

Czworokąty i wielokąty foremne

Wzory na pola czworokątów są w broszurze CKE, więc w arkuszach sprawdza się raczej, czy umiesz z nich skorzystać w nietypowej sytuacji: jak przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty, ile ma kąt wewnętrzny dwunastokąta, z czego składa się sześciokąt foremny. W sesjach 2024–2026 to zadania za 1 punkt, ale te same fakty wracają w stereometrii i w geometrii analitycznej.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
VIII.3, VIII.4

W TEJ LEKCJI

- 0 Wysokość i przekątne
- 1 Czworokąty i ich pola
- 2 Przekątne trapezu i równoległoboku
- 3 Wielokąty foremne
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Wysokość i przekątne

Prawie każde zadanie z czworokątem sprowadza się do jednego z dwóch ruchów. Pierwszy: opuścić wysokość i dostać trójkąt prostokątny, z którego twierdzenie Pitagorasa albo funkcja trygonometryczna da brakującą długość. Drugi: poprowadzić przekątne i zauważyć trójkąty przystające lub podobne. Wielokąty foremne rozkłada się na trójkąty równoramienne o wierzchołku w środku okręgu opisanego; w sześciokącie są to trójkąty równoboczne.

Czworokąty i ich pola

🏠 POLA (W BROSZURZE CKE)

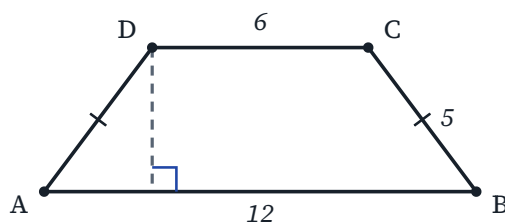
- trapez: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$;
- równoległobok: $P = ah_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$ (φ to kąt między przekątnymi);
- romb: $P = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2}d_1d_2$;
- deltoid: $P = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Przekątne rombu są prostopadłe i dzielą się na połowy; przekątne równoległoboku tylko dzielą się na połowy. W trapezie równoramiennym spodek wysokości odcina od dłuższej podstawy odcinek $\frac{a-b}{2}$.

Przykład 1.1

Trapez równoramienny

Trapez równoramienny ma podstawy 12 i 6 oraz ramię 5. Oblicz jego pole i długość przekątnej.



- 1 Spodek wysokości z D odcina od AB odcinek $\frac{12-6}{2} = 3$, więc $h = \sqrt{25-9} = 4$.
- 2 $P = \frac{12+6}{2} \cdot 4 = 36$.
- 3 Przekątna BD : rzut na AB ma długość $12 - 3 = 9$, więc $|BD| = \sqrt{81 + 16}$.

Wynik: $P = 36$, $|BD| = \sqrt{97}$.

- 1 Przekątne rombu mają długości 6 i 8. Oblicz bok, pole i wysokość rombu.

- 2 Równoległobok ma boki 8 i 5 oraz kąt ostry 30° . Oblicz jego pole.

- 3 Trapez prostokątny ma podstawy 10 i 6, a ramię nieprostopadłe do podstaw ma długość 5. Oblicz pole.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

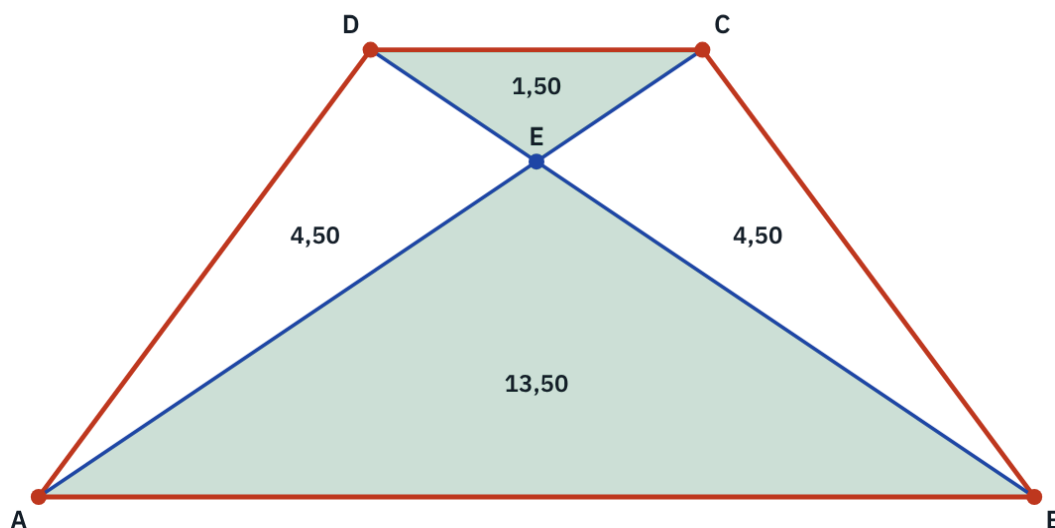
2 Przekątne trapezu i równoległoboku

CZTERY TRÓJKĄTY

W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) przekątne przecinają się w punkcie E . Niech $k = \frac{|AB|}{|CD|}$.

- Trójkąty ABE i CDE są podobne w skali k : $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BE|}{|ED|} = k$, $\frac{P_{ABE}}{P_{CDE}} = k^2$.
- Trójkąty boczne mają równe pola: $P_{BCE} = P_{ADE} = k \cdot P_{CDE}$.
- W równoległoboku przekątne dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.

SYMULACJA 1 Zmieniaj długości podstaw i przesunięcie górnej podstawy. Pola czterech trójkątów są podpisane na rysunku. Zauważ, że pola trójkątów bocznych są zawsze równe, a stosunek pól trójkątów przy podstawach jest kwadratem stosunku podstaw.



— trapez — przekątne — trójkąty przy podstawach

$$k = |AB| : |CD| \quad 3,000$$

$$P(ABE) : P(CDE) \quad 9,000 = k^2$$

$$P(BCE) \text{ i } P(ADE) \quad 4,50 \text{ i } 4,50$$

$$|AE| : |EC| \quad 3,000$$

$$\text{pole trapezu} \quad 24,00$$

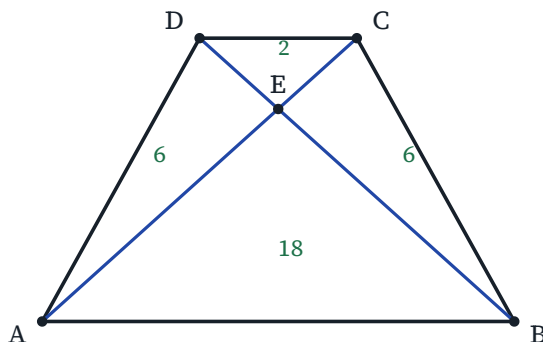
Trójkąty ABE i CDE są podobne w skali $k = 3,00$, więc ich pola różnią się $k^2 = 9,00$ razy. Trójkąty boczne mają równe pola, bo każdy z nich to trójkąt ABD albo ABC (o tym samym polu) bez trójkąta ABE. Przesunięcie górnej podstawy nie zmienia żadnego pola.

Stan na rysunku: $|AB| = 9$, $|CD| = 3$, wysokość 4, pola ABE 13,50, BCE 4,50, CDE 1,50, ADE 4,50.

Przykład 2.1

Pola z jednego trójkąta

W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest trzy razy dłuższa od CD . Przekątne przecinają się w E , a $P_{CDE} = 2$. Oblicz pole trapezu.



- 1 $k = 3$: $P_{ABE} = 9 \cdot 2 = 18$.
- 2 Trójkąty CDE i BCE mają wspólną wysokość z C , a $\frac{|BE|}{|ED|} = 3$: $P_{BCE} = 3 \cdot 2 = 6$; tak samo $P_{ADE} = 6$.
- 3 $P = 18 + 6 + 2 + 6$.

Wynik: $P = 32$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

1 zadanie · ok. 3 min

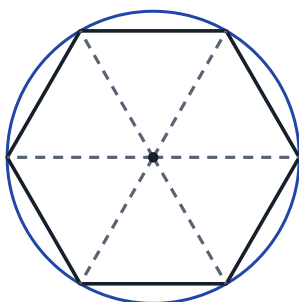
- 1 Trapez ma podstawy $|AB| = 10$ i $|CD| = 4$. Przekątne przecinają się w E . Oblicz $\frac{|AE|}{|EC|}$ i $\frac{P_{ABE}}{P_{CDE}}$.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

3 Wielokąty foremne

n -KĄT FOREMNY

- suma kątów wewnętrznych $(n - 2) \cdot 180^\circ$, każdy kąt $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$;
- kąt środkowy oparty na boku $\frac{360^\circ}{n}$;
- liczba przekątnych $\frac{n(n-3)}{2}$;
- sześciokąt foremny o boku a to sześć trójkątów równobocznych: $R = a$, $P = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$, krótsza przekątna $a\sqrt{3}$, dłuższa $2a$.



Przykład 3.1

Koło bez sześciokąta

Sześciokąt foremny jest wpisany w okrąg o promieniu 2. Oblicz pole części koła leżącej poza sześciokątem.

- 1 Bok sześciokąta to promień: $a = 2$. Pole sześciokąta: $\frac{3 \cdot 4 \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.
- 2 Pole koła: 4π .

Wynik: $4\pi - 6\sqrt{3}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

4 zadania · ok. 6 min

- 1 Ile stopni ma kąt wewnętrzny dziesięciokąta foremnego?



- 2 Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego ma 140° . Ile boków ma ten wielokąt?



3 Ile przekątnych ma ośmiokąt?

■ ■ ■

4 Sześciokąt foremny ma bok 4. Oblicz jego pole oraz długości obu rodzajów przekątnych.

■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 20 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · POLA

ZESTAWY A

1 Oblicz.

■ ■ ■

a) pole równoległoboku: b) pole deltoidu o
 $a = 6, h_a = 4$ przekątnych 7 i 12

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

POZIOM B · PRZEKĄTNE

ZESTAWY B

1 Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, przekątne przecinają się w E . Oblicz.

■ ■ ■

a) $|AB| = 2|CD|$, $P_{CDE} = 3$; b) $P_{ABE} = 27$, $P_{CDE} = 3$;
 P_{ABE} , P_{BCE} , P_{ABCD} $\frac{|AB|}{|CD|}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

POZIOM C · WIELOKĄTY FOREMNE

ZESTAWY C

1 Oblicz.



a) kąt wewnętrzny
sześciokąta foremnego

b) sześciokąt foremny
 $a = 2$: pole i krótsza
przekątna

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (20 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

W arkuszach 2024–2026 ta lekcja daje zadania za 1 punkt: prawda/fałsz o polach trójkątów wyznaczonych przez przekątne trapezu, pole figury z sześciokątem foremnym, czasem kąt wielokąta foremnego. Na poziomie rozszerzonym równoległobok pojawił się w zadaniu z geometrii analitycznej za 6 punktów. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 8 pkt · ok. 20 min

1 (0–1 pkt) W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest trzy razy dłuższa od podstawy CD .



Przekątne przecinają się w punkcie E . Oceń prawdziwość zdań.

1. Pole trójkąta ABE jest 9 razy większe od pola trójkąta CDE . P F

2. Pole trójkąta BCE jest równe polu trójkąta ABE . P F

2 (0–1 pkt) Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego ma miarę 150° . Liczba boków tego wielokąta jest równa



A. 10

B. 12

C. 15

D. 18

3 (0–1 pkt) Romb ma bok długości 10 i kąt ostry 30° . Pole tego rombu jest równe



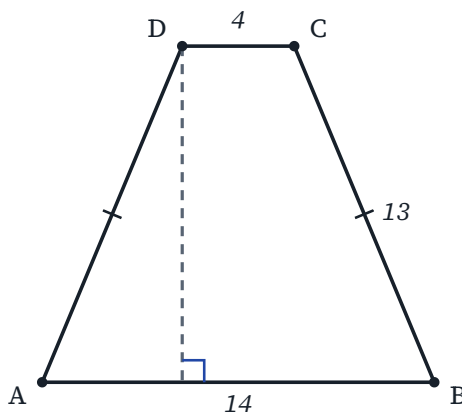
A. 25

B. 50

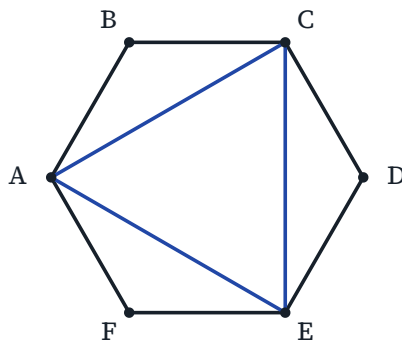
C. $50\sqrt{3}$

D. 100

- 4 (0–3 pkt) Trapez równoramienny ma podstawy długości 14 i 4 oraz ramię długości 13. Oblicz pole trapezu i długość jego przekątnej.



- 5 (0–2 pkt) Sześciokąt foremny $ABCDEF$ ma bok długości 6. Oblicz pole trójkąta ACE .



▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

- × „Podstawy w stosunku 3 : 1, więc pola trójkątów przy podstawach też 3 : 1.”

Trójkąty ABE i CDE są podobne, więc pola są w stosunku kwadratu skali: 9 : 1. Stosunek 3 : 1 mają pola trójkąta bocznego i górnego.

- × „Przekątne równoległoboku są prostopadłe.”

Tylko w rombie (i kwadracie). W równoległoboku przekątne tylko dzielą się na połowy.

- × „Suma kątów wielokąta to $n \cdot 180^\circ$.”

$(n - 2) \cdot 180^\circ$: wielokąt dzieli się przekątnymi z jednego wierzchołka na $n - 2$ trójkąty.

× „Promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym to jego krótsza przekątna.”

Promień jest równy bokowi a . Krótsza przekątna ma $a\sqrt{3}$, dłuższa $2a$ (średnica).

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Ile wynosi suma kątów wewnętrznych pięciokąta?

540°.

2 Pole równoległoboku jest równe 40. Jakie pole ma każdy z czterech trójkątów wyznaczonych przez przekątne?

10.

3 Jaki jest kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego?

120°.

4 Romb ma przekątne 10 i 24. Ile ma bok?

13: $\sqrt{5^2 + 12^2}$.

POLA

trapez $\frac{a+b}{2}h$; równoległobok $ab \sin \alpha$

romb, deltoid $\frac{1}{2}d_1d_2$

przekątne trapezu: $k^2 : k : 1 : k$

FOREMNE

kąt $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$, przekątne $\frac{n(n-3)}{2}$

sześciokąt: $R = a$, $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

przekątne $a\sqrt{3}$ i $2a$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są definicje i wzory na pola trapezu, równoległoboku, rombu i deltoidu oraz warunki wpisania okręgu w czworokąt i opisanie okręgu na czworokącie. Zależności między polami trójkątów wyznaczonych przez przekątne i wzorów dla wielokątów foremnych tam nie ma.

Dalej: twierdzenie Talesa i podobieństwo (lekcja 8.4 Twierdzenie Talesa i podobieństwo).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

- Połówki przekątnych 3 i 4 tworzą z boki trójkąt prostokątny: bok 5. $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$, $h = \frac{24}{5}$.
- $8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 20$.
- Różnica podstaw 4, więc $h = \sqrt{25 - 16} = 3$; $P = \frac{16}{2} \cdot 3 = 24$.

Zadania · część 2

- $k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$; $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{5}{2}$, $\frac{P_{ABE}}{P_{CDE}} = \frac{25}{4}$.

Zadania · część 3

- $\frac{8 \cdot 180^\circ}{10} = 144^\circ$.
- Kąt zewnętrzny 40° , a suma kątów zewnętrznych to 360° : $n = 9$.
- $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.
- $P = \frac{3 \cdot 16\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$; krótsza przekątna $4\sqrt{3}$, dłuższa 8.

Zestawy A

- a) 24 b) 42

Zestawy B

- a) 12, 6, 27 b) 3

Zestawy C

- a) 120° b) $6\sqrt{3}$ i $2\sqrt{3}$

Zadania w stylu maturalnym

- PF. Skala 3, pola 3^2 . Pole BCE to $3P_{CDE}$, a ABE to $9P_{CDE}$.
- B. Kąt zewnętrzny 30° , $\frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$.
- B. $a^2 \sin \alpha = 100 \cdot \frac{1}{2}$.
- Wysokość. spodek wysokości odcina $\frac{14-4}{2} = 5$: $h = \sqrt{169 - 25} = 12$.
 - Pole. $\frac{14+4}{2} \cdot 12 = 108$.
 - Przekątna. rzut na dłuższą podstawę ma $14 - 5 = 9$: $\sqrt{81 + 144} = 15$.**1 pkt za $h = 12$. 2 pkt za pole 108. 3 pkt za przekątną 15.**
- Bok trójkąta. AC to krótsza przekątna: $6\sqrt{3}$; trójkąt ACE jest równoboczny.
 - Pole. $\frac{(6\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{108\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$.**1 pkt za $|AC| = 6\sqrt{3}$. 2 pkt za $27\sqrt{3}$. Kontrola: to połowa pola sześciokąta, $54\sqrt{3}$.**

Matura z matematyki · Lekcja 8.3: Czworokąty i wielokąty foremne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone

(tools/verify/mt8_3.py), rysunki z tools/rysunki/r8_3.py.