

Czworokąty wpisane i opisane, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Na poziomie rozszerzonym czworokąt wpisany w okrąg albo opisany na okręgu pojawia się praktycznie w każdej sesji 2024–2026, za 4–6 punktów. W maju 2026 zadanie o czworokącie jednocześnie wpisanym i opisanym rozwiązało 50% zdających, co czyni je jednym z łatwiejszych w arkuszu. Wystarczą dwa odruchy: przeciwległe kąty sumują się do 180° , przeciwległe boki mają równe sumy. Potem twierdzenie cosinusów dla wspólnej przekątnej zapisane w dwóch trójkątach.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 60
min zadań

ZADANIA

7 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
VIII.R1, VIII.R2

W TEJ LEKCJI

- 0 Dwa warunki
- 1 Czworokąt wpisany w okrąg
- 2 Czworokąt opisany na okręgu
- 3 Oba warunki naraz
- 4 Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Dwa warunki

Na każdym trójkącie da się opisać okrąg i w każdy trójkąt da się okrąg wpisać. Z czworokątami tak nie jest. Okrąg da się opisać tylko wtedy, gdy przeciwległe kąty dopełniają się do 180° (bo są wpisane i oparte na łukach, które razem dają cały okrąg). Okrąg da się wpisać tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych boków są równe (bo odcinki styczne z każdego wierzchołka są równe). Oba warunki są w broszurze CKE. Zadanie polega na zamianie ich na równania.

Czworokąt wpisany w okrąg

WARUNEK I JEGO KONSEKWENCJE

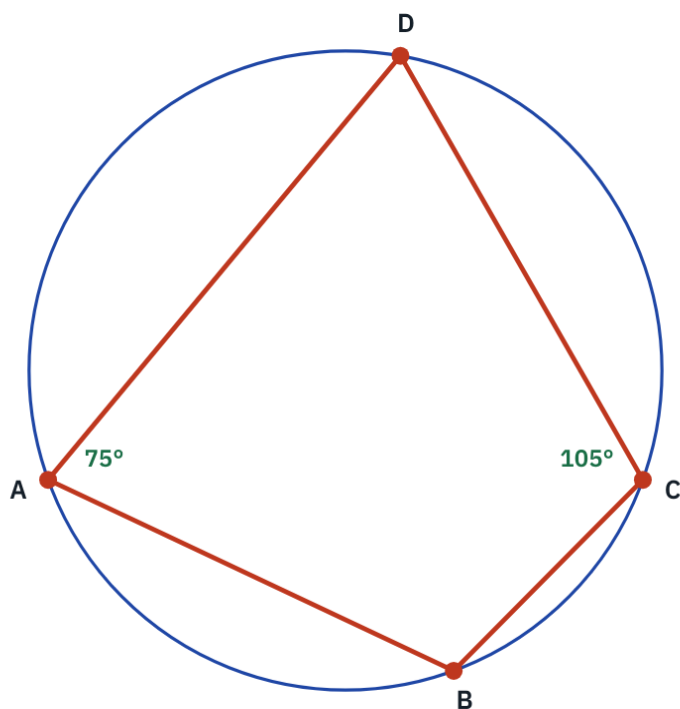
- Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg $\iff \alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.
- Wtedy $\cos \gamma = -\cos \alpha$ i $\sin \gamma = \sin \alpha$. Przekątna BD z dwóch trójkątów:

$$|BD|^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha,$$

gdzie $a = |AB|$, $d = |AD|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$. Jedno równanie, jedna niewiadoma $\cos \alpha$.

- Pole: $P = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin \alpha$; promień z twierdzenia sinusów: $2R = \frac{|BD|}{\sin \alpha}$.
- **Kąt prosty i średnica:** jeśli $\angle ABC = 90^\circ$, to B leży na okręgu o średnicy AC . W czworokącie wpisanym z kątem prostym przy B przekątna AC jest średnicą, a kąt przy D też jest prosty.

SYMULACJA 1 Cztery punkty na okręgu wyznaczają czworokąt wpisany. Przesuwaj je i obserwuj sumy przeciwległych kątów (zawsze 180°) oraz sumy przeciwległych boków. Gdy te drugie się zrównają, czworokąt jest także opisany na okręgu.



— okrąg opisany — czworokąt ABCD — kąty A i C

$$\angle A + \angle C \quad 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D \quad 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$$

$$|AB| + |CD| \quad 2,946 \text{ R}$$

$$|BC| + |DA| \quad 2,577 \text{ R}$$

okrąg wpisany nie istnieje

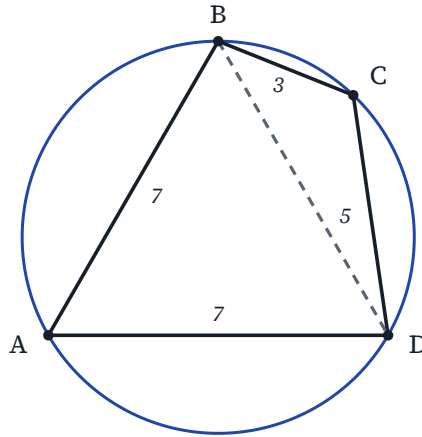
Kąty przeciwległe sumują się zawsze do 180° , bo są kątami wpisanymi opartymi na dwóch łukach, które razem tworzą cały okrąg. Sumy przeciwległych boków na ogół się różnią.

Stan na rysunku: kąty A, B, C, D: 75° , 110° , 105° , 70° ; $|AB| + |CD| = 2,95R$, $|BC| + |DA| = 2,58R$.

Przykład 1.1

Kąt z cosinusów dla wspólnej przekątnej

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, $|AB| = |AD| = 7$, $|BC| = 3$, $|CD| = 5$. Oblicz $\angle BAD$, $|BD|$ i pole czworokąta.



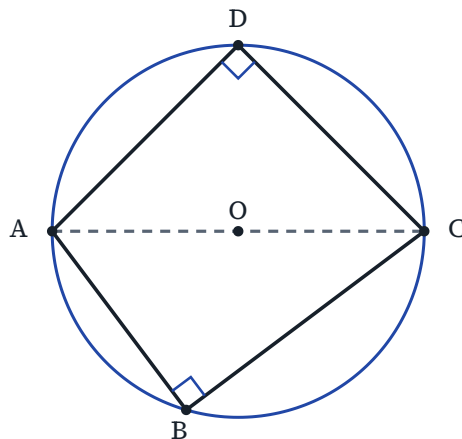
- 1 $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$, więc $\cos \angle BCD = -\cos \alpha$.
- 2 $|BD|^2 = 49 + 49 - 98 \cos \alpha = 9 + 25 + 30 \cos \alpha$, czyli $64 = 128 \cos \alpha$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$.
- 3 $|BD|^2 = 98 - 49 = 49$, $|BD| = 7$.
- 4 $P = \frac{1}{2}(7 \cdot 7 + 3 \cdot 5) \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Wynik: $\angle BAD = 60^\circ$, $|BD| = 7$, $P = 16\sqrt{3}$.

Przykład 1.2

Kąt prosty, czyli średnica

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, $\angle ABC = 90^\circ$, $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $|AD| = |CD|$. Oblicz promień okręgu, $|AD|$ i pole czworokąta.



- 1 Kąt prosty przy B : AC jest średnicą, $|AC| = 10$, $R = 5$.
- 2 $\angle ADC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ i $|AD| = |CD|$: trójkąt prostokątny równoramienny, $|AD| = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.
- 3 $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2})^2 = 24 + 25$.

Wynik: $R = 5$, $|AD| = 5\sqrt{2}$, $P = 49$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 5 min

- 1 Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 110^\circ$. Oblicz $\angle C$ i $\angle D$.
- 2 Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, $\angle ABC = 90^\circ$, $|AB| = 5$, $|BC| = 12$. Oblicz promień okręgu.
- 3 Kąty czworokąta $ABCD$ mają kolejno miary 80° , 100° , 110° , 70° . Czy da się na nim opisać okrąg?

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

Czworokąt opisany na okręgu

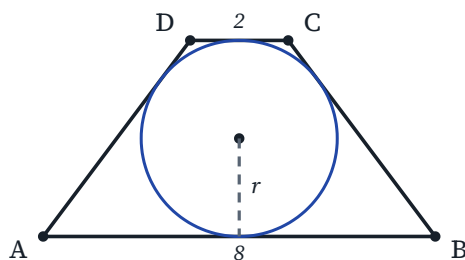
WARUNEK I POLE

- W czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg $\iff |AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.
- Pole czworokąta opisanego: $P = p \cdot r$, gdzie p to połowa obwodu (tak samo jak w trójkącie).
- W trapezie opisanym wysokość jest średnicą okręgu: $h = 2r$, a suma podstaw jest równa sumie ramion.

Przykład 2.1

Trapez opisany

Trapez równoramienny o podstawach 8 i 2 jest opisany na okręgu. Oblicz ramię, promień okręgu i pole trapezu.



- $8 + 2 = 2c$, więc ramię $c = 5$.
- Rzut ramienia: $\frac{8-2}{2} = 3$, wysokość $h = \sqrt{25 - 9} = 4$, czyli $r = 2$.
- $P = \frac{8+2}{2} \cdot 4 = 20$. Kontrola: $p \cdot r = 10 \cdot 2 = 20 \checkmark$.

Wynik: ramię 5, $r = 2$, $P = 20$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 8 min

- W czworokąt $ABCD$ wpisano okrąg, $|AB| = 7$, $|BC| = 5$, $|CD| = 4$. Oblicz $|DA|$.
- Trapez prostokątny jest opisany na okręgu o promieniu 3, a jego dłuższe ramię ma długość 10. Oblicz długości podstaw i pole.

- 3 Romb o boku 5 jest opisany na okręgu o promieniu 2. Oblicz pole rombu.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

3 Oba warunki naraz

☰ CZWOROKĄT WPISANY I OPISANY

1. Z kąta danego przy A : kąt przy C to $180^\circ - \alpha$.
2. Przekątna BD z trójkąta ABD (dane dwa boki i kąt) i z trójkąta BCD (dwa nieznanne boki x, y i kąt $180^\circ - \alpha$).
3. Warunek opisania: $|AB| + y = |AD| + x$ wiąże niewiadome. Razem układ dwóch równań, zwykle kwadratowy.
4. Pole sumą pól trójkątów ABD i BCD .

Według zasad oceniania CKE z maja 2026 każdy z trzech warunków (twierdzenie o czworokącie opisanym, twierdzenie cosinusów dla przekątnej, kąt przy C) był wart osobny punkt. Pełne zadanie tego typu jest w sekcji maturalnej.

4 Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

☞ RÓWNOLEGŁOŚĆ Z PROPORCJI (W BROSZURZE CKE)

Ramiona kąta o wierzchołku O przecinają proste AB i CD (A, C na jednym ramieniu, B, D na drugim). Jeżeli $\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$, to $AB \parallel CD$.

Twierdzenie służy do **wykazania równoległości**, gdy znamy tylko długości. Potem można już korzystać z podobieństwa trójkątów OAB i OCD (lekcja 8.4 Twierdzenie Talesa i podobieństwo), a więc i z równości kątów. Uwaga: porównuje się odcinki liczone od wierzchołka O ; równość $\frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|BD|}$ daje to samo.

Przykład 4.1

Czy odcinek jest równoległy do boku

Na bokach AC i BC trójkąta ABC leżą punkty D i E , przy czym $|CD| = 4$, $|DA| = 6$, $|CE| = 6$, $|EB| = 9$. Wykaż, że $DE \parallel AB$, i oblicz $\frac{|DE|}{|AB|}$.

- 1 $\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $\frac{|CE|}{|CB|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.
- 2 Ilorazy są równe, więc z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $DE \parallel AB$.
- 3 Trójkąty CDE i CAB są podobne w skali $\frac{2}{5}$.

Wynik: $DE \parallel AB$, $\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{2}{5}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 3 min

- 1 Na bokach AC i BC trójkąta ABC leżą punkty D i E : $|CD| = 3$, $|DA| = 5$, $|CE| = 4$, $|EB| = 6$. Czy $DE \parallel AB$?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 15 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · KĄTY

ZESTAWY A

- 1 Czworokąt $ABCD$ (kąty podane kolejno). Odpowiedz.
a) wpisany, $\angle A = 70^\circ$; $\angle C$ b) kąty 70° , 90° , 100° , 100° :
czy da się opisać okrąg?

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · BOKI I PROMIENŃ OKRĘGU WPISANEGO

ZESTAWY B

1 Oblicz.

■ ■ ■

a) opisany, $|AB| = 5$,
 $|BC| = 6$, $|CD| = 8$; $|DA|$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

POZIOM C · KĄT PROSTY I ŚREDNICA

ZESTAWY C

1 Oblicz.

■ ■ ■

a) wpisany, $\angle ABC = 90^\circ$,
 $|AC| = 10$, $|AB| = 6$; $|BC|$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

Pełny trening (15 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach rozszerzonych 2024–2026 to zadania otwarte za 4–6 punktów i dowody za 3–5 punktów. Schemat oceniania przyznaje punkty za kolejne zależności: warunek wpisania lub opisanie, twierdzenie cosinusów dla przekątnej, równanie z jedną niewiadomą, wynik. Uwaga z czerwca 2026: gdy z danych wynikają dwa czworokąty (różniące się kolejnością boków), rozpatrzenie jednego bez komentarza o drugim ogranicza wynik. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

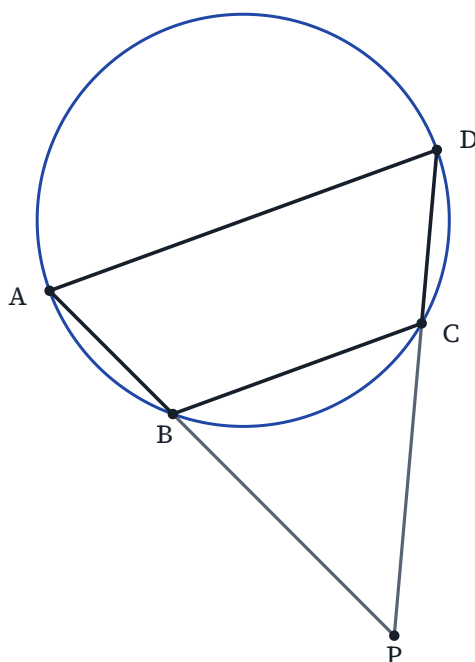
4 zadania · 17 pkt · ok. 50 min

1

■ ■ ■

(0–6 pkt) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i opisany na okręgu. $|AB| = 6$, $|AD| = 4$, $\angle BAD = 60^\circ$. Oblicz długości boków BC i CD oraz pole czworokąta.

- 2 (0–4 pkt) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, $AB \perp BC$, $|AB| = 5$, $|BC| = 12$, a pole czworokąta jest równe 60. Oblicz obwód czworokąta.
- 3 (0–4 pkt) Trapez równoramienny o podstawach 18 i 8 jest opisany na okręgu. Oblicz promień tego okręgu i pole trapezu.
- 4 (0–3 pkt) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB i DC przecinają się w punkcie P , przy czym B leży między A i P , a C między D i P . Wykaż, że trójkąty PBC i PDA są podobne.



▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

✗ „ $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.”

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Ten znak zmienia wszystko w równaniu na przekątną; w 2026 roku był głównym źródłem błędów.

✗ „W czworokącie wpisanym sąsiednie kąty sumują się do 180° .”

Przeciwnie. Sąsiednie sumują się do 180° w równoległoboku i przy ramionach trapezu.

× „Czworokąt opisany: $a + b = c + d$.”

Sumy boków przeciwnych: $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$.

× „Każdy trapez można wpisać w okrąg.”

Tylko równoramienny: w trapezie kąty przy ramieniu sumują się do 180° , więc warunek kątów przeciwnych wymusza równe kąty przy podstawie.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Czy na każdym prostokącie da się opisać okrąg?

Tak: przeciwległe kąty proste sumują się do 180° .

2 Czy w każdy romb da się wpisać okrąg?

Tak: wszystkie boki są równe, więc sumy przeciwnych boków też.

3 W trapez opisany na okręgu o promieniu 5: jaka jest wysokość?

10.

4 Czworokąt wpisany ma kąt prosty przy B . Co wiadomo o przekątnej AC ?

Jest średnicą okręgu.

WPISANY

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$$

kąt prosty $\Rightarrow$ przekątna jest średnicą

OPISANY

$$a + c = b + d \text{ (przeciwległe)}$$

$$P = p \cdot r; \text{ trapez: } h = 2r$$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są oba warunki (okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt), twierdzenie cosinusów i twierdzenie sinusów. Wzoru $P = p \cdot r$ dla czworokąta ani związku $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ w tej postaci w części o czworokątach nie ma; drugi wynika ze wzorów redukcyjnych.

Dalej: geometria analityczna, prosta na płaszczyźnie (lekcja 9.1 Prosta na płaszczyźnie).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\angle C = 105^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.
2. AC jest średnicą: $|AC| = 13$, $R = \frac{13}{2}$.
3. Nie: $\angle A + \angle C = 80^\circ + 110^\circ = 190^\circ \neq 180^\circ$.

Zadania • część 2

1. $7 + 4 = 5 + |DA|$, $|DA| = 6$.
2. 1. Krótsze ramię to wysokość: $h = 6$; suma podstaw $6 + 10 = 16$.
2. Różnica podstaw: $\sqrt{100 - 36} = 8$, więc podstawy 12 i 4.
3. $P = \frac{16}{2} \cdot 6 = 48$.
3. Wysokość rombu to średnica: 4; $P = 5 \cdot 4 = 20$ (albo $p \cdot r = 10 \cdot 2$).

Zadania • część 4

1. $\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{3}{8}$, $\frac{|CE|}{|CB|} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Ilorazy są różne. Gdyby $DE \parallel AB$, z twierdzenia Talesa ilorazy byłyby równe, więc odcinki nie są równoległe.

Zestawy A

1. a) 110° b) nie

Zestawy B

1. a) 7

Zestawy C

1. a) 8

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Kąt przy C . $\angle BCD = 120^\circ$ (czworokąt wpisany).
2. Przekątna z ABD . $|BD|^2 = 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 28$.
3. Warunek opisania. $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$: z $x = |BC|$, $y = |CD|$ mamy $x = y + 2$.
4. Przekątna z BCD . $28 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy$.
5. Równanie. $(y + 2)^2 + y^2 + y(y + 2) = 28$, czyli $3y^2 + 6y - 24 = 0$, $y^2 + 2y - 8 = 0$: $y = 2$ (bo $y > 0$), $x = 4$.
6. Pole. $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.
1 pkt za każdy z trzech warunków: $\angle C = 120^\circ$, $|BD|^2 = 28$, $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$. 4 pkt za równanie z jedną niewiadomą. 5 pkt za $|BC| = 4$, $|CD| = 2$. 6 pkt za pole $8\sqrt{3}$.
2. 1. Średnica. $\angle ABC = 90^\circ$, więc AC jest średnicą: $|AC| = 13$, a $\angle ADC = 90^\circ$.
2. Trójkąt ACD . $P_{ACD} = 60 - 30 = 30$: z $c = |CD|$, $d = |AD|$: $cd = 60$, $c^2 + d^2 = 169$.
3. Suma. $(c + d)^2 = 169 + 120 = 289$, $c + d = 17$ (boki to 5 i 12 w jednej z dwóch kolejności).
4. Obwód. $5 + 12 + 17 = 34$ w obu przypadkach.

1 pkt za $|AC| = 13$ i kąt prosty przy D . **2 pkt** za układ $cd = 60$, $c^2 + d^2 = 169$. **3 pkt** za $c + d = 17$. **4 pkt** za obwód 34 z uwagą o obu położeniach.

3. 1. **Ramię.** $18 + 8 = 2c$, $c = 13$.

2. **Wysokość.** rzut ramienia $\frac{18-8}{2} = 5$, $h = \sqrt{169 - 25} = 12$.

3. **Promień.** $r = \frac{h}{2} = 6$.

4. **Pole.** $\frac{26}{2} \cdot 12 = 156$.

1 pkt za ramię 13. **2 pkt** za $h = 12$. **3 pkt** za $r = 6$. **4 pkt** za pole 156.

4. 1. **Kąt przy B .** $\angle PBC = 180^\circ - \angle ABC$ (kąty przyległe).

2. **Czworokąt wpisany.** $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, więc $\angle PBC = \angle ADC = \angle PDA$.

3. **Wspólny kąt.** kąt przy P jest wspólny dla obu trójkątów.

4. **Teza.** cecha kąt-kąt-kąt: $\triangle PBC \sim \triangle PDA$.

1 pkt za $\angle PBC = 180^\circ - \angle ABC$. **2 pkt** za $\angle PBC = \angle PDA$ z uzasadnieniem. **3 pkt** za pełny dowód.

Matura z matematyki · Lekcja 8.6: Czworokąty wpisane i opisane, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdanie CKE z sesji 2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt8_6.py), rysunki z tools/rysunki/r8_6.py.