

Twierdzenie sinusów i rozwiązywanie trójkątów

Twierdzenie sinusów łączy boki trójkąta z promieniem okręgu opisanego: $a = 2R \sin \alpha$. Razem z twierdzeniem cosinusów (lekcja 7.2 Twierdzenie cosinusów i pole trójkąta) pozwala wyznaczyć każdy trójkąt z trzech danych. W arkuszach rozszerzonych 2024–2026 pojawia się rzadko, ale w trudnych zadaniach: zadanie z maja 2025 rozwiązało 17% zdających i było najtrudniejszym w tamtym arkuszu.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 50
min zadań

ZADANIA

10 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
VII.R7–VII.R8

W TEJ LEKCJI

- 0 Bok, kąt i okrąg
- 1 Twierdzenie sinusów
- 2 Dwa boki i kąt nie między nimi
- 3 Pole i promień okręgu opisanego
- 4 Sinusy czy cosinusy
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Bok, kąt i okrąg

Każdy trójkąt da się wpisać w okrąg. Bok a jest wtedy cięciwą, a kąt α naprzeciw niego jest kątem wpisanym opartym na tej cięciwie. Kąt środkowy oparty na tej samej cięciwie ma miarę 2α , więc połowa cięciwy to $R \sin \alpha$. Stąd $a = 2R \sin \alpha$, i tak samo dla pozostałych boków. To jest całe twierdzenie sinusów: bok jest proporcjonalny do sinus kąta naprzeciw, a współczynnikiem jest średnica okręgu opisanego.

Twierdzenie sinusów

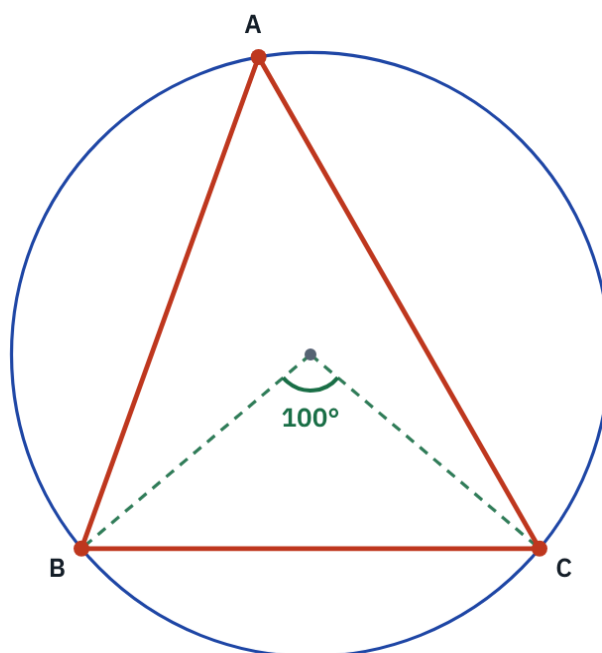
✎ TWIERDZENIE SINUSÓW (W BROSZURZE CKE)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Kąt α leży naprzeciw boku a , R to promień okręgu opisanego. Wzór działa dla każdego trójkąta, także rozwartokątnego: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

SYMULACJA 1

W trybie „okrąg opisany” zmieniaj kąty α , β i promień R : wszystkie trzy ilorazy bok/sinus są równe $2R$. Kąt środkowy nad bokiem a ma miarę 2α . W trybie „dwa boki i kąt” dane są a , b i kąt α naprzeciw a : okrąg o środku C i promieniu a przecina ramię kąta w zerze, jednym albo dwóch punktach, czyli tyle jest trójkątów.



— trójkąt — okrąg opisany albo okrąg o promieniu a — kąt środkowy 2α albo możliwe położenia B

α, β, γ 50°, 70°, 60°

a, b, c 4,60; 5,64; 5,20

$a/\sin \alpha$ 6,00

$b/\sin \beta$ 6,00

$c/\sin \gamma$ 6,00

$2R$ 6,00

Kąt środkowy oparty na boku a ma 100°, czyli dwa razy więcej niż kąt wpisany α . Połowa cięciwy to $R \cdot \sin \alpha$, więc $a = 2R \cdot \sin \alpha$.

Stan na rysunku: $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $R = 3,0$, $a = 4,60$, $b = 5,64$, $c = 5,20$.

Przykład 1.1**Promień z boku i kąta**

W trójkącie bok $a = 6$ leży naprzeciw kąta $\alpha = 30^\circ$. Oblicz promień okręgu opisanego.

1 $2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12.$

Wynik: $R = 6.$

Przykład 1.2

Dwa kąty i bok

W trójkącie $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ i $a = 2\sqrt{2}$. Oblicz b i c .

- 1 $2R = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4.$
- 2 $b = 2R \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$
- 3 $\gamma = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$; $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (lekcja 7.4 Wzory na funkcje sumy kątów i równania trygonometryczne).
- 4 $c = 4 \sin 75^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$

Wynik: $b = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Kontrola: największy kąt 75° leży naprzeciw największego boku $\sqrt{6} + \sqrt{2} \approx 3,86$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 6 min

- 1 Bok $a = 8$ leży naprzeciw kąta 150° . Oblicz R .

- 2 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $a = 4$. Oblicz b .

- 3 Trójkąt jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Jeden z jego kątów ma 135° . Oblicz długość boku naprzeciw tego kąta.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

Dwa boki i kąt nie między nimi

PRZYPADEK NIEJEDNOZNACZNY

Dane: a , b i kąt α naprzeciw a . Z twierdzenia sinusów $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$.

- $\sin \beta > 1$: trójkąt nie istnieje;
- $\sin \beta = 1$: jeden trójkąt, prostokątny;
- $\sin \beta < 1$: kandydaci β_1 (ostry) i $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$. Każdego trzeba sprawdzić warunkiem $\alpha + \beta < 180^\circ$. Jeśli $a > b$, to $\beta < \alpha$ i zostaje tylko β_1 .

Sinus nie odróżnia kąta ostrego od rozwartego. To jest główna różnica względem twierdzenia cosinusów, gdzie znak cosinusa rozstrzyga sprawę.

Przykład 2.1

Dwa trójkąty

W trójkącie ABC : $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 30^\circ$. Oblicz β i c .

- 1 $\sin \beta = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\beta = 60^\circ$ albo $\beta = 120^\circ$.
- 2 Oba spełniają $30^\circ + \beta < 180^\circ$.
- 3 $\beta = 60^\circ$: $\gamma = 90^\circ$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot 1}{\frac{1}{2}} = 4$.
- 4 $\beta = 120^\circ$: $\gamma = 30^\circ$, $c = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2$.

Wynik: $\beta = 60^\circ$, $c = 4$ albo $\beta = 120^\circ$, $c = 2$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 6 min

- 1 Ile jest trójkątów, w których $a = 3$, $b = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 30^\circ$?

- 2 Ile jest trójkątów, w których $a = 4$, $b = 2$, $\alpha = 60^\circ$?

- 3 Ile jest trójkątów, w których $a = 1$, $b = 4$, $\alpha = 30^\circ$?

□□□ podstawowe ■□□ średnie ■■■ trudniejsze

Pole i promień okręgu opisanego

 WZORY Z R (W BROSZURZE CKE)

$$P = \frac{abc}{4R}, \quad P = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Pierwszy wynika z $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ i $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$. Gdy znane są trzy boki, pole liczy się wzorem Herona albo z cosinusa kąta, a potem $R = \frac{abc}{4P}$.

Przykład 3.1

Promień z trzech boków

Boki trójkąta mają długości 13, 14, 15. Oblicz promień okręgu opisanego.

1 Wzór Herona: $p = 21$, $P = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84$.

2 $R = \frac{abc}{4P} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{336} = \frac{2730}{336}$.

Wynik: $R = \frac{65}{8}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 5 min

1 Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku 6.



2 Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie o bokach 5, 5, 6.



 podstawowe  średnie  trudniejsze

Sinusy czy cosinusy

WYBÓR TWIERDZENIA

- dwa kąty i dowolny bok: **sinusy** (trzeci kąt z sumy 180°);
- dwa boki i kąt między nimi: **cosinusy** (trzeci bok);
- trzy boki: **cosinusy** (kąty), potem ewentualnie sinusy albo $\frac{abc}{4P}$ dla R ;
- dwa boki i kąt nie między nimi: **sinusy** z kontrolą liczby rozwiązań albo cosinusy z równaniem kwadratowym na trzeci bok;
- w treści jest okrąg opisany albo R : prawie zawsze **sinusy**.

Przykład 4.1

Oba twierdzenia po kolei

W trójkącie $b = 4\sqrt{2}$, $c = 7$, a kąt między nimi $\alpha = 45^\circ$. Oblicz a i promień okręgu opisanego.

- 1 Cosinusy: $a^2 = 32 + 49 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 81 - 56 = 25$, więc $a = 5$.
- 2 Sinusy: $2R = \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.

Wynik: $a = 5$, $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 8 min

- 1 Boki trójkąta mają długości 7, 8, 13. Oblicz miarę największego kąta i promień okręgu opisanego.
- 2 W trójkącie $a = 5$, $b = 8$, $\alpha = 30^\circ$. Ile jest takich trójkątów? Oblicz $\sin \beta$ i wszystkie możliwe wartości $\cos \beta$.

podstawowe średnie trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 19 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

 ZESTAWY A

1 Oblicz szukaną wielkość (kąt leży naprzeciw boku).



a) $a = 10, \alpha = 30^\circ; R$ b) $R = 5, \gamma = 150^\circ; c$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

 ZESTAWY B

1 Oblicz bok.



a) $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, a = 2;$
 b

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Ile jest trójkątów o danych a, b i kącie α naprzeciw a ?



a) $a = 5, b = 10, \alpha = 30^\circ$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

 ZESTAWY C

1 Oblicz.



a) R dla boków 6, 8, 10 b) pole: $R = 2$, kąty $30^\circ,$
 $60^\circ, 90^\circ$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (19 przykładów i zadań) →

W puli zadań CKE z lat 2024–2026 są trzy zadania do tej lekcji (3, 3 i 5 punktów). Punkty przyznaje się za kolejne etapy: zapisanie zależności z twierdzenia sinusów, sprowadzenie jej do równania z jedną niewiadomą (często przez wzór na sinus sumy lub różnicy) i wynik. W maju 2025 zadanie o podziale trójkąta równobocznego na dwa trójkąty o danym stosunku pól rozwiązało 17% zdających. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 14 pkt · ok. 35 min

- 1 (0–3 pkt) Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o promieniu 5. Wiadomo, że $|BC| = 5\sqrt{3}$, $|AC| = 5\sqrt{2}$, a kąt BAC jest ostry. Oblicz miarę kąta ACB .
- 2 (0–3 pkt) W trójkącie ABC kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC , $|BC| = 4$ i $|AC| = 6$. Oblicz cosinus kąta BAC .
- 3 (0–4 pkt) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. $|AB| = 3$, $|BC| = 5$, $\angle ABC = 120^\circ$ oraz $|AD| = |CD|$. Oblicz promień okręgu i pole trójkąta ACD .
- 4 (0–4 pkt) W trójkącie ABC : $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D . Oblicz stosunek pól trójkątów ADC i DBC .

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Najczęstsze błędy

✗ „ $\frac{a}{\sin \alpha} = R$.”

Iloraz jest równy średnicy, $2R$. Kontrola: w trójkącie równobocznym o boku 1 wychodzi $R = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$, czyli mniej niż bok.

✗ „Z $\sin \beta = \frac{1}{2}$ wynika $\beta = 30^\circ$.”

Także 150° . Drugi kandydat odpada tylko wtedy, gdy suma z pozostałymi kątami przekracza 180° albo gdy β leży naprzeciw krótszego z dwóch danych boków.

✗ „Kąt α leży przy boku a .”

Naprzeciw. W oznaczeniach CKE wierzchołek A ma kąt α , a bok $a = |BC|$ go nie zawiera.

× „Twierdzenie sinusów wymaga kąta ostrego.”

Działa dla każdego kąta, bo $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, a kąt wpisany rozwarty opiera się na dłuższym łuku.

8

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Ile wynosi R , jeśli trójkąt jest prostokątny o przeciwprostokątnej 10?

5: $\frac{10}{\sin 90^\circ} = 2R$. Środek okręgu leży w środku przeciwprostokątnej.

- 2 Kiedy dane a, b, α wyznaczają dokładnie jeden trójkąt?

Gdy $a > b$, gdy $a = b$ i α jest ostry (trójkąt równoramienny) albo gdy $\sin \beta = 1$.

- 3 Jak policzyć R z trzech boków?

Pole z Herona albo z $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$, potem $R = \frac{abc}{4P}$; albo kąt z twierdzenia cosinusów i $R = \frac{c}{2 \sin \gamma}$.

- 4 Jaki jest stosunek boków w trójkącie o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$?

$\sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ = 1 : \sqrt{3} : 2$.

TWIERDZENIE SINUSÓW

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

$$P = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

PRZYPADEK a, b, α

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

> 1 : brak; $= 1$: jeden; < 1 : sprawdź β_1 i $180^\circ - \beta_1$

$a > b$: tylko kąt ostry

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są twierdzenie sinusów (z $2R$), twierdzenie cosinusów, wzory na pole z R ($\frac{abc}{4R}$, $2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$), wzór Herona i twierdzenie o dwusiecznej. Analizy liczby rozwiązań w przypadku dwóch boków i kąta nie ma: tę trzeba umieć samodzielnie.

Dalej: dział VIII, planimetria; zaczynamy od okręgu, cięciw i kątów wpisanych (lekcja 8.1 Okrąg: cięciwy, styczne, kąty wpisane i środkowe, wycinek koła).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $2R = \frac{8}{\sin 150^\circ} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$, więc $R = 8$.

2. $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$.

3. $a = 2R \sin 135^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

Zadania · część 2

1. $\sin \beta = \frac{3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\beta = 45^\circ$ albo 135° ; oba z 30° dają sumę mniejszą niż 180° . Dwa trójkąty.

2. $a > b$, więc $\beta < \alpha$ i tylko kąt ostry ($\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{4}$). Jeden trójkąt.

3. $\sin \beta = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 2 > 1$. Żadnego.

Zadania · część 3

1. $R = \frac{6}{2 \sin 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

2. Wysokość na bok 6: $\sqrt{25 - 9} = 4$, pole 12. $R = \frac{5 \cdot 5 \cdot 6}{48} = \frac{25}{8}$.

Zadania · część 4

1. $\cos \gamma = \frac{49+64-169}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{-56}{112} = -\frac{1}{2}$, więc $\gamma = 120^\circ$.

2. $R = \frac{13}{2 \sin 120^\circ} = \frac{13}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$.

2. $\sin \beta = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{5} = \frac{4}{5}$.

$\cos \beta = \frac{3}{5}$ albo $\cos \beta = -\frac{3}{5}$; kąt rozwarty ma ok. $126,9^\circ$, a $30^\circ + 126,9^\circ < 180^\circ$.

3. Dwa trójkąty.

Zestawy A

1. a) 10 b) 5

Zestawy B

1. a) $2\sqrt{2}$

2. a) 1 (prostokątny)

Zestawy C

1. a) 5 b) $2\sqrt{3}$

Zadania w stylu maturalnym

1. $\sin \angle A = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kąt ostry: 60° .

2. $\sin \angle B = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 45° albo 135° ; $60^\circ + 135^\circ > 180^\circ$, więc 45° .

3. Wynik. $\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

1 pkt za $\angle A = 60^\circ$. 2 pkt za $\angle B = 45^\circ$ z odrzuceniem 135° . 3 pkt za 75° .

2. 1. **Twierdzenie sinusów.** $\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{6}{\sin 2\alpha}$.

2. **Podwojony kąt.** $\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{6}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$; $\sin \alpha \neq 0$, więc $8 \cos \alpha = 6$.

3. **Wynik.** $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.

1 pkt za równanie z twierdzenia sinusów. 2 pkt za zastosowanie $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. 3 pkt za $\frac{3}{4}$.

3. 1. **Przekątna.** $|AC'|^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$, $|AC'| = 7$.

2. **Promień.** $2R = \frac{7}{\sin 120^\circ}$, $R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3. **Kąt D .** w czworokącie wpisanym $\angle ADC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$; trójkąt ACD jest równoramienny z kątem 60° , czyli równoboczny.

4. **Pole.** $\frac{49\sqrt{3}}{4}$.

1 pkt za $|AC'| = 7$. 2 pkt za R . 3 pkt za $\angle ADC = 60^\circ$. 4 pkt za pole $\frac{49\sqrt{3}}{4}$.

4. 1. **Wspólna wysokość.** oba trójkąty mają wysokość z C na AB , więc $\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{|AD|}{|DB|}$.

2. **Dwusieczna.** $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$ (twierdzenie o dwusiecznej, w broszurze).

3. **Sinusy.** $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

4. **Wynik.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

1 pkt za stosunek pól równy $|AD| : |DB|$. 2 pkt za twierdzenie o dwusiecznej. 3 pkt za $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sin B}{\sin A}$. 4 pkt za $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Matura z matematyki · Lekcja 7.5: Twierdzenie sinusów i rozwiązywanie trójkątów · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdanie CKE z sesji 2025. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt7_5.py).