czy prosta przecina okrąg, można sprawdzić układem równań i wyróżnikiem. Szybciej jest porównać odległość d środka okręgu od prostej z promieniem r : $d < r$ to dwa punkty wspólne, $d = r$ to styczność, $d > r$ to brak punktów wspólnych. Tak samo dla dwóch okręgów: porównuje się odległość środków z sumą i różnicą promieni. Zamiast rozwiązywać równanie kwadratowe z parametrem, dostaje się jedno równanie z wartością bezwzględną.

Odległość punktu od prostej

WZÓR (W BROSZURZE CKE)

$$d(P, Ax + By + C = 0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad P = (x_0, y_0).$$

- Prosta jest styczna do okręgu o środku S i promieniu $r \iff d(S, \text{prosta}) = r$.
- Cięciwa wycięta z okręgu przez prostą w odległości $d < r$ od środka ma długość $2\sqrt{r^2 - d^2}$.
- Przed użyciem wzoru prostą trzeba zapisać w postaci ogólnej.

Przykład 1.1

Odległość

Oblicz odległość punktu $P = (3, -1)$ od prostej $4x - 3y + 5 = 0$.

$$1 \quad d = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{20}{5}.$$

Wynik: $d = 4$.

Przykład 1.2

Styczna z parametrem

Dla jakich m prosta $y = x + m$ jest styczna do okręgu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$?

- 1 Postać ogólna: $x - y + m = 0$; środek $S = (1, 2)$, $r = 2\sqrt{2}$.
- 2 $\frac{|1-2+m|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, czyli $|m - 1| = 4$.

Wynik: $m = 5$ albo $m = -3$ (dwie styczne równoległe).

Przykład 1.3

Długość cięciwy

Oblicz długość cięciwy, którą prosta $3x + 4y - 15 = 0$ wycina z okręgu $x^2 + y^2 = 25$.

- 1 $d = \frac{|-15|}{5} = 3$.
- 2 Połowa cięciwy: $\sqrt{25 - 9} = 4$.

Wynik: 8.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 6 min

- 1 Oblicz odległość początku układu od prostej $5x + 12y - 26 = 0$.

- 2 Dla jakich k prosta $y = kx$ jest styczna do okręgu $(x - 5)^2 + y^2 = 9$?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

2 Styczna i symetralna

DWA FAKTY, KTÓRE ZASTĘPUJĄ RACHUNEK

- Styczna w punkcie A okręgu jest prostopadła do promienia SA . Wektor $\overrightarrow{SA} = [p, q]$ daje od razu postać ogólną stycznej: $p(x - x_A) + q(y - y_A) = 0$.
- Symetralna odcinka AB to zbiór punktów równo odległych od A i B : prosta prostopadła do AB przez jego środek. Środek okręgu przez A i B leży na symetralnej AB ; wierzchołek trójkąta równoramiennego o podstawie AB też.

Przykład 2.1

Styczna w punkcie

Wyznacz równanie stycznej do okręgu $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ w punkcie $A = (5, 3)$.

- 1 Sprawdzenie: $9 + 16 = 25$, więc A leży na okręgu.
- 2 $\overrightarrow{SA} = [3, 4]$: styczna $3(x - 5) + 4(y - 3) = 0$.

Wynik: $3x + 4y - 27 = 0$.

Przykład 2.2

Punkt równo odległy

Na prostej $y = x$ znajdź punkt C równo odległy od $A = (1, 2)$ i $B = (5, -6)$.

- 1 Środek AB : $(3, -2)$; $a_{AB} = \frac{-8}{4} = -2$, więc symetralna ma $a = \frac{1}{2}$: $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.
- 2 Przecięcie z $y = x$: $x = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$, $x = -7$.

Wynik: $C = (-7, -7)$. Kontrola: $|AC|^2 = 64 + 81 = 145 = 144 + 1 = |BC|^2 \checkmark$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

1 zadanie · ok. 2 min

- 1 Wyznacz równanie stycznej do okręgu $x^2 + y^2 = 10$ w punkcie $(1, 3)$.

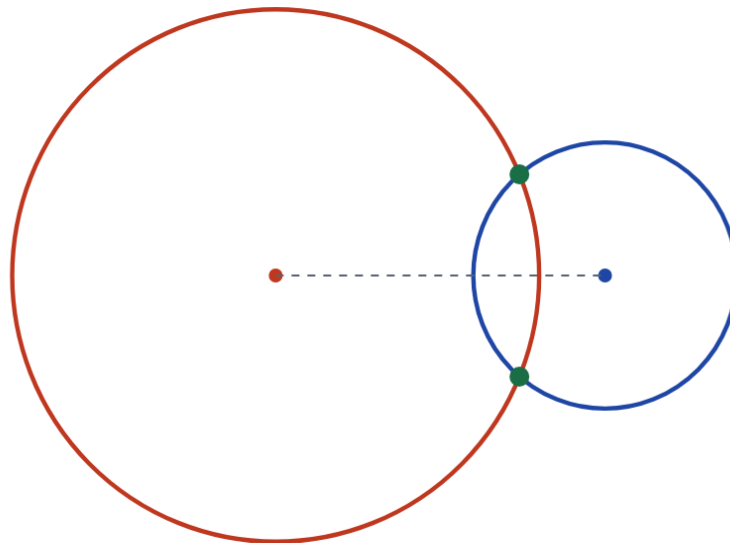
3 Dwa okręgi

POŁOŻENIE (ODLEGŁOŚĆ ŚRODKÓW d , PROMIENIE $r_1 \geq r_2$)

- $d > r_1 + r_2$: rozłączne zewnętrznie; $d = r_1 + r_2$: styczne zewnętrznie;
- $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$: przecinają się w dwóch punktach;
- $d = r_1 - r_2 > 0$: styczne wewnętrznie; $d < r_1 - r_2$: jeden wewnątrz drugiego.

Gdy okręgi się przecinają, odjęcie ich równań daje prostą przez oba punkty wspólne (lekcja 4.2 Układy równań z równaniem kwadratowym).

SYMULACJA 1 Zmieniaj promień i odległość środków. Odczyt pokazuje, który z pięciu przypadków zachodzi, i porównuje d z $r_1 + r_2$ oraz $r_1 - r_2$. Zwróć uwagę na dwie styczności: zewnętrzną i wewnętrzną.



okrąg 1 okrąg 2 punkty wspólne

d 5,0

$r_1 + r_2$ 6,0

$|r_1 - r_2|$ 2,0

położenie **przecinają się**

punkty wspólne 2

Porównaj $d = 5,0$ z sumą $6,0$ i różnicą $2,0$ promieni. Okręgi przecinają się dokładnie wtedy, gdy $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$.

Stan na rysunku: $r_1 = 4,0$, $r_2 = 2,0$, $d = 5,0$; przecinają się.

- 1 Określ położenie okręgów $x^2 + y^2 = 4$ i $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$.

podstawowe średnie trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 15 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · ODLEGŁOŚCI

ZESTAWY A

- 1 Oblicz odległość.

a) $(1, 2)$ od $3x - 4y + 10 = 0$ b) między prostymi
 $y = 2x + 1$ i $y = 2x + 6$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM B · POŁOŻENIE

ZESTAWY B

- 1 Określ położenie.

a) $y = x + 4$ i $x^2 + y^2 = 8$ b) $x^2 + y^2 = 16$ i
 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM C · STYCZNE I SYMETRALNE

ZESTAWY C

1 Wyznacz.



a) styczna do $x^2 + y^2 = 25$
w punkcie $(3, 4)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Pełny trening (15 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

W arkuszach rozszerzonych 2024–2026 ta lekcja daje jedno duże zadanie otwarte w sesji. Schemat oceniania przyznaje punkty za kolejne obiekty: współczynnik kierunkowy, symetralna albo prosta wspólna dwóch okręgów, równanie z jedną niewiadomą, wynik. Stałe uwagi z kluczy: odwrócony stosunek podziału odcinka albo błędnie wybrany punkt ogranicza wynik; założenie prostopadłości bez uzasadnienia daje co najwyżej 2 punkty; punkt podany bez sprawdzenia rachunkiem nie dostaje punktów. Jeśli treść mówi „rozważ wszystkie przypadki”, trzeba podać wszystkie rozwiązania. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 14 pkt · ok. 45 min

1 (0–4 pkt) Środek okręgu leży na prostej $y = 2x$, okrąg jest styczny do osi Ox i przechodzi przez punkt $A = (3, 2)$. Wyznacz równanie tego okręgu. Rozważ wszystkie przypadki.

2 (0–4 pkt) Dane są punkty $A = (-2, 1)$ i $B = (4, 5)$. Punkt C leży na prostej $x + y - 1 = 0$, a trójkąt ABC jest równoramienny o podstawie AB . Oblicz współrzędne C i pole trójkąta ABC .

3 (0–3 pkt) Wyznacz równania stycznych do okręgu $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ równoległych do prostej $y = 2x$.

4 (0–3 pkt) Oblicz długość cięciwy, którą prosta $x - y + 1 = 0$ wycina z okręgu $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

- × „Odległość od prostej $y = 2x + 1$: wstawiam $A = 2, B = 1$.”

Najpierw postać ogólna: $2x - y + 1 = 0$, czyli $A = 2, B = -1, C = 1$.

- × „Styczne do okręgu równoległe do danej prostej: jest jedna.”

Zawsze dwie, symetryczne względem środka okręgu. Równanie z wartością bezwzględną daje oba wyniki.

- × „Okręgi o $d < r_1 + r_2$ się przecinają.”

Tylko gdy dodatkowo $d > r_1 - r_2$. Inaczej jeden okrąg leży wewnątrz drugiego albo są styczne wewnętrznie.

- × „Znalazłem jeden okrąg, koniec zadania.”

Równanie kwadratowe z parametrem zwykle ma dwa rozwiązania. Jeśli oba spełniają warunki zadania, trzeba podać oba.

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Prosta jest w odległości 3 od środka okręgu o promieniu 5. Jak długa jest cięciwa?

$$2\sqrt{25 - 9} = 8.$$

- 2 Gdzie leży środek okręgu przechodzącego przez A i B ?

Na symetralnej odcinka AB .

- 3 Okręgi o promieniach 7 i 3, odległość środków 4. Położenie?

$d = 7 - 3$: styczne wewnętrznie.

- 4 Styczna do $x^2 + y^2 = 25$ w punkcie $(-3, 4)$?

$$-3x + 4y = 25.$$

PROSTA I OKRĄG

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

styczna: $d = r$; cięciwa $2\sqrt{r^2 - d^2}$

styczna w A : $\overrightarrow{SA}$ jest jej wektorem normalnym

DWA OKRĘGI

d vs $r_1 + r_2$ i $r_1 - r_2$

symetralna: punkty równo odległe od A i B

odjęcie równań: prosta przez punkty wspólne

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” jest wzór na odległość punktu od prostej, równanie okręgu w obu postaciach i warunki prostopadłości prostych. Warunków położenia dwóch okręgów ani wzoru na długość cięciwy w tej postaci tam nie ma.

Dalej: wektory (lekcja 9.4 Wektory).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\frac{26}{13} = 2$.
2. $kx - y = 0$: $\frac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3$, $25k^2 = 9k^2 + 9$, $k = \pm \frac{3}{4}$.

Zadania • część 2

1. $\overrightarrow{SA} = [1, 3]$: $(x - 1) + 3(y - 3) = 0$, czyli $x + 3y = 10$.

Zadania • część 3

1. $d = 5 = 2 + 3$: styczne zewnętrznie.

Zestawy A

1. a) 1 b) $\sqrt{5}$

Zestawy B

1. a) styczne ($d = 2\sqrt{2} = r$) b) jeden wewnątrz drugiego ($1 < 3$)

Zestawy C

1. a) $3x + 4y = 25$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Środek i promień. $S = (a, 2a)$; styczność z Ox : $r = |2a|$.
2. Warunek. $|SA| = r$: $(3 - a)^2 + (2 - 2a)^2 = 4a^2$.
3. Równanie. $a^2 - 14a + 13 = 0$: $a = 1$ albo $a = 13$.
4. Wynik. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ albo $(x - 13)^2 + (y - 26)^2 = 676$.
1 pkt za $S = (a, 2a)$ i $r = |2a|$. **2 pkt** za równanie z niewiadomą a . **3 pkt** za $a \in \{1, 13\}$. **4 pkt** za oba równania.
2. 1. Symetralna AB . środek $M = (1, 3)$, $a_{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, więc $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$.
2. Punkt C . z $x + y = 1$: $x - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 1$, $x = 7$, $C = (7, -6)$.
3. Pole. $|AB| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, $|MC| = \sqrt{36 + 81} = 3\sqrt{13}$, $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13} = 39$.
1 pkt za środek AB i współczynnik symetralnej. **2 pkt** za równanie symetralnej. **3 pkt** za C . **4 pkt** za pole 39.
3. 1. Szukane proste. $y = 2x + m$, czyli $2x - y + m = 0$.
2. Styczność. $\frac{|4-1+m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, $|m + 3| = 5$.
3. Wynik. $y = 2x + 2$ albo $y = 2x - 8$.
1 pkt za postać $y = 2x + m$. **2 pkt** za równanie $|m + 3| = 5$. **3 pkt** za obie styczne.
4. 1. Odległość środka. $d = \frac{|3-2+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
2. Połowa cięciwy. $\sqrt{10 - 2} = 2\sqrt{2}$.
3. Wynik. $4\sqrt{2}$.

1 pkt za $d = \sqrt{2}$. **2 pkt** za trójkąt prostokątny z r , d i połową cięciwy. **3 pkt** za $4\sqrt{2}$. Droga przez układ równań też jest akceptowana.

Matura z matematyki · Lekcja 9.3: Prosta i okrąg, dwa okręgi, styczna i prosta prostopadła · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt9_3.py).