

Trójkąty: rodzaje i punkty szczególne

Na egzaminie są tu wyłącznie zadania za 1 punkt, ale jedno z nich było najtrudniejszym zadaniem arkusza podstawowego w maju 2026: bok trójkąta równobocznego z promienia okręgu opisanego rozwiązało 27% zdających. Wystarczyło znać $R = \frac{2}{3}h$ i $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta lekcja zbiera właśnie takie zależności: kiedy trójkąt jest ostrokątny, gdzie leżą jego punkty szczególne i jak z boków dostać R i r .

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

11 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
VIII.2, VIII.10

W TEJ LEKCJI

- 0 Cztery punkty, cztery rodzaje prostych
- 1 Rodzaje trójkątów z długości boków
- 2 Punkty szczególne
- 3 Trójkąt równoboczny
- 4 Promienie w dowolnym trójkącie
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Cztery punkty, cztery rodzaje prostych

W każdym trójkącie są cztery trójki prostych, które przecinają się w jednym punkcie: dwusieczne kątów, symetralne boków, środkowe i wysokości. Każdy z tych punktów ma inną własność i inne zastosowanie. Na maturze najczęściej trzeba wiedzieć, który punkt jest środkiem okręgu wpisanego, a który opisanego, oraz jak daleko leżą od wierzchołków. W trójkącie równobocznym wszystkie cztery punkty pokrywają się, i to daje najprostsze wzory.

Rodzaje trójkątów z długości boków

ISTNIENIE I RODZAJ

- Trójkąt o bokach $a \leq b \leq c$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b > c$ (nierówność trójkąta).
- $a^2 + b^2 > c^2$: ostrokątny; $a^2 + b^2 = c^2$: prostokątny; $a^2 + b^2 < c^2$: rozwartokątny.

Porównuje się zawsze kwadrat **najdłuższego** boku z sumą kwadratów dwóch pozostałych. To wynika z twierdzenia cosinusów: znak $a^2 + b^2 - c^2$ to znak $\cos \gamma$.

Przykład 1.1

Rodzaj trójkąta

Czy trójkąt o bokach 5, 6, 8 jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny?

- Istnieje: $5 + 6 = 11 > 8$.
- $5^2 + 6^2 = 61$, $8^2 = 64$, czyli $61 < 64$.

Wynik: rozwartokątny (kąt naprzeciw boku 8 jest rozwarty).

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 5 min

- Określ rodzaj trójkąta o bokach 7, 8, 9.

- Określ rodzaj trójkąta o bokach 9, 12, 15.

3 Czy istnieje trójkąt o bokach 2, 3, 6?

4 Ile jest liczb całkowitych x , dla których istnieje trójkąt o bokach 3, 7, x ?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

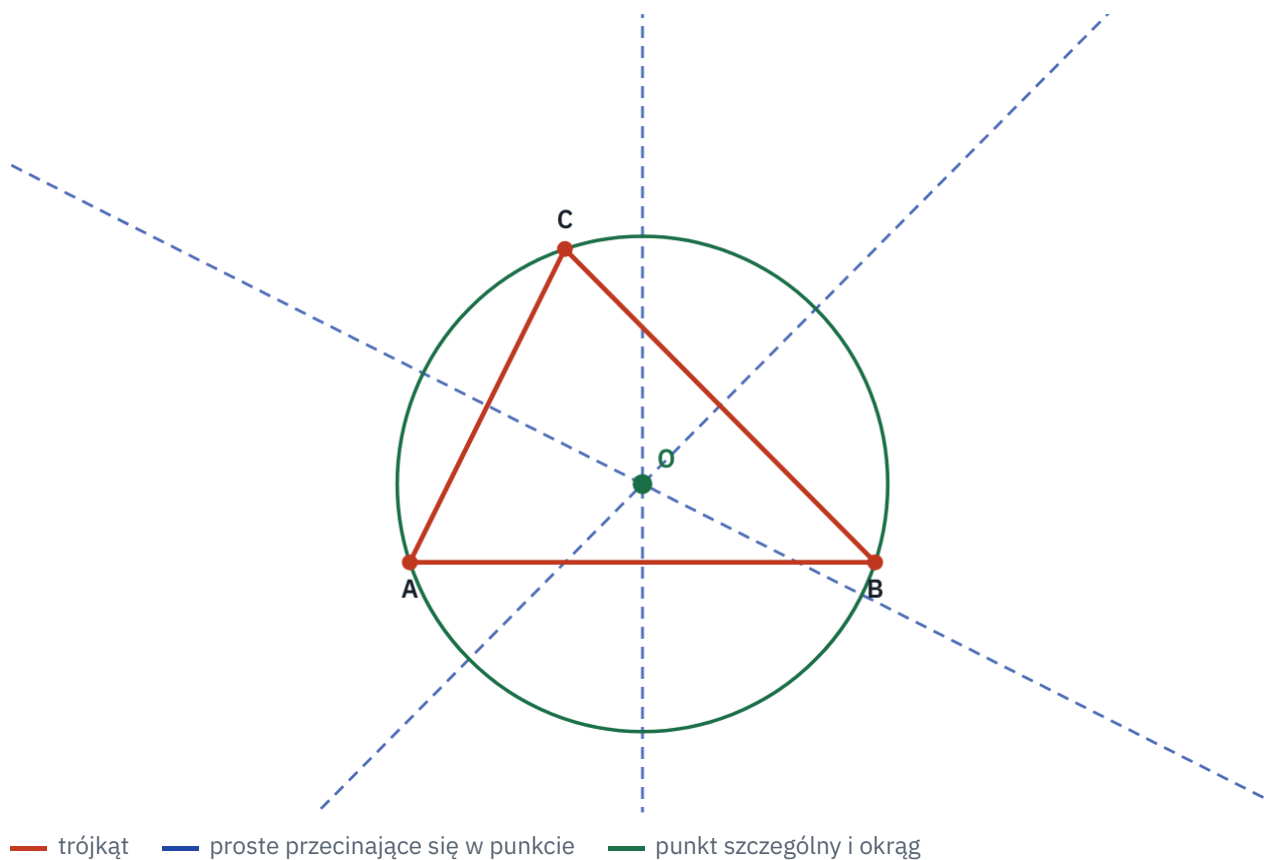
2 Punkty szczególne

CZTERY PUNKTY

- **Środek okręgu wpisanego:** przecięcie dwusiecznych kątów. Leży zawsze wewnątrz trójkąta, w odległości r od każdego boku.
- **Środek okręgu opisanego:** przecięcie symetralnych boków. W odległości R od każdego wierzchołka. W trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz, w prostokątnym w środku przeciwprostokątnej, w rozwartokątnym na zewnątrz.
- **Środek ciężkości:** przecięcie środkowych. Dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.
- **Ortocentrum:** przecięcie prostych zawierających wysokości. W trójkącie prostokątnym to wierzchołek kąta prostego.

SYMULACJA 1

Wybierz punkt szczególny i przesuwaj wierzchołek C . Rysunek pokazuje trzy proste, które się w nim przecinają, a dla środków okręgów także sam okrąg. Zobacz, kiedy środek okręgu opisanego i ortocentrum wychodzą poza trójkąt.



— trójkąt — proste przecinające się w punkcie — punkt szczególny i okrąg

rodzaj **ostrokątny**

boki 5,66; 4,47; 6,00

R 3,16

r 1,49

środek okręgu opisanego (3,00; 1,00), wewnątrz trójkąta

Symetralne boków przecinają się w punkcie równo odległym od wierzchołków. Trójkąt jest ostrokątny, więc ten punkt leży wewnątrz.

Stan na rysunku: $A = (0; 0)$, $B = (6; 0)$, $C = (2,00; 4,00)$, trójkąt ostrokątny, $R \approx 3,16$, $r \approx 1,49$.

Przykład 2.1**Środek ciężkości**

Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , AD jest środkową i $|AS| = 8$. Oblicz $|AD|$.

1 $|AS| : |SD| = 2 : 1$, więc $|SD| = 4$.

Wynik: $|AD| = 12$.

- Środkowa AD trójkąta ma długość 18, S to środek ciężkości. Oblicz $|AS|$ i $|SD|$.
- Wierzchołki trójkąta prostokątnego to $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 8)$. Podaj środek okręgu opisanego na tym trójkącie.

□□ podstawowe ▤▤ średnie ▥▥▥ trudniejsze

3 Trójkąt równoboczny

🔑 BOK a , WYSOKOŚĆ h

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Wszystkie punkty szczególne pokrywają się, a wysokości są też środkowymi. Stąd $R = 2r$ i $R + r = h$.

Przykład 3.1

Bok z promienia okręgu opisanego

Trójkąt równoboczny jest wpisany w okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$. Oblicz długość jego boku.

- $R = \frac{2}{3}h$, więc $h = \frac{3}{2}R = 6\sqrt{3}$.
- $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, więc $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Wynik: $a = 12$ (krócej: $a = R\sqrt{3}$).

- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku 9.
- Okrąg wpisany w trójkąt równoboczny ma promień 2. Oblicz bok trójkąta.

- 3 Trójkąt równoboczny jest wpisany w okrąg o promieniu 6. Oblicz jego pole.

podstawowe średnie trudniejsze

4 Promienie w dowolnym trójkącie

WZORY (W BROSZURZE CKE)

$$P = p \cdot r \implies r = \frac{2P}{a+b+c}, \quad P = \frac{abc}{4R} \implies R = \frac{abc}{4P},$$

gdzie p to połowa obwodu. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c wychodzi prościej: $R = \frac{c}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Przykład 4.1

Trójkąt prostokątny

Przyprostokątne mają długości 9 i 12. Oblicz R i r .

- $c = \sqrt{81 + 144} = 15$, więc $R = \frac{15}{2}$.
- $r = \frac{9+12-15}{2} = 3$. Kontrola: $P = 54$, $p = 18$, $r = \frac{54}{18} = 3$ ✓.

Wynik: $R = \frac{15}{2}$, $r = 3$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 8 min

- 1 Przyprostokątne mają długości 8 i 15. Oblicz R i r .

- 2 Trójkąt ma boki 10, 10, 12. Oblicz r i R .

podstawowe średnie trudniejsze

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 20 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · RODZAJ TRÓJKĄTA

ZESTAWY A

1 Czy trójkąt istnieje? Jeśli tak, czy jest ostro-, prosto- czy rozwartokątny?



a) 4, 5, 6

b) 6, 6, $6\sqrt{2}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

POZIOM B · ŚRODKOWE I TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY

ZESTAWY B

1 Oblicz (S to środek ciężkości, AD środkowa).



a) $|AD| = 21$; $|AS|$

b) równoboczny, $R = 10$; a

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

POZIOM C · PROMIENIE

ZESTAWY C

1 Oblicz.



a) przyprostokątne 5, 12; R
i r

b) $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$,
 $C = (0, 8)$; środek okręgu
opisanego

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Pełny trening (20 przykładów i zadań) →

W arkuszach 2024–2026 są to wyłącznie zadania za 1 punkt: zamknięte, prawda/fałsz albo „uzupełnij”. Pytają o promień okręgu opisanego lub wpisanego (w trójkącie prostokątnym i równobocznym), o to, który punkt jest środkiem którego okręgu, i o podział środkowej. W informatorze są też zadania otwarte za 3–4 punkty, w których punkty przyznaje się za kolejne wielkości pośrednie. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

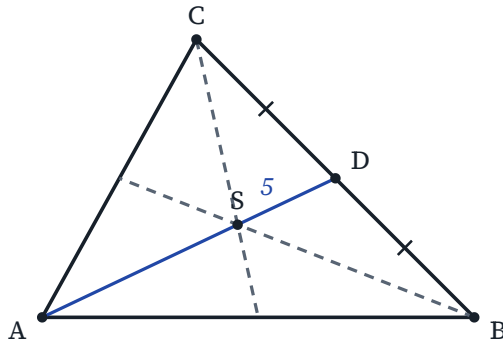
5 zadań · 7 pkt · ok. 15 min

- 1 (0–1 pkt) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 i 8. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

A. 4 B. 5 C. 6 D. 10

- 2 (0–1 pkt) Uzupełnij zdanie. Trójkąt równoboczny jest wpisany w okrąg o promieniu $6\sqrt{3}$. Bok tego trójkąta ma długość _____.

- 3 (0–1 pkt) Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , D jest środkiem boku BC i $|SD| = 5$. Długość środkowej AD jest równa

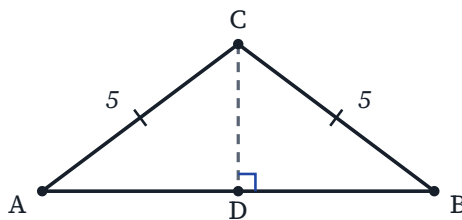


A. 7,5 B. 10 C. 15 D. 20

- 4 (0–1 pkt) Trójkąt ma boki 6, 8, 11. Oceń prawdziwość zdań.

1. Trójkąt jest rozwartokątny. P F
2. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta. P F

- 5 (0–3 pkt) Trójkąt ABC ma boki $|AC| = |BC| = 5$ i $|AB| = 8$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i promień okręgu na nim opisanego.



▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

- × „Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym to jego wysokość.”

$R = \frac{2}{3}h$. Według sprawozdania CKE z 2026 roku mylenie R z wysokością i przyjmowanie $R = a$ to główne przyczyny słabego wyniku (27%).

- × „Środek okręgu wpisanego to przecięcie środkowych.”

Dwusiecznych. Środkowe przecinają się w środku ciężkości. Pokrywają się tylko w trójkącie równobocznym.

- × „Środek ciężkości dzieli środkową na pół.”

W stosunku 2 : 1, dłuższa część przy wierzchołku.

- × „Rodzaj trójkąta sprawdzam dla dowolnych dwóch boków.”

Tylko dla najdłuższego boku po prawej stronie: $a^2 + b^2$ porównuje się z c^2 , gdzie c jest największe.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Gdzie leży środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym?

W środku przeciwprostokątnej.

2 Ile wynosi $\frac{R}{r}$ w trójkącie równobocznym?

2.

3 Jakie proste przecinają się w środku okręgu opisanego?

Symetralne boków.

4 Trójkąt ma boki 4, 5, 7. Jaki to trójkąt?

Rozwartokątny: $16 + 25 = 41 < 49$.

RÓWNOBOCZNY

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

DOWOLNY I PROSTOKĄTNY

$$r = \frac{2P}{a+b+c}, \quad R = \frac{abc}{4P}$$

$$\text{prostokątny: } R = \frac{c}{2}, \quad r = \frac{a+b-c}{2}$$

środkowa: 2 : 1 od wierzchołka

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” jest prawie wszystko z tej lekcji: wzory na pole trójkąta (w tym $P = \frac{abc}{4R}$, $P = p \cdot r$ i wzór Herona), związki w trójkącie równobocznym ($h, P, r = \frac{1}{3}h, R = \frac{2}{3}h$) i w prostokątnym ($R = \frac{c}{2}, r = \frac{a+b-c}{2}$). Wynik 27% z 2026 roku pokazuje, że problemem nie jest pamięć, tylko rozpoznanie, który wzór pasuje. Podziału środkowej 2 : 1 i warunku rodzaju trójkąta w broszurze nie ma.

Dalej: czworokąty i wielokąty foremne (lekcja 8.3 Czworokąty i wielokąty foremne).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $49 + 64 = 113 > 81$: ostrokątny.
2. $81 + 144 = 225 = 15^2$: prostokątny.
3. Nie: $2 + 3 = 5 < 6$.
4. $7 - 3 < x < 7 + 3$, czyli $x \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$: pięć liczb.

Zadania · część 2

1. $|AS| = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$, $|SD| = 6$.
2. Kąt prosty przy A , przeciwprostokątna BC ; jej środek: $(3, 4)$. Kontrola: odległość od każdego wierzchołka jest równa 5.

Zadania · część 3

1. $R = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$.
2. $h = 3r = 6$, $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.
3. $a = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, $P = \frac{108\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$.

Zadania · część 4

1. $c = 17$, $R = \frac{17}{2}$, $r = \frac{8+15-17}{2} = 3$.
2. 1. Wysokość na podstawę: $\sqrt{100 - 36} = 8$, pole 48.
2. $r = \frac{2 \cdot 48}{32} = 3$.
3. $R = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{1200}{192} = \frac{25}{4}$.

Zestawy A

1. a) ostrokątny b) prostokątny

Zestawy B

1. a) 14 b) $10\sqrt{3}$

Zestawy C

1. a) $\frac{13}{2}$ i 2 b) $(3, 4)$

Zadania w stylu maturalnym

1. B. $c = 10$, $R = \frac{c}{2}$.
2. 18: $a = R\sqrt{3} = 6 \cdot 3$.
3. C. $|SD|$ to $\frac{1}{3}$ środkowej.

4. **PF.** $36 + 64 = 100 < 121$: rozwartokątny, więc środek okręgu opisanego leży na zewnątrz.

5. 1. **Wysokość i pole.** $|CD| = \sqrt{25 - 16} = 3$, $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$.

2. **Okrąg wpisany.** $r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$.

3. **Okrąg opisany.** $R = \frac{abc}{4P} = \frac{200}{48} = \frac{25}{6}$.

1 pkt za wysokość 3 i pole 12. 2 pkt za $r = \frac{4}{3}$. 3 pkt za $R = \frac{25}{6}$.

Matura z matematyki · Lekcja 8.2: Trójkąty: rodzaje i punkty szczególne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdanie CKE z sesji 2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt8_2.py), rysunki z tools/rysunki/r8_2.py.