

Prosta na płaszczyźnie

Geometria analityczna zamienia rysunek na rachunek: prosta to równanie, punkt przecięcia to rozwiązanie układu, równoległość to równe współczynniki. W arkuszu podstawowym jest tu prawie zawsze zadanie zamknięte o prostych równoległych z parametrem (w maju 2025 rozwiązało je 79% zdających) i czasem zadanie otwarte z czworokątem: punkt przecięcia boków, potem środek odcinka. Funkcję liniową znasz z lekcji 5.2 Funkcja liniowa; tu ta sama wiedza służy do opisu figur.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

9 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
IX.1, IX.2

W TEJ LEKCJI

- 0 Prosta jako równanie
- 1 Równanie prostej
- 2 Proste równoległe i prostopadłe
- 3 Punkt przecięcia i figury
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Prosta jako równanie

Punkt (x, y) leży na prostej wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają jej równanie. Z tej jednej zasady wynika cała lekcja. Sprawdzenie, czy punkt leży na prostej, to podstawienie. Punkt wspólny dwóch prostych to rozwiązanie układu dwóch równań. A to, czy proste są równoległe albo prostopadłe, widać z samych współczynników, bez rysowania.

1

Równanie prostej

DWIE POSTACIE (W BROSZURZE CKE)

- **Kierunkowa:** $y = ax + b$; $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ dla prostej przez A i B , b to punkt przecięcia z osią Oy . Nie opisuje prostych pionowych.
- **Ogólna:** $Ax + By + C = 0$, gdzie A i B nie są jednocześnie zerami. Opisuje każdą prostą, także pionową $x = c$. Dla $B \neq 0$: $a = -\frac{A}{B}$.
- Prosta przez punkt $P = (x_0, y_0)$ o współczynniku a : $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Przykład 1.1

Prosta przez dwa punkty

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-1, 5)$ i $B = (3, -3)$ w postaci kierunkowej i ogólnej.

- 1 $a = \frac{-3-5}{3-(-1)} = \frac{-8}{4} = -2$.
- 2 Podstawienie A : $5 = -2 \cdot (-1) + b$, więc $b = 3$.

Wynik: $y = -2x + 3$, czyli $2x + y - 3 = 0$.

Sprawdzenie dla B : $-2 \cdot 3 + 3 = -3 \checkmark$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 5 min

- 1 Wyznacz równanie prostej przez punkty $(2, 1)$ i $(6, 9)$.

- 2 Wyznacz równanie prostej przez punkty $(4, -2)$ i $(4, 7)$.

3 Zapisz prostą $3x - 2y + 6 = 0$ w postaci kierunkowej.



▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

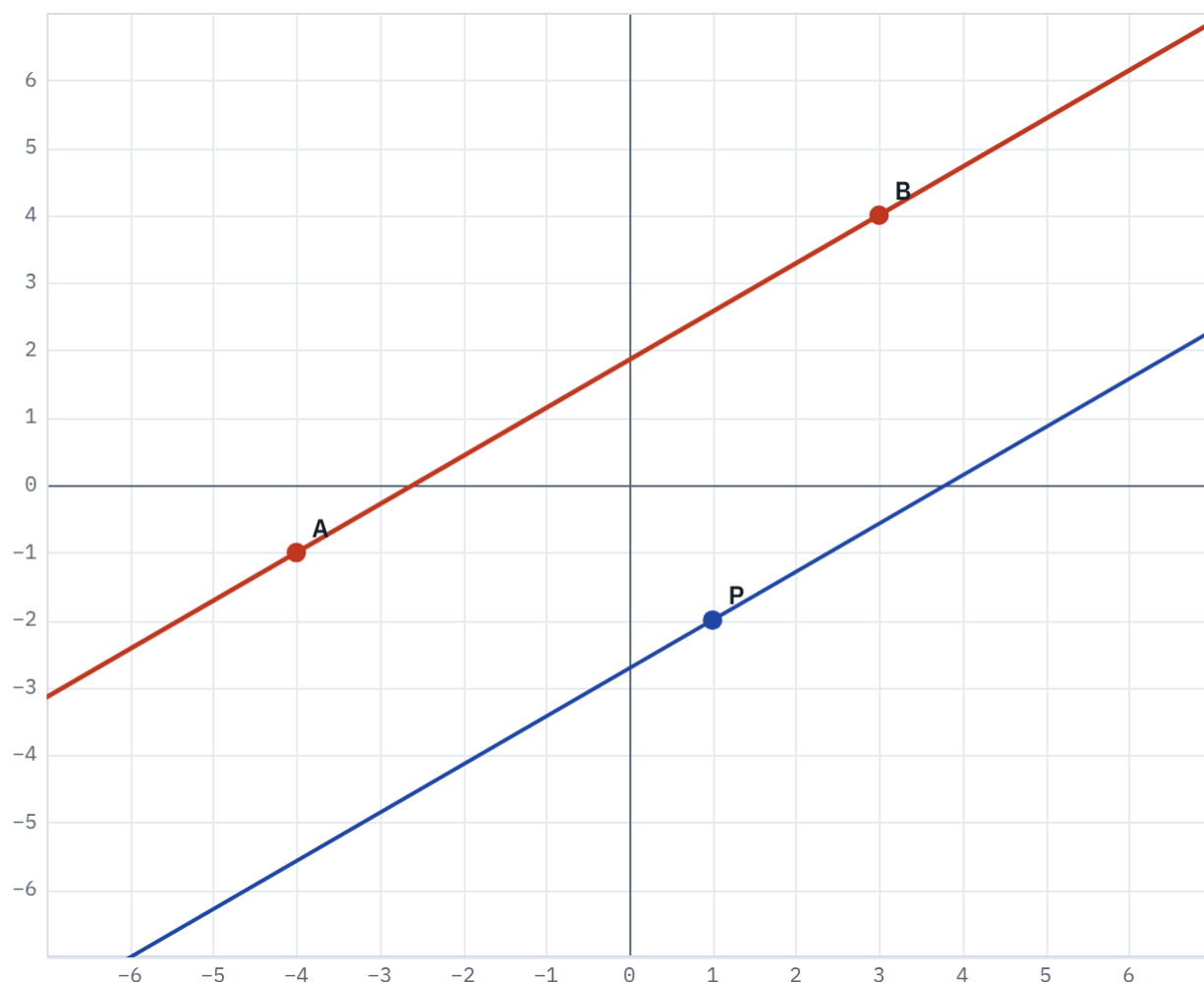
2 Proste równoległe i prostopadłe

🔊 WARUNKI (W BROSZURZE CKE)

- Postać kierunkowa: równoległe $\iff a_1 = a_2$; prostopadłe $\iff a_1 \cdot a_2 = -1$.
- Postać ogólna: równoległe $\iff A_1B_2 - A_2B_1 = 0$; prostopadłe $\iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

W zadaniu z parametrem w postaci ogólnej najszybciej jest użyć warunku dla postaci ogólnej. Przejście na postać kierunkową też działa, ale wymaga dzielenia przez współczynnik przy y .

SYMULACJA 1 Przesuwaj punkty A i B : odczyt pokazuje równanie prostej AB w obu postaciach. Przez punkt P rysuje się prosta równoległa albo prostopadła do AB (przełącznik). Zauważ, że współczynniki kierunkowe prostych prostopadłych mają przeciwne znaki i są swoimi odwrotnościami.



— prosta AB — prosta przez P — punkt przecięcia

współczynnik AB $5/7$

AB (kierunkowa) $y = (5/7)x + 13/7$

AB (ogólna) $5x - 7y + 13 = 0$

prosta przez P $y = (5/7)x - 19/7$; $5x - 7y - 19 = 0$

współczynnik prostej przez P $5/7$

Prosta równoległa ma ten sam współczynnik kierunkowy (w postaci ogólnej: te same A i B, inne C).

Stan na rysunku: $A = (-4, -1)$, $B = (3, 4)$, $AB: 5x - 7y + 13 = 0$; prosta przez P: $5x - 7y - 19 = 0$.

Przykład 2.1

Prosta prostopadła przez punkt

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do $y = 2x - 1$ i przechodzącej przez $P = (4, 1)$.

1 $a \cdot 2 = -1$, więc $a = -\frac{1}{2}$.

2 $1 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$, $b = 3$.

Wynik: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Przykład 2.2

Parametr w postaci ogólnej

Dla jakiej wartości m proste $(m + 1)x - 2y + 3 = 0$ i $3x - y + 1 = 0$ są równoległe?

1 $A_1B_2 - A_2B_1 = (m + 1) \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = -m - 1 + 6$.

2 $-m + 5 = 0$.

Wynik: $m = 5$. Kontrola: pierwsza prosta to $6x - 2y + 3 = 0$, czyli $y = 3x + \frac{3}{2}$; druga $y = 3x + 1 \checkmark$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 6 min

1 Dla jakiego m prosta $y = (2m - 1)x + 4$ jest prostopadła do prostej $y = \frac{1}{3}x - 2$?

2 Wyznacz równanie prostej równoległej do $4x + 2y - 5 = 0$ przechodzącej przez $(1, 3)$.

3 Dla jakiego m proste $mx + 4y - 1 = 0$ i $2x - y + 7 = 0$ są prostopadłe?

□□□ podstawowe ▣▣▣ średnie ▤▤▤ trudniejsze

3 Punkt przecięcia i figury

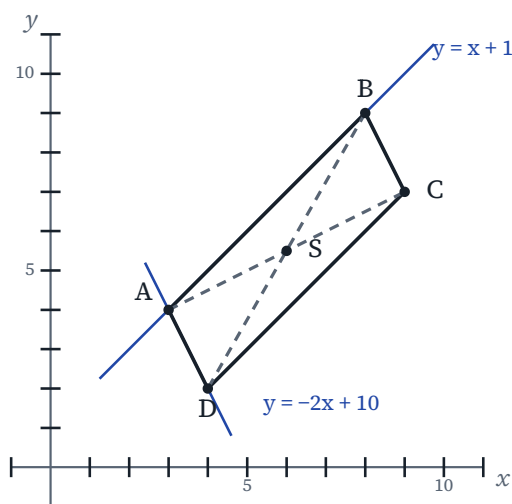
DWA NARZĘDZIA

- Punkt wspólny prostych to rozwiązanie układu ich równań (lekcja 4.1 Układy równań liniowych i zadania tekstowe).
- Środek odcinka AB : $S = (\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ (szerzej w lekcji 9.2 Odległość, równanie okręgu i symetrie). W równoległoboku przekątne dzielą się na połowy, więc środek symetrii jest środkiem obu przekątnych.

Przykład 3.1

Równoległobok

W równoległoboku $ABCD$ bok AB leży na prostej $y = x + 1$, bok AD na prostej $y = -2x + 10$, a $C = (9, 7)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków i środka symetrii S .



- 1 A : $x + 1 = -2x + 10$, $x = 3$, $A = (3, 4)$.
- 2 S to środek przekątnej AC : $S = (\frac{3+9}{2}, \frac{4+7}{2}) = (6, \frac{11}{2})$.
- 3 B leży na AB i na prostej przez C równoległej do AD : $y = -2x + 25$. $x + 1 = -2x + 25$, $B = (8, 9)$.
- 4 $D = 2S - B = (12 - 8, 11 - 9) = (4, 2)$. Kontrola: D leży na $y = -2x + 10$ ✓.

Wynik: $A = (3, 4)$, $B = (8, 9)$, $D = (4, 2)$, $S = (6, \frac{11}{2})$.

- 1 Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostych $y = 3x - 5$ i $2x + y - 10 = 0$.
■ ■ ■
- 2 Oblicz współrzędne środka odcinka o końcach $A = (-2, 7)$ i $B = (6, -1)$.
■ ■ ■
- 3 Prosta $y = \frac{1}{2}x + b$ przechodzi przez punkt $(4, 5)$. Punkt $(p, 7)$ też leży na tej prostej.
■ ■ ■ Oblicz b i p .

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 18 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · RÓWNANIE PROSTEJ

ZESTAWY A

- 1 Wyznacz równanie prostej albo zamień postać.
■ ■ ■
a) przez $(0, 2)$ i $(3, 8)$ b) $2x - 5y + 10 = 0$ w postaci kierunkowej
... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

POZIOM B · RÓWNOLEGŁE I PROSTOPADŁE

ZESTAWY B

- 1 Wyznacz prostą albo parametr.
■ ■ ■
a) równoległa do $y = 3x - 2$ przez $(1, 5)$ b) $y = mx + 1$ prostopadła do $y = 4x - 1$
... pozostałe przykłady na stronie treningu

POZIOM C · PRZECIĘCIA I ŚRODKI

ZESTAWY C

1 Oblicz.

- ▮▮▮ a) punkt wspólny $y = x + 2$ i $y = -x + 6$ b) $A = (1, 2)$, środek AB to $(4, 6)$; B

... pozostałe przykłady na stronie treningu

Pełny trening (18 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

W arkuszach podstawowych 2024–2026 dominują zadania zamknięte o prostych równoległych z parametrem, w postaci kierunkowej albo ogólnej, oraz „uzupełnij” z punktem na prostej. Zadania otwarte (3–4 punkty) dotyczą czworokątów: wierzchołek jako punkt przecięcia boków, potem środek przekątnej. W kluczach jedyny błąd w warunku równoległości, we wzorze na współczynnik kierunkowy albo na środek odcinka ogranicza wynik do 1 punktu. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 8 pkt · ok. 20 min

1 (0–1 pkt) Proste o równaniach $y = (m + 2)x - 1$ i $y = -3x + 4$ są równoległe dla

- ▮▮▮ A. $m = -5$ B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m = 5$

2 (0–1 pkt) Proste o równaniach $2mx - 3y + 1 = 0$ i $4x + 6y - 5 = 0$ są prostopadłe dla

- ▮▮▮ A. $m = \frac{9}{4}$ B. $m = -\frac{9}{4}$ C. $m = -1$ D. $m = 1$

3 (0–1 pkt) Uzupełnij zdanie. Prosta l jest równoległa do prostej $y = 3x + 1$ i przechodzi przez punkt $(0, -2)$. Punkt $(p, 7)$ leży na prostej l dla $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

- 4 (0-3 pkt) W równoległoboku $ABCD$ bok AB leży na prostej $y = 2x - 1$, bok AD na prostej $y = -x + 5$, a punkt $S = (5, 3)$ jest środkiem symetrii równoległoboku. Oblicz współrzędne wierzchołków A , C i B .

- 5 (0-2 pkt) Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $3x - 4y + 2 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P = (3, 1)$.

▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀▀ trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

- × „Prostopadłe mają przeciwne współczynniki: $a_2 = -a_1$.”

$a_2 = -\frac{1}{a_1}$: przeciwna i odwrotna. Proste $y = 2x$ i $y = -2x$ przecinają się pod kątem ok. 53° , nie 90° .

- × „W postaci ogólnej współczynnik kierunkowy to A .”

$a = -\frac{A}{B}$. W prostej $4x + 2y - 5 = 0$ współczynnik to -2 , nie 4 .

- × „ $a = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.”

Na górze różnica rzędnych: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (ile rośnie y na jednostkę x).

- × „Punkt D równoległoboku to środek BC .”

Środkiem obu przekątnych jest środek symetrii S . Stąd $D = 2S - B$, a nie żaden środek boku.

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jaki współczynnik kierunkowy ma prosta prostopadła do $y = -\frac{2}{5}x + 1$?

$\frac{5}{2}$.

2 Czy punkt $(2, 5)$ leży na prostej $y = 3x - 1$?

Tak: $3 \cdot 2 - 1 = 5$.

3 Jakie równanie ma prosta równoległa do osi Oy przechodząca przez $(-3, 4)$?

$x = -3$.

4 Kiedy proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe?

Gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

RÓWNANIE

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$Ax + By + C = 0, a = -\frac{A}{B}$$

POŁOŻENIE

$$\parallel: a_1 = a_2 \text{ albo } A_1B_2 = A_2B_1$$

$$\perp: a_1a_2 = -1 \text{ albo } A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

środek: średnie współrzędnych

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są obie postacie równania prostej, równanie prostej przez dwa punkty, warunki równoległości i prostokątności w obu postaciach oraz wzór na odległość punktu od prostej. Wzór na środek odcinka też tam jest.

Dalej: odległość punktów, równanie okręgu i symetrie (lekcja 9.2 Odległość, równanie okręgu i symetrie).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $a = \frac{8}{4} = 2$, $1 = 4 + b$; $y = 2x - 3$.
2. Oba punkty mają tę samą odciętą: prosta pionowa $x = 4$ (nie ma postaci kierunkowej).
3. $2y = 3x + 6$, $y = \frac{3}{2}x + 3$.

Zadania • część 2

1. $(2m - 1) \cdot \frac{1}{3} = -1$, $2m - 1 = -3$, $m = -1$.
2. Współczynnik $-\frac{4}{2} = -2$: $3 = -2 + b$, $y = -2x + 5$.
3. $A_1A_2 + B_1B_2 = 2m + 4 \cdot (-1) = 0$, $m = 2$.

Zadania • część 3

1. $2x + 3x - 5 = 10$, $x = 3$, $y = 4$: $(3, 4)$.
2. $(2, 3)$.
3. $5 = 2 + b$, $b = 3$; $7 = \frac{1}{2}p + 3$, $p = 8$.

Zestawy A

1. a) $y = 2x + 2$ b) $y = \frac{2}{5}x + 2$

Zestawy B

1. a) $y = 3x + 2$ b) $m = -\frac{1}{4}$

Zestawy C

1. a) $(2, 4)$ b) $(7, 10)$

Zadania w stylu maturalnym

1. A. $m + 2 = -3$.
2. A. $2m \cdot 4 + (-3) \cdot 6 = 8m - 18 = 0$.
3. 3: l : $y = 3x - 2$, $7 = 3p - 2$.
4. 1. Wierzchołek A. $2x - 1 = -x + 5$, $A = (2, 3)$.
2. Wierzchołek C. S jest środkiem AC: $C = (2 \cdot 5 - 2, 2 \cdot 3 - 3) = (8, 3)$.
3. Wierzchołek B. prosta $BC \parallel AD$ przez C: $y = -x + 11$; z $y = 2x - 1$: $3x = 12$, $B = (4, 7)$.
1 pkt za A. 2 pkt za C. 3 pkt za B. Kontrola: $D = 2S - B = (6, -1)$ leży na $y = -x + 5$.
5. 1. Współczynnik. dana prosta: $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; prostopadła ma $a = -\frac{4}{3}$.
2. Równanie. $1 = -\frac{4}{3} \cdot 3 + b$, $b = 5$: $y = -\frac{4}{3}x + 5$ (czyli $4x + 3y - 15 = 0$).
1 pkt za $a = -\frac{4}{3}$. 2 pkt za równanie.

