

Trygonometria w figurach i dowody geometryczne

Od 2026 roku arkusz podstawowy stale zawiera jeden dowód geometryczny za 2 punkty. W maju 2026 rozwiązało go 27% zdających, czyli było to jedno z dwóch najtrudniejszych zadań arkusza. Według sprawozdania CKE zdający najczęściej przyjmowali tezę za założenie albo dopisywali do rysunku fakty, których nie uzasadnili. Ta lekcja łączy dwie rzeczy: rachunek długości i pól z funkcjami trygonometrycznymi oraz pisanie dowodu, w którym każda równość ma podaną przyczynę.

CZAS

ok. 40 min
czytania + ok. 50
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
VIII.11, VIII.12

W TEJ LEKCJI

- 0 Liczyć i uzasadniać
- 1 Długości i pola z funkcjami trygonometrycznymi
- 2 Jak napisać dowód
- 3 Dowody przez pola
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Liczyć i uzasadniać

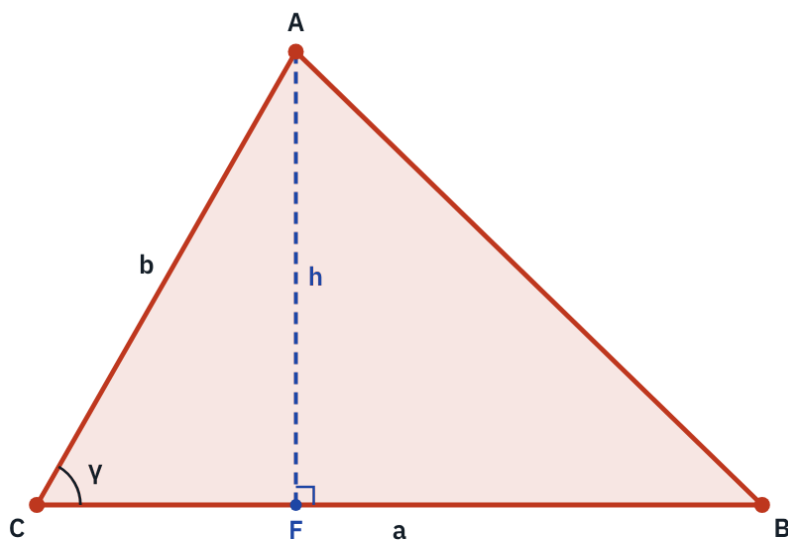
W zadaniu obliczeniowym wystarczy poprawny wynik i zapis obliczeń. W dowodzie wynikiem jest sam tok rozumowania: egzaminator sprawdza, czy z założeń wynika teza i czy każdy krok ma podstawę (twierdzenie, definicję albo wcześniejszy krok). Rysunek pomaga znaleźć pomysł, ale nie jest argumentem: to, że kąt „wygląda na prosty”, niczego nie dowodzi. Klucze CKE są tu surowe: sprawdzenie tezy na konkretnych liczbach albo przyjęcie szczególnego przypadku (kąt prosty, trójkąt równoboczny) daje 0 punktów.

Długości i pola z funkcjami trygonometrycznymi

NARZĘDZIA

- W trójkącie prostokątnym: przyprostokątna = przeciwprostokątna $\cdot \sin$ kąta naprzeciw = przeciwprostokątna $\cdot \cos$ kąta przyległego; $\tan$ to stosunek przyprostokątnych.
- Wysokość opuszczona na bok a z wierzchołka przy boku b : $h = b \sin \gamma$, stąd $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (wzór działa także dla kąta rozwartego).
- W trapezie i równoległoboku: wysokość z ramienia i kąta przy podstawie, $h = c \sin \alpha$, rzut ramienia na podstawę $c \cos \alpha$.

SYMULACJA 1 Trójkąt o bokach a i b z kątem γ między nimi. Wysokość opuszczona na bok a ma długość $b \sin \gamma$. Zmień kąt powyżej 90° : spodek wysokości wychodzi poza bok, ale wzór $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ dalej działa, bo $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$.



— trójkąt — wysokość $h = b \cdot \sin \gamma$ — przedłużenie boku a

$\sin \gamma$ 0,866

$h = b \cdot \sin \gamma$ 4,330

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ 15,155

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ 15,155

$\sin(180^\circ - \gamma)$ 0,866

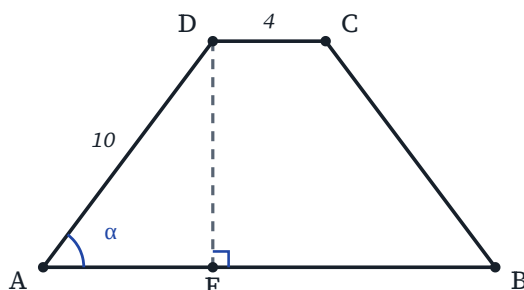
Kąt γ jest ostry: wysokość z A spada na bok a . Trójkąt ACF jest prostokątny, więc $h = b \cdot \sin \gamma$.

Stan na rysunku: $a = 7,0$, $b = 5,0$, $\gamma = 60^\circ$, $h \approx 4,33$, $P \approx 15,16$.

Przykład 1.1

Trapez z kątem

Trapez równoramienny $ABCD$ ma ramię 10, krótszą podstawę 4, a cosinus kąta ostrego przy dłuższej podstawie jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz wysokość, dłuższą podstawę, pole i długość przekątnej.



- 1 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$. Rzut ramienia: $|AE| = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$, wysokość $h = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8$.
- 2 Dłuższa podstawa: $6 + 4 + 6 = 16$; pole $\frac{16+4}{2} \cdot 8 = 80$.
- 3 Przekątna BD : rzut na AB to $16 - 6 = 10$, więc $|BD| = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164}$.

Wynik: $h = 8$, $|AB| = 16$, $P = 80$, $|BD| = 2\sqrt{41}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 8 min

- 1 Romb ma bok 6 i kąt ostry 60° . Oblicz długości jego przekątnych.
- 2 W trójkącie ABC : $|AB| = 8$, $|AC| = 5$, $\angle BAC = 120^\circ$. Oblicz pole.
- 3 Równoległobok ma boki 4 i 6 oraz pole 12. Oblicz jego kąt ostry.
- 4 Trapez prostokątny ma wysokość 6, a tangens kąta ostrego wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz długość ramienia nieprostokątnego do podstaw.

podstawowe średnie trudniejsze

2 Jak napisać dowód

≡ SZKIELET DOWODU

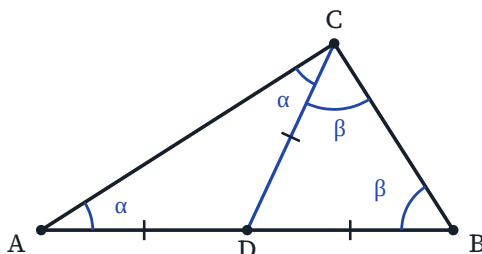
1. **Oznaczenia.** Nazwij kąty i odcinki, o których będziesz pisać ($\alpha = \angle BAC$, h = odległość punktu C od prostej AB). Bez tego zapis $\frac{1}{2}ah$ jest dla egzaminatora pusty.
2. **Fakty z uzasadnieniem.** Każda równość dostaje powód w nawiasie: „(trójkąt równoramienny)”, „(kąty wpisane oparte na tym samym łuku)”, „(wspólna wysokość)”.
3. **Teza na końcu.** Ostatnia linijka to dokładnie teza, wyprowadzona z poprzednich. Teza nie może pojawić się wcześniej jako argument.

Klucz CKE za 2 punkty zwykle daje 1 punkt za pierwszy kluczowy fakt z uzasadnieniem (na przykład równość kątów albo wspólną wysokość) i 2 punkty za doprowadzenie rozumowania do tezy.

Przykład 2.1

Dowód przez kąty

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC i $|AD| = |DB| = |DC|$. Wykaż, że kąt ACB jest prosty.



- 1 Oznaczmy $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$.
- 2 $|AD| = |DC|$, więc trójkąt ADC jest równoramienny i $\angle ACD = \angle DAC = \alpha$.
- 3 $|DB| = |DC|$, więc trójkąt DBC jest równoramienny i $\angle DCB = \angle DBC = \beta$.
- 4 Suma kątów trójkąta ABC : $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$, czyli $\alpha + \beta = 90^\circ$.
- 5 $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = \alpha + \beta = 90^\circ$.

Teza: kąt ACB jest prosty. (To jest twierdzenie odwrotne do twierdzenia o kącie opartym na średnicy: C leży na okręgu o środku D i średnicy AB .)

3 Dowody przez pola

DWA FAKTY O POLACH

- Trójkąty o wspólnej wysokości mają pola w stosunku podstaw. W szczególności środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.
- Trójkąty o wspólnej podstawie i wierzchołkach na prostej równoległej do tej podstawy mają równe pola.

Zamiast „wysokości z rysunku” trzeba napisać, czym ona jest: „odległość punktu C od prostej AB , wspólna dla obu trójkątów, bo D leży na AB ”.

Przykład 3.1

Środkowa dzieli pole na pół

D jest środkiem boku BC trójkąta ABC . Wykaż, że trójkąty ABD i ADC mają równe pola.

- 1 Niech h oznacza odległość punktu A od prostej BC . Punkty B, D, C leżą na tej prostej, więc h jest wysokością obu trójkątów ABD i ADC .
- 2 $P_{ABD} = \frac{1}{2}|BD| \cdot h$, $P_{ADC} = \frac{1}{2}|DC| \cdot h$, a $|BD| = |DC|$.

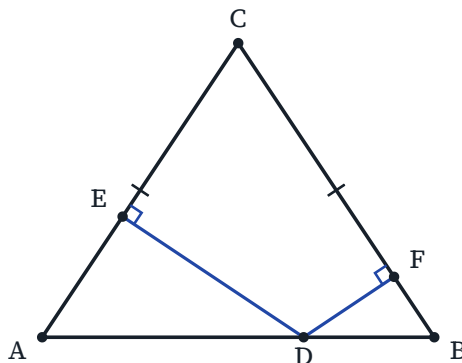
Teza: $P_{ABD} = P_{ADC}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 12 min

- 1 W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku CD . Wykaż, że pole trójkąta ABE jest równe połowie pola równoległoboku.

- 2 Trójkąt ABC jest równoramienny, $|AC| = |BC|$. Punkt D leży na podstawie AB , E i F to rzuty prostokątne D na proste AC i BC . Wykaż, że suma $|DE| + |DF|$ nie zależy od położenia D i jest równa wysokości trójkąta opuszczonej z wierzchołka A na bok BC .



▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 16 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · DŁUGOŚCI

ZESTAWY A

- 1 Oblicz.
- ▮▮▮ a) trójkąt prostokątny,
przeciwprostokątna 12, kąt
 30° : przyprostokątne
- ... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · POLA

ZESTAWY B

1 Oblicz.



a) trójkąt: boki 7 i 4, kąt między nimi 30°

b) trójkąt o bokach 4 i 6 ma pole 12: kąt między nimi

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

POZIOM C · UZASADNIENIA

ZESTAWY C

1 Podaj uzasadnienie, które trzeba dopisać w dowodzie.



a) $|OA| = |OB|$, gdzie O to środek okręgu, a A, B leżą na okręgu

b) $\angle CAB = \angle ACD$ w trapezie $ABCD$ ($AB \parallel CD$)

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Pełny trening (16 przykładów i zadań) →

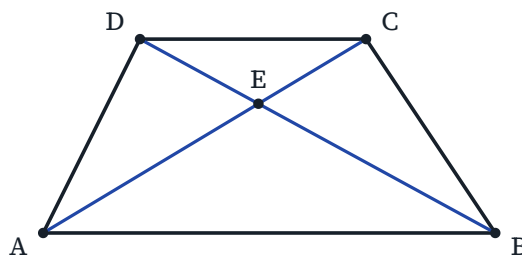
5 Na maturze

W puli CKE z lat 2024–2026 ta lekcja ma najwięcej dowodów: na poziomie podstawowym za 2–3 punkty (stosunki pól, równości kątów, trapez z dwusieczną), na rozszerzonym za 2–5 punktów. Do tego zadania obliczeniowe z trapezem lub trójkątem, w których trzeba połączyć funkcję trygonometryczną z twierdzeniem Pitagorasa. Stałe uwagi z kluczy: zapis $\frac{1}{2}ah$ bez określenia, czym jest h , daje 0 punktów; określenie h bez uzasadnienia, że jest wspólne, daje 1 punkt; przyjęcie kąta prostego albo konkretnych długości daje 0 punktów. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

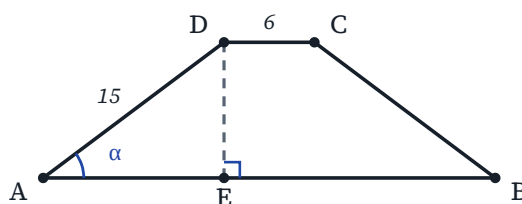
ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 11 pkt · ok. 35 min

- 1 (0–2 pkt) W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne przecinają się w punkcie E . Wykaż, że trójkąty AED i BCE mają równe pola.



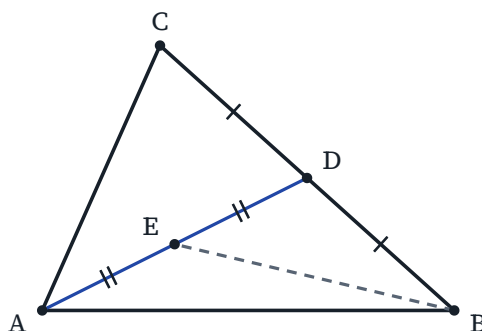
- 2 (0–3 pkt) Trapez równoramienny ma ramię długości 15 i krótszą podstawę długości 6. Cosinus kąta ostrego przy dłuższej podstawie jest równy $\frac{4}{5}$. Oblicz pole trapezu.



- 3 (0–1 pkt) Dwa boki trójkąta mają długości 6 i 10, a kąt między nimi ma miarę 150° . Pole tego trójkąta jest równe

A. 15 B. $15\sqrt{3}$ C. 30 D. $30\sqrt{3}$

- 4 (0–2 pkt) W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC , a punkt E środkiem odcinka AD . Wykaż, że pole trójkąta ABE jest równe $\frac{1}{4}$ pola trójkąta ABC .



- 5 (0–3 pkt) W równoległoboku $ABCD$: $|AB| = 8$, $|AD| = 5$, $\angle BAD = 60^\circ$. Oblicz pole równoległoboku i długość dłuższej przekątnej.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Najczęstsze błędy

× „Z rysunku widać, że te odcinki są równe.”

Rysunek nie jest argumentem. Równość trzeba wywieść z założeń: przystawanie, trójkąt równoramienny, twierdzenie o odcinkach stycznych.

× „Przyjmijmy, że kąt C jest prosty.”

Jeśli teza ma zachodzić dla każdego trójkąta, przyjęcie szczególnego przypadku daje w kluczach CKE 0 punktów za całe zadanie.

× „ $P_1 = \frac{1}{2}ah$, $P_2 = \frac{1}{2}bh$, więc $\frac{P_1}{P_2} = \frac{a}{b}$.”

Trzeba napisać, czym jest h i dlaczego jest ta sama w obu trójkątach. W maju 2026 sam taki zapis dawał 0 punktów.

× „Dwusieczna dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.”

Na równe pola dzieli środkowa. Dwusieczna dzieli przeciwległy bok (i pole) w stosunku przyległych boków.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Ile wynosi wysokość równoległoboku o boku 10 i kącie 30° , opuszczona na drugi bok?

$$10 \sin 30^\circ = 5.$$

2 Co jest tezą w zadaniu „Wykaż, że $|AE| = |EC|$ ”?

Sama równość $|AE| = |EC|$; nie wolno z niej korzystać w trakcie dowodu.

3 Kiedy dwa trójkąty o wspólnej podstawie mają równe pola?

Gdy ich wysokości opuszczone na tę podstawę są równe, np. gdy trzecie wierzchołki leżą na prostej równoległej do podstawy.

4 Czy sprawdzenie tezy dla trójkąta 3, 4, 5 jest dowodem?

Nie. To jeden przykład, a teza dotyczy wszystkich trójkątów.

RACHUNEK

$$h = c \sin \alpha, \text{ rzut } c \cos \alpha$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \quad P = ab \sin \alpha$$

DOWÓD

oznaczenia $\rightarrow$ fakty z uzasadnieniem $\rightarrow$
teza

wspólna wysokość: pola jak podstawy
bez szczególnych przypadków

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są definicje funkcji trygonometrycznych, wzory na pole trójkąta i czworokątów oraz twierdzenie o dwusiecznej. Zasad pisania dowodu tam nie ma: tu decyduje praktyka i schemat oceniania.

Dalej: czworokąty wpisane i opisane (lekcja 8.6 Czworokąty wpisane i opisane, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa, poziom rozszerzony) albo geometria analityczna (lekcja 9.1 Prosta na płaszczyźnie).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Krótsza przekątna tworzy z bokami trójkąt równoboczny: 6. Dłuższa: $2 \cdot 6 \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$.
2. $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.
3. $4 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = 12$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$.
4. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x}$: $x = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8$; ramię $\sqrt{36 + 64} = 10$.

Zadania • część 3

1. Niech h oznacza odległość prostych AB i CD (są równoległe). Pole równoległoboku: $|AB| \cdot h$.
2. E leży na prostej CD , więc wysokość trójkąta ABE opuszczona na AB też ma długość h .
3. $P_{ABE} = \frac{1}{2}|AB| \cdot h$, czyli połowa pola równoległoboku. (Położenie E na CD nie ma znaczenia.)
2. Niech h_A oznacza wysokość z A na BC ; $P_{ABC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot h_A$.
2. Odcinek DC dzieli trójkąt ABC na ADC i DBC : $P_{ADC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |DE|$, $P_{DBC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |DF|$.
3. $P_{ADC} + P_{DBC} = P_{ABC}$ i $|AC| = |BC|$, więc $\frac{1}{2}|BC|(|DE| + |DF|) = \frac{1}{2}|BC| \cdot h_A$.
4. Stąd $|DE| + |DF| = h_A$.

Zestawy A

1. a) 6 i $6\sqrt{3}$

Zestawy B

1. a) 7 b) 90°

Zestawy C

1. a) promień tego samego okręgu b) kąty naprzemianległe przy prostych równoległych

Zadania w stylu maturalnym

1. **Wspólna podstawa.** Trójkąty ABD i ABC mają wspólną podstawę AB , a ich wierzchołki D i C leżą na prostej $CD \parallel AB$, więc ich wysokości są równe (odległość prostych AB i CD). Stąd $P_{ABD} = P_{ABC}$.
2. **Odejmowanie.** $P_{AED} = P_{ABD} - P_{ABE}$ oraz $P_{BCE} = P_{ABC} - P_{ABE}$.
3. **Teza.** $P_{AED} = P_{BCE}$.
1 pkt za uzasadnienie, że $P_{ABD} = P_{ABC}$. 2 pkt za pełny dowód.
2. 1. **Sinus.** $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.
2. **Wysokość i rzut.** $h = 15 \cdot \frac{3}{5} = 9$, $|AE| = 15 \cdot \frac{4}{5} = 12$.
3. **Pole.** dłuższa podstawa $6 + 24 = 30$, $P = \frac{30+6}{2} \cdot 9 = 162$.
1 pkt za $h = 9$ albo $|AE| = 12$. 2 pkt za obie wielkości. 3 pkt za pole 162.
3. **A.** $\frac{1}{2} \cdot 60 \cdot \sin 150^\circ = 30 \cdot \frac{1}{2}$.

4. 1. Środkowa AD . $P_{ABD} = \frac{1}{2}P_{ABC}$ (wspólna wysokość z A na prostą BC , $|BD| = |DC|$).
2. Środkowa BE trójkąta ABD . $P_{ABE} = \frac{1}{2}P_{ABD}$ (wspólna wysokość z B na prostą AD , $|AE| = |ED|$).
3. Teza. $P_{ABE} = \frac{1}{4}P_{ABC}$.

1 pkt za jedną z równości z uzasadnieniem. **2 pkt** za pełny dowód.

5. 1. Pole. $8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 20\sqrt{3}$.

2. Kąt przy B . $\angle ABC = 120^\circ$, a dłuższa przekątna AC leży naprzeciw tego kąta w trójkącie ABC .

3. Twierdzenie cosinusów. $|AC|^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 89 + 40 = 129$, $|AC| = \sqrt{129}$.

1 pkt za pole. **2 pkt** za poprawne równanie z twierdzenia cosinusów dla dłuższej przekątnej. **3 pkt** za $\sqrt{129}$.

Matura z matematyki · Lekcja 8.5: Trygonometria w figurach i dowody geometryczne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby i tezy sprawdzone (tools/verify/mt8_5.py, dowody na losowych konfiguracjach), rysunki z tools/rysunki/r8_5.py.