

Odległość, równanie okręgu i symetrie

To jeden z najczęstszych tematów zadań zamkniętych w arkuszu podstawowym: w maju 2025 i 2026 trzy zadania z tej lekcji miały poziom wykonania 61–70%. Punkty traci się głównie na znakach. W równaniu $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$ środek to $(2, -4)$, a promień to $\sqrt{20}$, nie 20. Ta lekcja ćwiczy dokładnie te odczyty, a do tego odległość, środek odcinka i współrzędne obrazów w symetriach.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

9 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
IX.3, IX.4, IX.5

W TEJ LEKCJI

- 0 Twierdzenie Pitagorasa w układzie współrzędnych
- 1 Odległość i środek odcinka
- 2 Równanie okręgu
- 3 Symetrie
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Twierdzenie Pitagorasa w układzie współrzędnych

Odcinek między punktami A i B jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $|x_B - x_A|$ i $|y_B - y_A|$. Stąd wzór na odległość. Okrąg o środku S i promieniu r to zbiór punktów odległych od S dokładnie o r ; jego równanie to po prostu ten wzór podniesiony do kwadratu. Symetrie zmieniają znaki współrzędnych, więc obraz okręgu ma ten sam promień i środek w odbitym punkcie.

Odległość i środek odcinka

WZORY (W BROSZURZE CKE)

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \quad S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Gdy znany jest środek S i jeden koniec A , drugi koniec to $B = (2x_S - x_A, 2y_S - y_A)$.

Przykład 1.1

Długość i środek

Oblicz długość odcinka o końcach $A = (-1, 2)$, $B = (5, -6)$ i współrzędne jego środka.

1 $|AB| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100}.$

2 $S = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2-6}{2} \right).$

Wynik: $|AB| = 10$, $S = (2, -2)$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 5 min

1 Oblicz odległość punktów $(2, 3)$ i $(5, 7)$.

2 Punkty $A = (1, 1)$ i $B = (4, -3)$ są kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Oblicz obwód i długość przekątnej kwadratu.

3 Punkt $C = (x, 4)$ leży w odległości 5 od punktu $A = (1, 0)$. Oblicz x .

2 Równanie okręgu

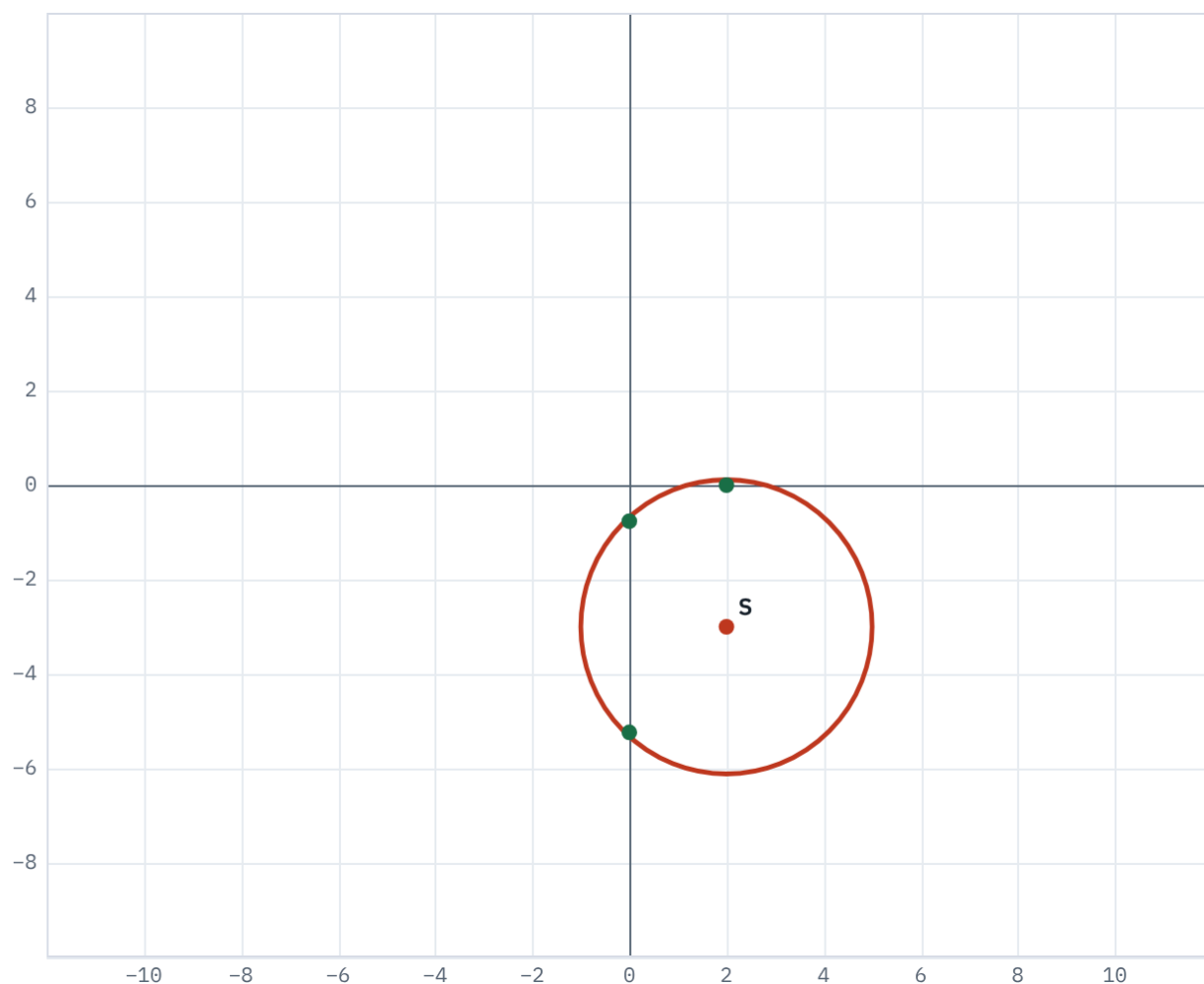
🔑 POSTAĆ KANONICZNA (W BROSZURZE CKE)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{środek } S = (a, b), \text{ promień } r > 0.$$

- W nawiasach są **minusy**: $(x + 3)^2$ oznacza $a = -3$.
- Po prawej stoi r^2 : dla $r^2 = 20$ promień to $2\sqrt{5}$.
- Okrąg przecina oś Ox , gdy $|b| < r$; jest do niej styczny, gdy $|b| = r$; nie ma z nią punktów wspólnych, gdy $|b| > r$. Dla osi Oy porównuje się $|a|$ z r .

SYMULACJA 1

Ustaw środek (a, b) i promień okręgu. Odczyt pokazuje równanie w postaci kanonicznej i liczbę punktów wspólnych z każdą osią. Przełącznik symetrii rysuje obraz okręgu względem osi Ox , osi Oy albo początku układu: promień się nie zmienia, zmieniają się znaki współrzędnych środka.



— okrąg — obraz w symetrii — punkty wspólne z osiami

równanie $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

środek, promień $(2, -3)$; $r = 3$

punkty wspólne z Ox 1 (styczność) ($|b| = 3$, $r \approx 3,00$)

punkty wspólne z Oy 2 ($|a| = 2$)

W nawiasach stoją liczby przeciwne do współrzędnych środka, a po prawej stronie r^2 , nie r . Okrąg przecina oś Ox , gdy $|b| < r$, i oś Oy , gdy $|a| < r$.

Stan na rysunku: okrąg $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

Przykład 2.1

Środek i punkt okręgu

Wyznacz równanie okręgu o środku $S = (2, -1)$ przechodzącego przez punkt $P = (5, 3)$.

1 $r = |SP| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

Wynik: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25.$

Przykład 2.2

Postać rozwinięta (poziom rozszerzony)

Wyznacz środek i promień okręgu $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0.$

1 Uzupełnienie do kwadratów: $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$, $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4.$

2 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 3 + 9 + 4 = 16.$

Wynik: $S = (3, -2)$, $r = 4$. Na poziomie podstawowym równanie okręgu jest podawane w postaci kanonicznej.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 6 min

1 Odcinek o końcach $A = (-1, 4)$ i $B = (5, -4)$ jest średnicą okręgu. Wyznacz równanie okręgu.

2 Ile punktów wspólnych z każdą z osi ma okrąg $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$?

3 Czy punkt $(0, 1)$ leży na okręgu $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$?

■□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

OBRAZ PUNKTU (x, y) (W BROSZURZE CKE)

- względem osi Ox : $(x, -y)$;
- względem osi Oy : $(-x, y)$;
- względem początku układu O : $(-x, -y)$;
- względem punktu $K = (p, q)$: $(2p - x, 2q - y)$ (K jest środkiem odcinka między punktem a obrazem).

Obraz okręgu to okrąg o tym samym promieniu i środku w obrazie środka. Obraz prostej: w jej równaniu zamienia się y na $-y$ (symetria względem Ox) albo x na $-x$ (względem Oy).

Przykład 3.1

Obraz okręgu

Wyznacz równanie obrazu okręgu $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 5$ w symetrii względem osi Oy .

- 1 Środek $(1, -4)$ przechodzi na $(-1, -4)$; promień bez zmian.

Wynik: $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 5$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 4 min

- 1 Podaj obraz punktu $P = (3, -5)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych.

- 2 Podaj obraz punktu $P = (3, -5)$ w symetrii względem punktu $K = (1, 2)$.

- 3 Wyznacz równanie obrazu prostej $y = 2x + 3$ w symetrii względem osi Ox .

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 18 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · ODCINKI

ZESTAWY A

1 Oblicz.



a) $|AB|$ dla $(0, 0)$ i $(6, 8)$

b) $A = (2, -1)$, środek AB
to $(5, 3)$; B

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

POZIOM B · OKRĘGI

ZESTAWY B

1 Podaj środek i promień albo równanie okręgu.



a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$

b) średnica od $(0, 0)$ do
 $(6, 8)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

POZIOM C · SYMETRIE

ZESTAWY C

1 Podaj obraz.



a) $(-4, 7)$ względem Ox

b) okrąg
 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$
względem O

... pozostałe przykłady na stronie treningu

Pełny trening (18 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

W arkuszach podstawowych 2024–2026 ta lekcja daje kilka zadań zamkniętych w każdej sesji: równanie okręgu z danych (środek i punkt, średnica), obraz okręgu w symetrii, położenie okręgu względem osi, obwód kwadratu z dwóch wierzchołków. Dystraktory w odpowiedziach to prawie zawsze r zamiast r^2 i zamienione znaki. W informatorze i próbnych arkuszach jest też zadanie otwarte za 4 punkty, które łączy kwadrat, symetrię i okrąg. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 8 pkt · ok. 20 min

- 1 (0–1 pkt) Okrąg o środku $S = (-2, 3)$ przechodzi przez początek układu współrzędnych. Równanie tego okręgu to

A. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

C. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \sqrt{13}$

B. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$

D. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \sqrt{13}$
- 2 (0–1 pkt) Obrazem okręgu $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 7$ w symetrii względem osi Ox jest okrąg

A. $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 7$

C. $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 7$

B. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 7$

D. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 49$
- 3 (0–1 pkt) Dany jest okrąg $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$. Oceń prawdziwość zdań.

1. Okrąg nie ma punktów wspólnych z osią Ox . P F

2. Okrąg jest styczny do osi Oy . P F
- 4 (0–1 pkt) Uzupełnij zdanie. Punkty $A = (-2, -1)$ i $C = (4, 7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Bok tego kwadratu ma długość _____.
- 5 (0–4 pkt) Punkty $A = (1, -2)$ i $C = (7, 6)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Kwadrat $A'B'C'D'$ jest obrazem kwadratu $ABCD$ w symetrii względem osi Ox . Wyznacz równanie okręgu wpisanego w kwadrat $A'B'C'D'$.

Najczęstsze błędy

- × „ $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ ma środek $(3, -1)$.”

Środek ma współrzędne przeciwne do liczb w nawiasach: $(-3, 1)$.

- × „Promień okręgu $(x - 2)^2 + y^2 = 20$ to 20.”

Po prawej jest r^2 : $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

- × „Symetria względem osi Ox zmienia znak x .”

Zmienia znak y : punkt odbija się w pionie, przez oś Ox . Odległość od osi Ox to $|y|$.

- × „Obraz okręgu w symetrii ma inny promień.”

Symetria zachowuje odległości: promień jest ten sam, przesuwa się tylko środek.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jaki jest środek i promień okręgu $x^2 + (y + 5)^2 = 3$?

$(0, -5)$ i $\sqrt{3}$.

- 2 Obraz punktu $(-2, 6)$ względem osi Oy ?

$(2, 6)$.

- 3 Okrąg o środku $(4, -3)$ jest styczny do osi Ox . Ile wynosi promień?

3.

- 4 Odległość punktu $(6, 8)$ od początku układu?

10.

ODCINEK I OKRĄG
 $|AB| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$; środek: średnie

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

 oś Ox : porównaj $|b|$ z r ; oś Oy : $|a|$ z r
SYMETRIE
 $Ox: (x, -y)$; $Oy: (-x, y)$; $O: (-x, -y)$

 względem $K: (2p - x, 2q - y)$

 okrąg: odbijasz środek, r bez zmian

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są wzory na długość odcinka i środek odcinka, równanie okręgu w postaci kanonicznej (i rozwiniętej) oraz współrzędne obrazów w symetriach względem osi, początku układu i dowolnego punktu.

Dalej: prosta i okrąg, dwa okręgi, styczne (lekcja 9.3 Prosta i okrąg, dwa okręgi, styczna i prosta prostopadła, poziom rozszerzony) albo stereometria (lekcja 10.1 Proste, płaszczyzny i kąty w przestrzeni).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\sqrt{9+16} = 5$.
2. Bok $|AB| = \sqrt{9+16} = 5$: obwód 20, przekątna $5\sqrt{2}$.
3. $(x-1)^2 + 16 = 25$, $(x-1)^2 = 9$: $x = 4$ albo $x = -2$.

Zadania • część 2

1. Środek $(2, 0)$, promień $\frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$: $(x-2)^2 + y^2 = 25$.
2. $S = (-3, 1)$, $r = 3$. Oś Ox : $|b| = 1 < 3$, dwa punkty. Oś Oy : $|a| = 3 = r$, jeden punkt (styczność).
3. Tak: $9 + 0 = 9$ (to właśnie punkt styczności z osią Oy).

Zadania • część 3

1. $(-3, 5)$.
2. $(2 \cdot 1 - 3, 2 \cdot 2 + 5) = (-1, 9)$.
3. $-y = 2x + 3$, czyli $y = -2x - 3$.

Zestawy A

1. a) 10 b) $(8, 7)$

Zestawy B

1. a) $(3, -5)$, $r = 4$ b) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

Zestawy C

1. a) $(-4, -7)$ b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$

Zadania w stylu maturalnym

1. A. $r^2 = |SO|^2 = 4 + 9$.
2. B. Środek $(4, -1) \rightarrow (4, 1)$.
3. PP. $r = 2$; odległość środka od Ox to $3 > 2$, od Oy to $2 = r$.
4. $5\sqrt{2}$: przekątna $|AC| = 10$, bok $\frac{10}{\sqrt{2}}$.
5. 1. Środek kwadratu. środek AC : $S = (4, 2)$.
2. Bok. $|AC| = \sqrt{36 + 64} = 10$, bok $5\sqrt{2}$, promień okręgu wpisanego $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $r^2 = \frac{25}{2}$.
3. Obraz. $S' = (4, -2)$; promień się nie zmienia.
4. Równanie. $(x-4)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{2}$.
1 pkt za S albo $|AC|$. 2 pkt za S i r . 3 pkt za S' i r . 4 pkt za równanie.

