

Twierdzenie Talesa i podobieństwo

Zadanie z twierdzenia Talesa albo z podobieństwa trójkątów jest w każdym arkuszu podstawowym. W maju 2025 rozwiązało je 53% zdających, w maju 2026 63%. Trudność prawie nigdy nie leży w rachunku, tylko w dopasowaniu wierzchołków: który bok jednego trójkąta odpowiada któremu bokowi drugiego. Ta lekcja uczy robić to systematycznie, od równych kątów do proporcji.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
VIII.7, VIII.8,
VIII.9

W TEJ LEKCJI

- 0 Ten sam kształt, inna skala
- 1 Twierdzenie Talesa
- 2 Cechy podobieństwa i dopasowanie wierzchołków
- 3 Skala, obwody i pola
- 4 Wysokość w trójkącie prostokątnym
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Ten sam kształt, inna skala

Dwa trójkąty są podobne, gdy mają takie same kąty; wtedy wszystkie boki jednego są k razy dłuższe od odpowiednich boków drugiego. Twierdzenie Talesa to szczególny przypadek: proste równoległe przecinające ramiona kąta wycinają trójkąty podobne o wspólnym wierzchołku. Każde zadanie z tej lekcji ma ten sam przebieg: znaleźć dwa trójkąty o równych kątach, ustawić wierzchołki w odpowiadającej sobie kolejności i dopiero wtedy zapisać proporcję.

Twierdzenie Talesa

🔪 TWIERDZENIE TALESA (W BROSZURZE CKE)

Ramiona kąta o wierzchołku O przecięto prostymi AB i CD (A, C na jednym ramieniu, B, D na drugim). Jeżeli $AB \parallel CD$, to

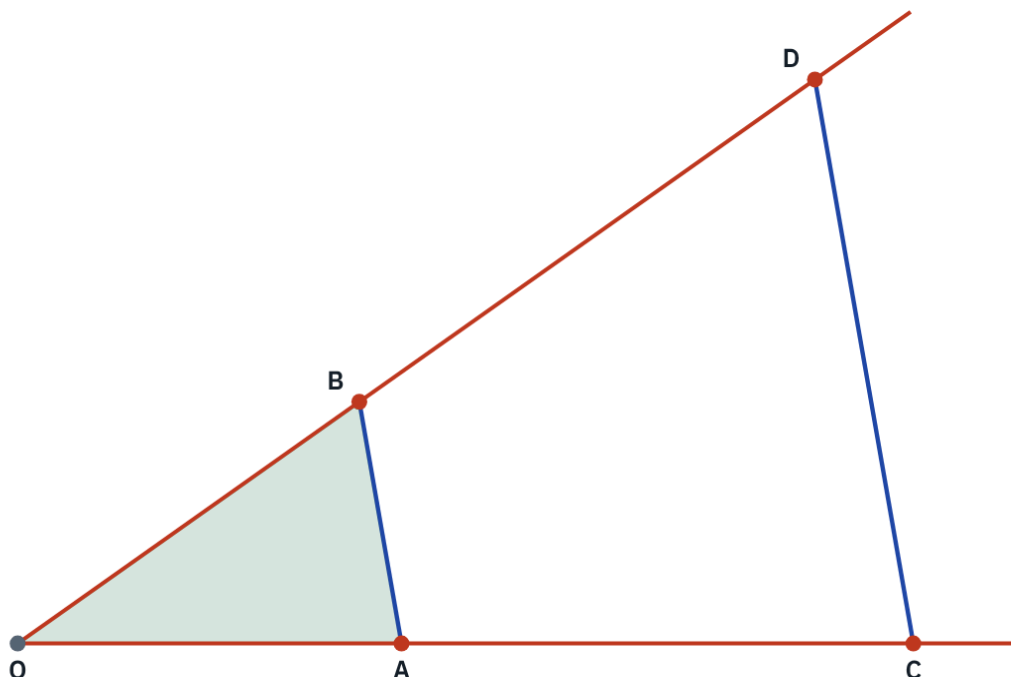
$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|CD|}, \quad \frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|BD|}.$$

Twierdzenie odwrotne: jeśli $\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$, to proste są równoległe. Te same proporcje zachodzą w konfiguracji „motylek”, gdy odcinki AC i BD przecinają się w O , a $AB \parallel CD$.

Uwaga: proporcja $\frac{|AB|}{|CD|}$ dotyczy odcinków liczonych od wierzchołka O ($|OA|, |OC|$), a nie odcinka $|AC|$ między prostymi.

SYMULACJA 1

Zmieniaj długości $|OA|$, $|OC|$ i kąt między ramionami. Proste AB i CD są zawsze równoległe. W trybie „motylek” punkty C i D przechodzą na drugą stronę wierzchołka. Wszystkie trzy ilorazy w odczycie są równe.



— ramiona kąta — proste równoległe AB i CD — trójkąt OAB

$|OA|, |OB|$ 3,00; 3,26

$|OC|, |OD|$ 7,00; 7,61

$|OA| : |OC|$ 0,429

$|OB| : |OD|$ 0,429

$|AB| : |CD|$ 0,429

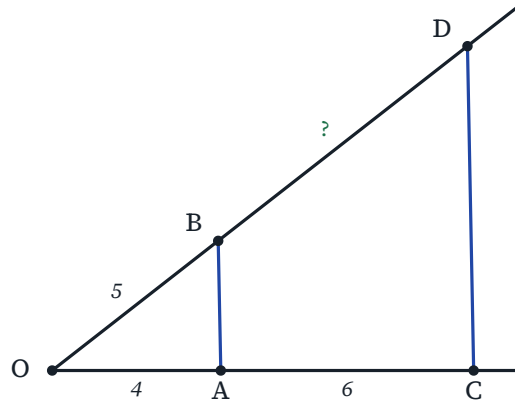
Proste AB i CD są równoległe, więc trójkąty OAB i OCD są podobne w skali 2,33. Wszystkie trzy ilorazy są równe. Uwaga: $|AB| : |CD|$ porównuje się z $|OA| : |OC|$, a nie z $|OA| : |AC|$.

Stan na rysunku: $|OA| = 3,0$, $|OC| = 7,0$, $|OB| \approx 3,26$, $|OD| \approx 7,61$, $|AB| \approx 1,90$, $|CD| \approx 4,43$.

Przykład 1.1

Kąt

Na rysunku $AB \parallel CD$, $|OA| = 4$, $|AC| = 6$, $|OB| = 5$. Oblicz $|BD|$. Ile wynosi $|CD|$, jeśli $|AB| = 3$?



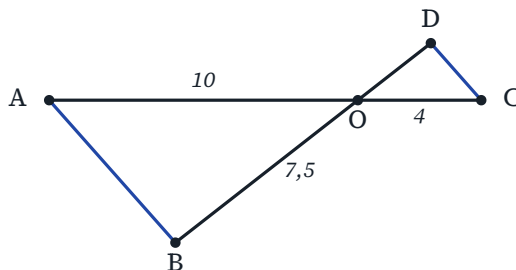
- 1 $\frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|BD|}$: $\frac{4}{6} = \frac{5}{|BD|}$, więc $|BD| = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$.
- 2 $|OC| = 10$: $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|OA|}{|OC|} = \frac{4}{10}$, więc $|CD| = \frac{3 \cdot 10}{4} = \frac{15}{2}$.

Wynik: $|BD| = \frac{15}{2}$, $|CD| = \frac{15}{2}$.

Przykład 1.2

Motylek

Odcinki AC i BD przecinają się w O , $AB \parallel CD$, $|OA| = 10$, $|OC| = 4$, $|OB| = 7,5$. Oblicz $|OD|$ oraz $|CD|$, jeśli $|AB| = 15$.



- 1 Trójkąty OAB i OCD są podobne (kąty wierzchołkowe przy O , kąty naprzemianległe przy prostych równoległych), skala $\frac{|OC|}{|OA|} = \frac{4}{10}$.
- 2 $|OD| = 7,5 \cdot \frac{4}{10} = 3$, $|CD| = 15 \cdot \frac{4}{10} = 6$.

Wynik: $|OD| = 3$, $|CD| = 6$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 6 min

- 1 W konfiguracji „kąć”: $|OA| = 3$, $|AC| = 5$, $|OB| = 6$, $AB \parallel CD$. Oblicz $|BD|$.
- 2 W konfiguracji „motylek”: $|OA| = 9$, $|OB| = 6$, $|OC| = 6$. Oblicz $|OD|$.
- 3 W trójkącie ABC bok AB ma długość 12. Punkt D leży na boku AC i $|CD| : |DA| = 1 : 2$. Prosta przez D równoległa do AB przecina BC w E . Oblicz $|DE|$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

CECHY PODOBIEŃSTWA (W BROSZURZE CKE)

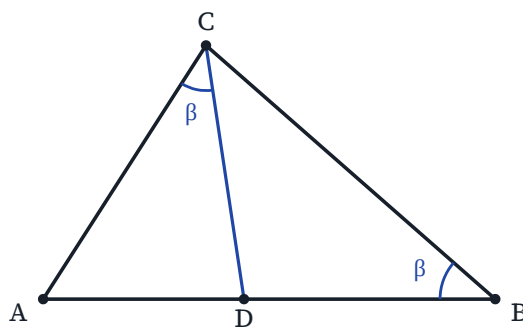
- **kąt-kąt-kąt**: dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego (trzeci wynika z sumy);
- **bok-kąt-bok**: dwa boki proporcjonalne i równy kąt między nimi;
- **bok-bok-bok**: trzy boki proporcjonalne.

Zapis $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ oznacza, że $A \leftrightarrow K, B \leftrightarrow L, C \leftrightarrow M$. Proporcje odczytuje się z kolejności liter: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|AC|}{|KM|}$. Najpierw ustalamy, które kąty są równe, i według nich ustawiamy kolejność wierzchołków.

Przykład 2.1

Wspólny kąt

W trójkącie ABC : $|AB| = 9, |AC| = 6$. Punkt D leży na boku AB , przy czym $\angle ACD = \angle ABC$. Oblicz $|AD|$.



- 1 Trójkąty ACD i ABC mają wspólny kąt przy A i $\angle ACD = \angle ABC$: podobne (kkk).
- 2 Dopasowanie: $A \leftrightarrow A, C \leftrightarrow B, D \leftrightarrow C$, czyli $\triangle ACD \sim \triangle ABC$.
- 3 $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|}$, więc $|AD| = \frac{|AC|^2}{|AB|} = \frac{36}{9}$.

Wynik: $|AD| = 4$.

FIGURY PODOBNE W SKALI k

$$\frac{\text{obwód}_2}{\text{obwód}_1} = k, \quad \frac{P_2}{P_1} = k^2.$$

Działa to dla wszystkich figur podobnych, nie tylko trójkątów. Odwrotnie: znając stosunek pól, skalę dostaje się pierwiastkiem.

Przykład 3.1

Boki z obwodu

Trójkąt o bokach 4, 6, 8 jest podobny do trójkąta o obwodzie 45. Oblicz boki drugiego trójkąta i stosunek pól.

- 1 Obwód pierwszego 18: $k = \frac{45}{18} = \frac{5}{2}$.
- 2 Boki: 10, 15, 20; stosunek pól $k^2 = \frac{25}{4}$.

Wynik: 10, 15, 20; pole drugiego jest $\frac{25}{4}$ razy większe.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Pola dwóch trójkątów podobnych są w stosunku 9 : 4. Obwód mniejszego wynosi 20. Oblicz obwód większego.
- 2 Trójkąt o bokach 5, 12, 13 jest podobny do trójkąta KLM , którego najkrótszy bok ma 15. Oblicz przeciwprostokątną i pole trójkąta KLM .

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Wysokość w trójkącie prostokątnym

TRZY TRÓJKĄTY PODOBNE (W BROSZURZE CKE)

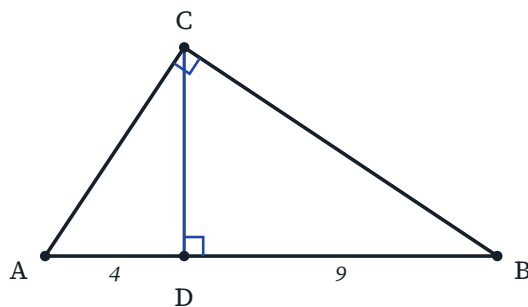
Wysokość CD poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty podobne do niego i do siebie. Stąd:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|}, \quad h_c = \frac{ab}{c}, \quad |AC|^2 = |AD| \cdot |AB|, \quad |BC|^2 = |BD| \cdot |AB|.$$

Przykład 4.1

Z odcinków przeciwprostokątnej

Wysokość CD trójkąta prostokątnego dzieli przeciwprostokątną na odcinki $|AD| = 4$ i $|DB| = 9$. Oblicz $|CD|$, $|AC|$ i $|BC|$.



- 1 $|CD| = \sqrt{4 \cdot 9} = 6.$
- 2 $|AC| = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, \quad |BC| = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}.$

Wynik: $6, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{13}.$

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 3 min

- 1 Przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną i odcinki, na które dzieli ona przeciwprostokątną.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 17 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · TWIERDZENIE TALESA

ZESTAWY A

- 1 Oblicz ($AB \parallel CD$; „kąt”: A, C na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O ; „motylek”: AC i BD przecinają się w O).

a) kąt: $|OA| = 2, |AC| = 3,$ b) trójkąt $ABC, DE \parallel BC,$
 $|OB| = 4; |BD|$ $D \in AB: |AD| = 3,$
 $|DB| = 6, |BC| = 12; |DE|$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM B · SKALA

ZESTAWY B

- 1 Oblicz.

a) trójkąt 3, 4, 5 w skali 4:
najdłuższy bok

b) $\triangle ACD \sim \triangle ABC$
(wspólny kąt A ,
 $\angle ACD = \angle ABC$),
 $|AB| = 16, |AD| = 9; |AC|$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM C · TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

ZESTAWY C

- 1 CD to wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego C na przeciwprostokątną AB .
Oblicz.

a) $|AD| = 2$, $|DB| = 8$;
 $|CD|$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ trudniejsze

Pełny trening (17 przykładów i zadań) →

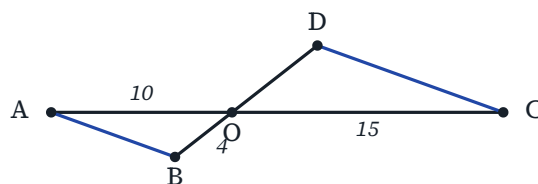
6 Na maturze

W arkuszach podstawowych 2024–2026 to zwykle zadanie zamknięte (Tales w konfiguracji „ką” albo „motylek”, boki trójkąta podobnego z obwodu) albo prawda/fałsz. Czasem zadanie otwarte za 3–4 punkty z trapezem lub trójkątem prostokątnym, w którym punkty przyznaje się za kolejne odcinki, i dowód za 2–3 punkty. Stała uwaga w kluczach: jeśli jedynym błędem jest zła proporcja, a rozwiązanie doprowadzono do końca, zdający dostaje co najwyżej 2 punkty. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 9 pkt · ok. 25 min

- 1 (0–1 pkt) Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie O , $AB \parallel CD$, $|OA| = 10$, $|OB| = 4$, $|OC| = 15$. Długość odcinka OD jest równa



- A. 4 B. 6 C. 7,5 D. 10

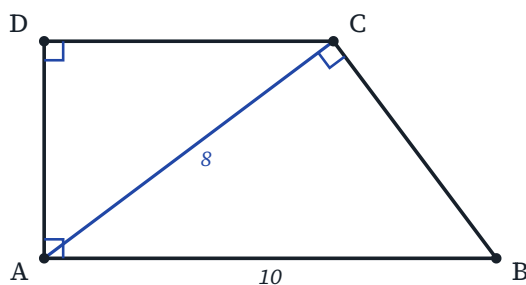
- 2 (0–1 pkt) Trójkąt o bokach 6, 8, 10 jest podobny do trójkąta o obwodzie 60. Najdłuższy bok drugiego trójkąta ma długość

- A. 15 B. 20 C. 25 D. 30

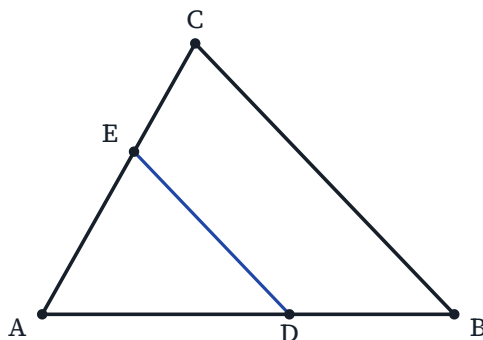
- 3 (0–1 pkt) Trójkąt T ma pole 12. Trójkąt T' jest do niego podobny w skali 3. Oceń prawdziwość zdań.

1. Pole trójkąta T' jest równe 108. P F
2. Obwód trójkąta T' jest 9 razy większy od obwodu T . P F

- 4 (0–4 pkt) Trapez prostokątny $ABCD$ ma podstawy AB i CD oraz kąty proste przy wierzchołkach A i D . Przekątna AC ma długość 8 i jest prostopadła do ramienia BC , a $|AB| = 10$. Oblicz pole trapezu.



- 5 (0–2 pkt) W trójkącie ABC punkt D leży na boku AB , punkt E na boku AC i $DE \parallel BC$. Wykaż, że $|AD| \cdot |EC| = |AE| \cdot |DB|$.



▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

✗ „ $\frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|CD|}$ ”

Odcinki na prostych równoległych porównuje się z odcinkami od wierzchołka: $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|OA|}{|OC|}$, nie $\frac{|OA|}{|AC|}$.

- × „Trójkąty są podobne, więc dzielę boki w kolejności, w jakiej są podpisane.”

Kolejność wynika z równych kątów, nie z liter na rysunku. W przykładzie 2.1 bok AC trójkąta ACD odpowiada bokowi AB trójkąta ABC .

- × „Skala 2, więc pole też 2 razy większe.”

Pole rośnie $k^2 = 4$ razy. Obwód rośnie k razy.

- × „Trapez z rysunku dzieli się przekątną na trójkąty przystające.”

Zwykle tylko podobne, i to tylko w szczególnych przypadkach (jak w zadaniu 4 z sekcji maturalnej). Każdą równość kątów trzeba uzasadnić.

8

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Pola dwóch kwadratów są w stosunku $16 : 25$. W jakim stosunku są ich boki?

$4 : 5$.

- 2 Ile cech podobieństwa trójkątów jest w broszurze CKE?

Trzy: kkk, bkb, bbb.

- 3 Wysokość z kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na 2 i 8. Ile ma wysokość?

$\sqrt{16} = 4$.

- 4 Czy dwa trójkąty prostokątne z równym kątem ostrym są podobne?

Tak: mają dwa równe kąty (prosty i ten ostry), cecha kkk.

TALES

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|CD|}$$

$$\frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|BD|}$$

„ką” i „motylek”: te same proporcje

PODOBIENSTWO

kkk, bkb, bbb; kolejność z kątów

obwody k , pola k^2

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|, \quad h_c = \frac{ab}{c}$$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są twierdzenie Talesa z odwrotnym, cechy przystawania i podobieństwa trójkątów oraz związki miarowe w trójkącie prostokątnym ($h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|}$, $h_c = \frac{ab}{c}$). Jest też twierdzenie o polach figur podobnych (stosunek pól równy k^2). Uwaga na oznaczenia: w broszurze wierzchołek kąta nazywa się P , a punkty A, B leżą na jednej prostej, czyli inaczej niż w tej lekcji. Warto przed egzaminem przeczytać tamten zapis i przełożyć go na własne litery.

Dalej: trygonometria w figurach i dowody geometryczne (lekcja 8.5 Trygonometria w figurach i dowody geometryczne).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $\frac{3}{5} = \frac{6}{|BD|}$, $|BD| = 10$.
2. $\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$: $\frac{9}{6} = \frac{6}{|OD|}$, $|OD| = 4$.
3. Wierzchołek kąta to C : $\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CA|} = \frac{1}{3}$, $|DE| = 4$.

Zadania · część 3

1. $k = \frac{3}{2}$, obwód 30.
2. $k = 3$: przeciwprostokątna 39; pole pierwszego $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, więc pole KLM to $30 \cdot 9 = 270$.

Zadania · część 4

1. $c = 10$, $h = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$; odcinki $\frac{36}{10} = \frac{18}{5}$ (przy boku 6) i $\frac{64}{10} = \frac{32}{5}$.

Zestawy A

1. a) 6 b) 4

Zestawy B

1. a) 20 b) 12

Zestawy C

1. a) 4

Zadania w stylu maturalnym

1. B. $|OD| = \frac{4 \cdot 15}{10}$.
2. C. $k = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$, $10 \cdot \frac{5}{2}$.
3. PF. Pola $k^2 = 9$ razy, obwody $k = 3$ razy.
4. 1. **Ramię.** trójkąt ACB prostokątny: $|BC| = \sqrt{100 - 64} = 6$.
2. **Podobieństwo.** $\angle DCA = \angle CAB$ (naprzemianległe), kąty proste przy D i C : $\triangle ADC \sim \triangle BCA$, czyli $A \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow A$.
3. **Odcinki.** $\frac{|DC|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|AB|}$: $|DC| = \frac{64}{10} = 6,4$; $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$: $|AD| = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$.
4. **Pole.** $\frac{10 + 6,4}{2} \cdot 4,8 = 39,36$.
1 pkt za $|BC| = 6$ albo za poprawną proporcję z podobieństwa. 2 pkt za $|DC|$ albo $|AD|$. 3 pkt za oba odcinki. 4 pkt za pole 39,36.
5. 1. **Tales.** ramiona kąta BAC przecięte prostymi równoległymi DE i BC : $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$.
2. **Wniosek.** mnożąc obie strony przez $|DB| \cdot |EC|$ (oba dodatnie), dostajemy $|AD| \cdot |EC| = |AE| \cdot |DB|$.
1 pkt za poprawną proporcję z twierdzenia Talesa z uzasadnieniem. 2 pkt za wniosek. Sprawdzenie na konkretnych długościach: 0 pkt.

