

Okrąg: kąty wpisane i środkowe, łuk, wycinek, styczne i cięciwy

Zadanie z kątem wpisanym i środkowym pojawia się w arkuszu podstawowym prawie w każdej sesji, zawsze z rysunkiem. W maju 2025 rozwiązało je 81% zdających, w maju 2026 84%: to jedno z najłatwiejszych zadań arkusza, pod warunkiem że zna się trzy fakty i umie je łączyć w łańcuch. Do tego dochodzą łuk i wycinek jako ułamek pełnego kąta oraz styczna prostopadła do promienia.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
VIII.1, VIII.5,
VIII.6

W TEJ LEKCJI

- 0 Jeden łuk, wiele kątów
- 1 Kąt środkowy i kąt wpisany
- 2 Łuk i wycinek
- 3 Styczne i cięciwy
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Jeden łuk, wiele kątów

Cięciwa AB dzieli okrąg na dwa łuki. Każdy kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona przechodzą przez A i B , „patrzy” na jeden z tych łuków. Kluczowy fakt: wszystkie takie kąty z wierzchołkiem po tej samej stronie cięciwy są równe i równe połowie kąta środkowego opartego na tym łuku. Zadania maturalne polegają na znalezieniu, który kąt jest środkowy, który wpisany, i na jakim łuku się opierają. Resztę załatwiają trójkąty równoramienne z promieni i suma kątów w trójkącie.

Kąt środkowy i kąt wpisany

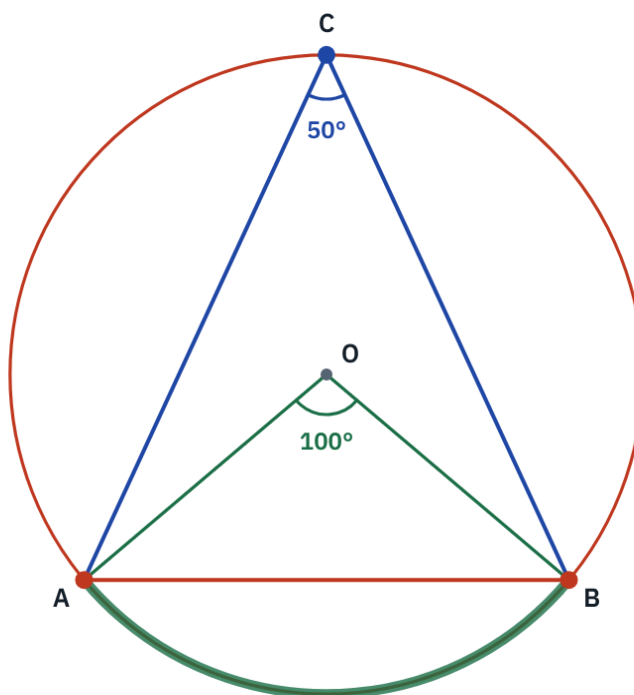
TRZY FAKTY

1. Kąt wpisany jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.
2. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.
3. Kąt wpisany oparty na półokręgu (na średnicy) jest prosty.

Do tego: trójkąt z dwóch promieni i cięciwy jest równoramienny, więc jego kąty przy cięciwie są równe.

SYMULACJA 1

Cięciwa AB wyznacza kąt środkowy AOB (zmieniasz go suwakiem). Zaznaczony łuk to łuk, na którym oparty jest kąt środkowy. Przesuwaj punkt C po okręgu: dopóki C leży poza zaznaczonym łukiem, kąt ACB się nie zmienia i wynosi połowę kąta środkowego. Gdy C przejdzie na zaznaczony łuk, kąt wpisany ma 180° minus ta połowa.



— kąt środkowy AOB — kąt wpisany ACB — cięciwa i okrąg

kąt środkowy AOB 100°

kąt wpisany ACB 50°

C leży na łuku drugim

przewidywanie $100^\circ : 2 = 50^\circ$

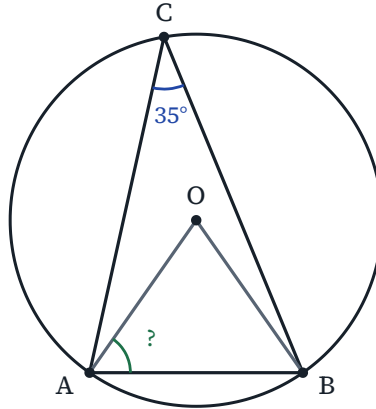
C leży na drugim łuku. Kąt ACB jest oparty na zaznaczonym łuku i jest połową kąta środkowego: 50° . Przesuwaj C: dopóki nie przejdziesz przez A ani B, kąt się nie zmienia.

Stan na rysunku: kąt środkowy AOB = 100° , C w położeniu 90° , kąt ACB = 50° .

Przykład 1.1

Łańcuch: wpisany, środkowy, równoramienny

Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku O , a $\angle ACB = 35^\circ$. Oblicz $\angle OAB$.



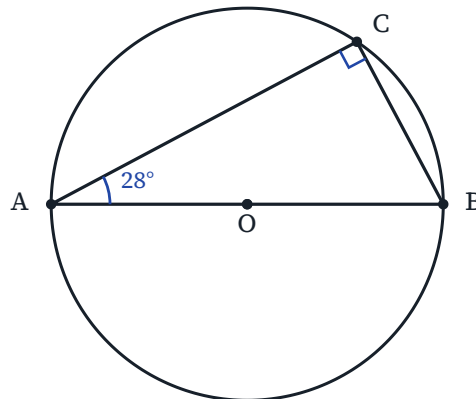
- 1 Kąt środkowy AOB jest oparty na tym samym łuku co kąt wpisany ACB : $\angle AOB = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$.
- 2 $|OA| = |OB|$, więc trójkąt AOB jest równoramienny: $\angle OAB = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2}$.

Wynik: $\angle OAB = 55^\circ$.

Przykład 1.2

Kąt oparty na średnicy

AB jest średnicą okręgu, punkt C leży na okręgu, a $\angle CAB = 28^\circ$. Oblicz $\angle ABC$.



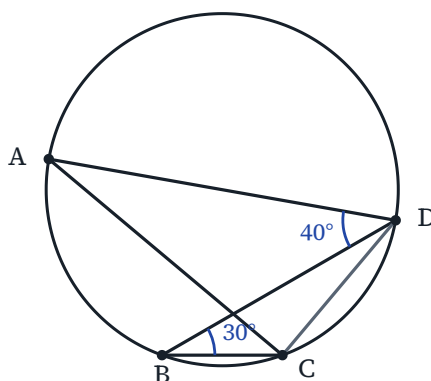
- 1 $\angle ACB = 90^\circ$ (oparty na średnicy).
- 2 $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ$.

Wynik: $\angle ABC = 62^\circ$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 6 min

- 1 Kąt środkowy AOB ma 130° . Punkt C leży na dłuższym łuku AB . Oblicz $\angle ACB$.
- 2 Punkty A, B, C, D leżą na okręgu (jak na rysunku). $\angle ADB = 40^\circ$, $\angle DBC = 30^\circ$. Oblicz $\angle ACB$ i $\angle DAC$.



- 3 Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O , $\angle OBC = 20^\circ$, a A i O leżą po tej samej stronie prostej BC . Oblicz $\angle BAC$.

podstawowe średnie trudniejsze

2 Łuk i wycinek

UŁAMEK PEŁNEGO KĄTA (W BROSZURZE CKE)

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r, \quad P_{\text{wycinka}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2,$$

gdzie α to kąt środkowy. Gdy dany jest kąt wpisany, najpierw trzeba go podwoić.

Przykład 2.1

Łuk z kąta wpisanego

Okrąg ma promień 9. Kąt wpisany ACB ma 40° . Oblicz długość łuku AB , na którym jest oparty.

- Kąt środkowy: 80° .
- $l = \frac{80}{360} \cdot 18\pi = \frac{2}{9} \cdot 18\pi$.

Wynik: $l = 4\pi$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 4 min

- Oblicz pole wycinka koła o promieniu 6 i kącie środkowym 150° .
- Łuk okręgu o promieniu 10 ma długość 5π . Oblicz kąt środkowy i kąt wpisany oparte na tym łuku.

podstawowe średnie trudniejsze

STYCZNA I CIĘCIWA

- Styczna jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.
- Dwa odcinki styczne poprowadzone z jednego punktu P mają równe długości, a PO jest dwusieczną kąta między nimi.
- Kąt między styczną a cięciwą wychodzącą z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku leżącym wewnątrz tego kąta (twierdzenie w broszurze CKE).
- Cięciwa w odległości d od środka: $\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$ (twierdzenie Pitagorasa w trójkącie z promieniem).

Przykład 3.1

Długość stycznej

Punkt P leży w odległości 13 od środka okręgu o promieniu 5. Oblicz długość odcinka stycznej z P do okręgu.

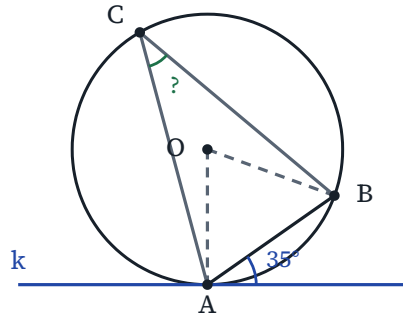
- 1 Trójkąt OAP ma kąt prosty przy A (punkt styczności).
- 2 $|PA| = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144}$.

Wynik: $|PA| = 12$.

Przykład 3.2

Kąt między styczną a cięciwą

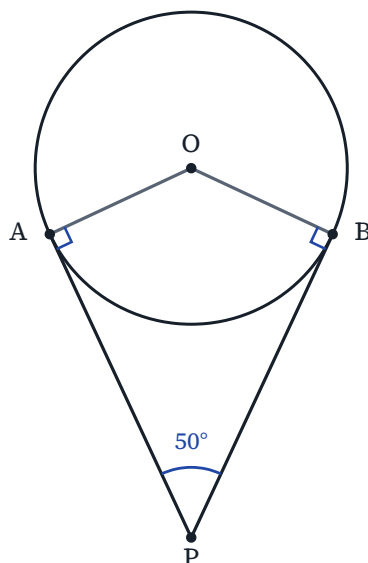
Prosta k jest styczna do okręgu o środku O w punkcie A . Cięciwa AB tworzy z prostą k kąt ostry 35° . Punkt C leży na dłuższym łuku AB . Oblicz $\angle ACB$.



- 1 $\angle OAB = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ (styczna prostopadła do OA).
- 2 Trójkąt AOB równoramienny: $\angle AOB = 180^\circ - 2 \cdot 55^\circ = 70^\circ$.
- 3 $\angle ACB = \frac{70^\circ}{2}$.

Wynik: $\angle ACB = 35^\circ$, czyli tyle, ile kąt między styczną a cięciwą.

- 1 Z punktu P poprowadzono styczne PA i PB do okręgu o środku O , $\angle APB = 50^\circ$. Punkt C leży na dłuższym łuku AB . Oblicz $\angle AOB$ i $\angle ACB$.



- 2 Odcinek stycznej PA ma długość 8, a promień okręgu 6. Oblicz $|OP|$ i odległość punktu P od okręgu.

- 3 Cięciwa okręgu o promieniu 10 leży w odległości 6 od środka. Oblicz jej długość.

□□□ podstawowe ▤▤▤ średnie ▦▦▦ trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 20 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · KĄTY

ZESTAWY A

- 1 Oblicz szukany kąt (O to środek okręgu, wszystkie punkty A, B, C leżą na okręgu).

- a) $\angle AOB = 80^\circ$, C na b) $\angle OAB = 25^\circ$, C na
dłuższym łuku AB ; $\angle ACB$ dłuższym łuku; $\angle ACB$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

POZIOM B · ŁUKI I WYCINKI

ZESTAWY B

1 Oblicz.

- a) łuk: $r = 4$, kąt środkowy 90° b) kąt środkowy: $r = 6$,
pole wycinka 6π

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM C · STYCZNE I CIĘCIWY

ZESTAWY C

1 Oblicz (PA , PB to odcinki stycznych, A , B punkty styczności).

- a) $r = 5$, $|OP| = 13$; $|PA|$ b) $r = 3$, $\angle APB = 60^\circ$;
 $|PA|$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

Pełny trening (20 przykładów i zadań) →

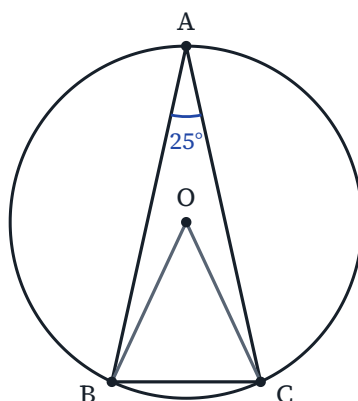
5 Na maturze

W arkuszach podstawowych 2024–2026 to prawie zawsze jedno zadanie zamknięte z rysunkiem: łańcuch kąt wpisany → kąt środkowy → trójkąt równoramienny z promieni albo kąt oparty na średnicy. Czasem w wiązce z drugim pytaniem o długość łuku. W informatorze są też zadania otwarte (wycinek jako siatka stożka, kolejne kąty w figurze) i krótki dowód. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 8 pkt · ok. 20 min

- 1 (0–1 pkt) Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O , $\angle BAC = 25^\circ$ (jak na rysunku).
Oceń prawdziwość zdań.



1. $\angle BOC = 50^\circ$. P F
2. $\angle OCB = 65^\circ$. P F

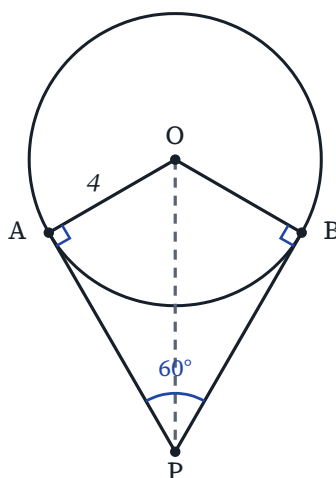
- 2 (0–1 pkt) Odcinek AB o długości 12 jest średnicą okręgu. Punkt C leży na okręgu i $|AC| = 6$. Kąt ABC ma miarę

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

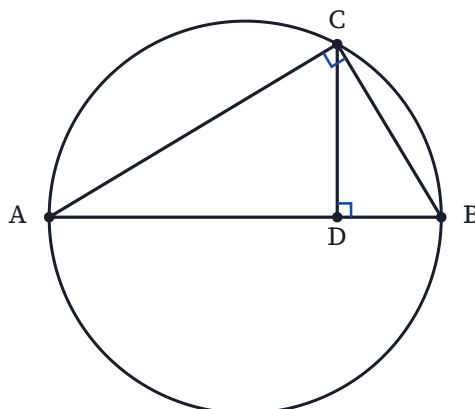
- 3 (0–1 pkt) W okręgu o promieniu 12 kąt wpisany oparty na łuku AB ma 30° . Długość tego łuku jest równa

A. 2π B. 4π C. 6π D. 8π

- 4 (0–3 pkt) Z punktu P poprowadzono styczne do okręgu o środku O i promieniu 4, styczne w punktach A i B . Kąt APB ma 60° . Oblicz $|PA|$ i pole czworokąta $PAOB$.



- 5 (0–2 pkt) Odcinek AB jest średnicą okręgu, punkt C leży na okręgu, a D jest spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z C . Wykaż, że $\angle ACD = \angle ABC$.



▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

- × „Kąt wpisany jest dwa razy większy od środkowego.”

Odwrotnie: środkowy jest dwa razy większy. Kontrola: kąt oparty na średnicy (półokrąg, środkowy 180°) ma 90° .

- × „Kąty wpisane oparte na tej samej cięciwie są zawsze równe.”

Tylko gdy wierzchołki leżą po tej samej stronie cięciwy. Po przeciwnych stronach kąty sumują się do 180° .

- × „We wzorze na łuk wstawiam kąt z rysunku.”

We wzorze jest kąt środkowy. Jeśli na rysunku jest kąt wpisany, trzeba go podwoić.

- × „Styczna tworzy z promieniem kąt 45° .”

Zawsze 90° w punkcie styczności. To najczęściej używany kąt prosty w zadaniach ze stycznymi.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Kąt środkowy ma 100° . Ile ma kąt wpisany oparty na tym samym łuku?
 50° .

- 2 Ile ma kąt środkowy oparty na boku sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg?
 60° , czyli $\frac{360^\circ}{6}$.

- 3 Jaką część obwodu stanowi łuk, na którym oparty jest kąt wpisany 45° ?
Kąt środkowy 90° , czyli $\frac{1}{4}$ obwodu.

- 4 Ile wynosi kąt OAP , jeśli PA jest styczną, a A punktem styczności?
 90° .

KĄTY

środkowy = 2 · wpisany (ten sam łuk)

wpisane na tym samym łuku równe

oparty na średnicy: 90°

styczna $\perp$ promień

DŁUGOŚCI

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r, \quad P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$$

$$\text{styczna: } |PA|^2 = |OP|^2 - r^2$$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są wzory na długość łuku i pole wycinka (z kątem w stopniach), twierdzenia o kątach wpisanych i środkowych, o kącie między styczną i cięciwą, o odcinkach stycznych oraz o odcinkach siecznej i stycznej ($|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$). Prostopadłości stycznej do promienia w broszurze nie ma: tę trzeba znać samodzielnie.

Dalej: trójkąty i ich punkty szczególne (lekcja 8.2 Trójkąty: rodzaje i punkty szczególne).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $\frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$.
2. $\angle ACB = \angle ADB = 40^\circ$ (oba oparte na łuku AB). $\angle DAC = \angle DBC = 30^\circ$ (oba oparte na łuku DC).
3. 1. Trójkąt OBC jest równoramienny: $\angle BOC = 180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ$.
2. $\angle BAC = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$.

Zadania · część 2

1. $\frac{150}{360} \cdot 36\pi = 15\pi$.
2. Łuk to $\frac{5\pi}{20\pi} = \frac{1}{4}$ obwodu: kąt środkowy 90° , wpisany 45° .

Zadania · część 3

1. W czworokącie $PAOB$ kąty przy A i B są proste: $\angle AOB = 360^\circ - 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$, $\angle ACB = 65^\circ$.
2. $|OP| = \sqrt{64 + 36} = 10$; najbliższy punkt okręgu leży na odcinku OP , więc odległość to $10 - 6 = 4$.
3. Połowa cięciwy: $\sqrt{100 - 36} = 8$; cięciwa 16.

Zestawy A

1. a) 40° b) 65°

Zestawy B

1. a) 2π b) 60°

Zestawy C

1. a) 12 b) $3\sqrt{3}$

Zadania w stylu maturalnym

1. **PP.** Środkowy dwa razy większy od wpisanego; trójkąt BOC równoramienny: $\frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$.
2. **A.** $\angle ACB = 90^\circ$, więc $\sin \angle ABC = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
3. **B.** Kąt środkowy 60° : $\frac{1}{6} \cdot 24\pi$.
4. 1. Trójkąt OAP . $\angle OAP = 90^\circ$, $\angle APO = 30^\circ$ (PO jest dwusieczną).
2. Długość. $|OP| = 2|OA| = 8$, $|PA| = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$.
3. Pole. $P_{PAOB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.
1 pkt za kąt prosty przy A i $\angle APO = 30^\circ$. **2 pkt** za $|PA| = 4\sqrt{3}$. **3 pkt** za pole $16\sqrt{3}$.
5. 1. **Kąt prosty.** $\angle ACB = 90^\circ$ (oparty na średnicy), więc w trójkącie ABC : $\angle CAB + \angle ABC = 90^\circ$.
2. **Trójkąt ACD .** $\angle ADC = 90^\circ$, więc $\angle ACD = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \angle CAB$.
3. **Wniosek.** $\angle ACD = \angle ABC$.

1 pkt za zauważenie, że $\angle ACB = 90^\circ$. **2 pkt** za pełne uzasadnienie. Sprawdzenie na konkretnym trójkącie: 0 pkt.

Matura z matematyki · Lekcja 8.1: Okrąg: kąty wpisane i środkowe, łuk, wycinek, styczne i cięciwy · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt8_1.py), rysunki generowane skryptem tools/rysunki/r8_1.py.