

Wzory na funkcje sumy kątów i równania trygonometryczne

Równanie trygonometryczne za 4–5 punktów to stały punkt arkusza rozszerzonego: w puli zadań CKE z lat 2024–2026 (arkusze i informator) jest ich sześć. W maju 2025 rozwiązało je 22% zdających, w maju 2026 29%. Schemat jest zawsze ten sam: wzór (suma, różnica, podwojony kąt) zamienia równanie na iloczyn, iloczyn rozpada się na równania elementarne, a z każdego wybiera się rozwiązania z przedziału. Tę lekcję zbudowaliśmy wokół tego schematu.

CZAS

ok. 40 min
czytania + ok. 60
min zadań

ZADANIA

11 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
VII.R5–VII.R6

W TEJ LEKCJI

- 0 Dlaczego iloczyn
- 1 Funkcje sumy i różnicy kątów
- 2 Podwojony kąt i jego konsekwencje
- 3 Równania elementarne
- 4 Sprowadzanie do iloczynu
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Dlaczego iloczyn

Równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ umiemy rozwiązać od razu: dwie serie rozwiązań z okręgu jednostkowego. Równanie $\sin 2x = \cos x$ już nie, bo po obu stronach stoją różne funkcje różnych argumentów. Trzeba je sprowadzić do postaci $A \cdot B = 0$, gdzie A i B są wyrażeniami, z których każde daje równanie elementarne. Narzędziem są wzory z broszury CKE: na funkcje sumy i różnicy kątów, podwojonego kąta oraz na sumę i różnicę sinusów i cosinusów. Cała trudność polega na wyborze właściwego wzoru i na tym, żeby po drodze nie zgubić rozwiązań.

Funkcje sumy i różnicy kątów

 WZORY (SĄ W BROSZURZE CKE)

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Uwaga na znaki w cosinusie: przy sumie kątów jest minus, przy różnicy plus.

Przykład 1.1

Wartość dla kąta niestandardowego

Oblicz $\sin 75^\circ$.

1 $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.

2 $\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}.$

Wynik: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 8 min

1 Oblicz $\cos 15^\circ$.

2 Oblicz $\operatorname{tg} 75^\circ$.

- 3 Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, oraz $\cos \beta = \frac{12}{13}$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oblicz $\sin(\alpha + \beta)$.

podstawowe średnie trudniejsze

2 Podwojony kąt i jego konsekwencje

🔑 PODWOJONY KĄT (W BROSZURZE CKE)

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Trzy postacie $\cos 2\alpha$ wybiera się pod resztę równania: jeśli obok stoi $\sin x$, bierze się $1 - 2 \sin^2 x$, jeśli $\cos x$, to $2 \cos^2 x - 1$.

🔑 WNIOSKI, KTÓRYCH NIE MA W BROSZURZE

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha, \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Pierwszy: $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2$. Dwa pozostałe wyprowadza się z $\sin(2\alpha + \alpha)$ i $\cos(2\alpha + \alpha)$. W kluczach CKE każdy z nich jest akceptowany jako „właściwy wzór” za pierwszy punkt, ale w arkuszu trzeba umieć go uzasadnić albo obejść.

Przykład 2.1

Znak z ćwiartki

$\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Oblicz $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$.

- 1 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (II ćwiartka, cosinus ujemny).
- 2 $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$.
- 3 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ (tu znak cosinusa α nie był potrzebny).

Wynik: $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$.

1 $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$.

2 $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$. Oblicz $\sin^4 x + \cos^4 x$.

3 Wyprowadź wzór $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

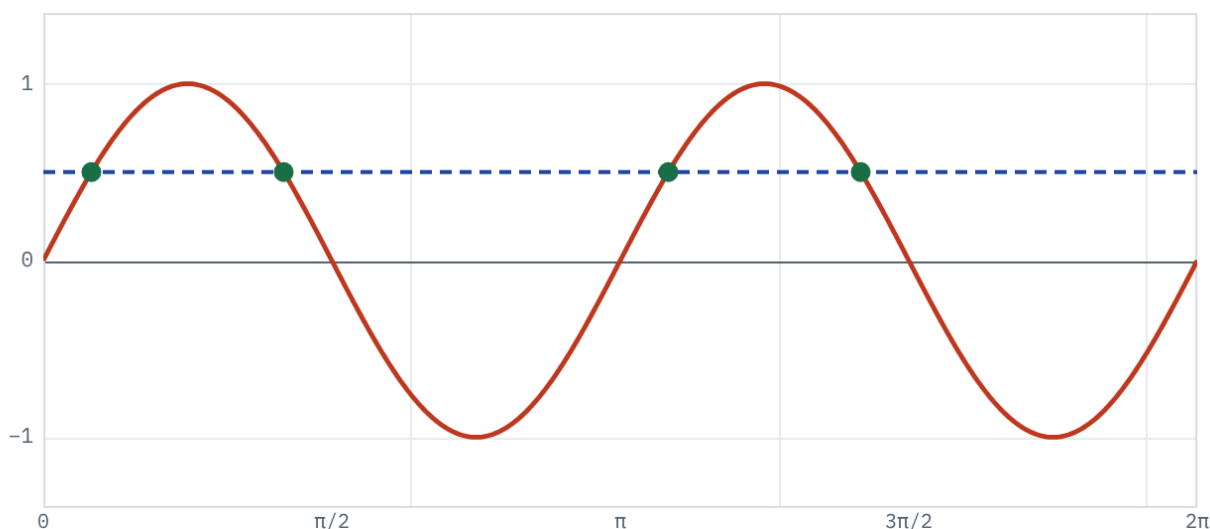
3 Równania elementarne

🔑 ROZWIĄZANIA OGÓLNE ($k \in \mathbb{Z}$)

- $\sin t = a, |a| \leq 1$: $t = t_0 + 2k\pi$ albo $t = \pi - t_0 + 2k\pi$, gdzie $\sin t_0 = a$;
- $\cos t = a, |a| \leq 1$: $t = \pm t_0 + 2k\pi$, gdzie $\cos t_0 = a$;
- $\operatorname{tg} t = a$: $t = t_0 + k\pi$, gdzie $\operatorname{tg} t_0 = a$;
- $|a| > 1$ w równaniu z $\sin$ albo $\cos$: brak rozwiązań.

Gdy argumentem jest $bx + c$, najpierw rozwiązuje się względem $t = bx + c$, potem dzieli przez b . Okres serii też się dzieli: $\frac{2k\pi}{b}$, nie $2k\pi$.

SYMULACJA 1 Wykres $y = \sin(bx)$, $y = \cos(bx)$ albo $y = \operatorname{tg}(bx)$ i prosta $y = a$. Punkty przecięcia w wybranym przedziale to rozwiązania równania. Zwiększ b i zobacz, jak rośnie liczba rozwiązań: w przedziale długości 2π jest ich zwykle $2b$.



— wykres funkcji — prosta $y = a$ — rozwiązania

równanie $\sin(2x) = 1/2$

przedział $[0, 2\pi]$

liczba rozwiązań 4

rozwiązania $\pi/12$; $5\pi/12$; $13\pi/12$; $17\pi/12$

Okres funkcji to $2\pi/2$. Liczba okresów w przedziale $[0, 2\pi]$: 2. Wartość $|a| < 1$ daje zwykle dwa rozwiązania na okres, $a = \pm 1$ jedno (prosta jest styczna do wykresu).

Stan na rysunku: $\sin(2x) = 1/2$, przedział $[0, 2\pi]$, 4 rozwiązań: $\pi/12$; $5\pi/12$; $13\pi/12$; $17\pi/12$.

Przykład 3.1

Argument złożony, rozwiązania w przedziale

Rozwiąż równanie $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ w przedziale $[0, \pi]$.

- 1 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ albo $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
- 2 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ albo $x = k\pi$.
- 3 W $[0, \pi]$: z pierwszej serii $k = 0$; z drugiej $k = 0$ i $k = 1$.

Wynik: $x \in \{0, \frac{\pi}{3}, \pi\}$.

Sprawdzenie: $x = \pi$: $\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \checkmark$.

1 Rozwiąż równanie $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

2 Rozwiąż równanie $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

podstawowe średnie trudniejsze

4 Sprowadzanie do iloczynu

☞ SUMY I RÓŻNICE (W BROSZURZE CKE)

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

☞ TRZY DROGI DO ILOCZYNU

1. **Wspólny czynnik** po rozpisaniu podwojonego kąta: $\sin 2x - \cos x = \cos x(2 \sin x - 1)$.
2. **Suma albo różnica** funkcji kątów ax i bx : $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$.
3. **Równanie kwadratowe** w jednej funkcji: po zamianie $\cos 2x$ albo $\cos^2 x$ zostaje np.
 $2t^2 + 3t + 1 = 0$ z $t = \cos x$, a to jest iloczyn $(2t + 1)(t + 1)$.

Nie dziel obu stron przez wyrażenie z x . Jeśli musisz, najpierw rozpatrz przypadek, gdy jest ono równe zero. W kluczach CKE dzielenie bez tego założenia daje co najwyżej 3 z 4–5 punktów.

Przykład 4.1

Wspólny czynnik

Rozwiąż równanie $\sin 2x = \cos x$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

- 1 $2 \sin x \cos x - \cos x = 0$, więc $\cos x (2 \sin x - 1) = 0$.
- 2 $\cos x = 0$: $x = \frac{\pi}{2}$ albo $x = \frac{3\pi}{2}$.
- 3 $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6}$ albo $x = \frac{5\pi}{6}$.

Wynik: $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

Gdyby podzielić przez $\cos x$, zostałyby tylko $\sin x = \frac{1}{2}$, czyli dwa rozwiązania z czterech.

Przykład 4.2

Suma sinusów

Rozwiąż równanie $\sin 3x + \sin x = 0$ w przedziale $[0, \pi]$.

- 1 $2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \sin 2x \cos x = 0$.
- 2 $\sin 2x = 0$: $2x = k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$, w przedziale $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.
- 3 $\cos x = 0$: $x = \frac{\pi}{2}$ (już jest).

Wynik: $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$.

Przykład 4.3

Równanie kwadratowe w cosinusie

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

- 1 $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$: $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$.
- 2 $t = \cos x$: $2t^2 + 3t + 1 = (2t + 1)(t + 1) = 0$, czyli $t = -\frac{1}{2}$ albo $t = -1$.
- 3 $\cos x = -\frac{1}{2}$: $x = \frac{2\pi}{3}$ albo $x = \frac{4\pi}{3}$; $\cos x = -1$: $x = \pi$.

Wynik: $x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3} \right\}$.

Przykład 4.4

Dzielenie, które gubi rozwiązania

Rozwiąż równanie $\sqrt{3} \sin^2 x = \sin x \cos x$ w przedziale $[0, \pi]$.

- 1 Źle: podzielić przez $\sin x$ i dostać $\sqrt{3} \sin x = \cos x$, czyli $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$.
- 2 Dobrze: $\sin x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0$.
- 3 $\sin x = 0$: $x = 0$ albo $x = \pi$.
- 4 $\sqrt{3} \sin x = \cos x$: tu $\cos x \neq 0$ (inaczej $\sin x = 0$ i $\cos x = 0$ jednocześnie), więc wolno podzielić: $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

Wynik: $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \pi \right\}$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 15 min

- 1 Rozwiąż równanie $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

- 2 Rozwiąż równanie $\sin 2x = \sqrt{3} \cos x$ w przedziale $[-\pi, \pi]$.

- 3 Rozwiąż równanie $\cos x + \cos 5x = 0$ w przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 25 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WARTOŚCI Z WZORÓW

ZESTAWY A

1 Oblicz, korzystając z wzorów na funkcje sumy i różnicy kątów.



a) $\cos 75^\circ$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Oblicz, korzystając z wzorów na podwojony kąt.



a) $\sin 2\alpha$, gdy $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, α

ostry

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · RÓWNANIA ELEMENTARNE W $\mathbb{R}$

ZESTAWY B

1 Rozwiąż równanie ($k \in \mathbb{Z}$).



a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · DO ILOCZYNU, ROZWIĄZANIA W PRZEDZIALE

ZESTAWY C

1 Rozwiąż równanie w podanym przedziale.

■■■

a) $\cos 2x = \cos x$, $[0, 2\pi]$ b) $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

Pełny trening (25 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach rozszerzonych 2024–2026 to zadanie ma 3–5 punktów, a w wersji za 4 punkty zawsze ten sam schemat oceniania: 1 punkt za zastosowanie właściwego wzoru, 2 za alternatywę równań elementarnych, 3 za rozwiązanie jednego z nich, 4 za komplet rozwiązań w przedziale (albo w $\mathbb{R}$). W połowie zadań pytano o rozwiązania w przedziale, w połowie o wszystkie rozwiązania rzeczywiste. Klucze akceptują każdą poprawną drogę. Punkty odbierają: dzielenie przez wyrażenie z x bez założenia, błędny wzór i podnoszenie do kwadratu bez sprawdzenia. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 16 pkt · ok. 40 min

1 (0–3 pkt) Rozwiąż równanie $\cos 2x + \sin x = 0$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

■■■

2 (0–4 pkt) Rozwiąż równanie $\cos 3x + \cos x = 0$ w przedziale $[0, \pi]$.

■■■

3 (0–4 pkt) Rozwiąż równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ w przedziale $[0, \pi]$.

■■■

4 (0–5 pkt) Rozwiąż równanie $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

■■■

■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$.”

Funkcje trygonometryczne nie są liniowe. Kontrprzykład: $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 0$, a $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2$.

× „Mogę podzielić przez $\cos x$.”

Tylko po sprawdzeniu, czy $\cos x = 0$ nie daje rozwiązań. Bezpieczniej wyłączyć czynnik przed nawias i dopisać równanie $\cos x = 0$.

× „ $\sin 2x = \frac{1}{2}$, więc $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$.”

Okres też się dzieli przez 2: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ albo $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$. Zgubiona druga seria i zły okres to dwa osobne błędy.

× „ $\cos t = a$ ma rozwiązania t_0 i $\pi - t_0$.”

To jest para dla sinusa. Dla cosinusa: $\pm t_0$, bo cosinus jest parzysty.

× „Podniosę do kwadratu, będzie łatwiej.”

Na przykład $\sin x + \cos x = 1$ po podniesieniu do kwadratu daje $\sin 2x = 0$, czyli także $x = \pi$, a $\sin \pi + \cos \pi = -1$. Bez sprawdzenia co najwyżej 3 pkt.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Którą postać $\cos 2x$ wybrać w równaniu $\cos 2x = \sin x$?

$1 - 2 \sin^2 x$: wtedy wszystko jest w $\sin x$.

2 Ile rozwiązań ma $\sin 3x = 0$ w przedziale $[0, \pi]$?

Cztery: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$.

3 Na jaki iloczyn zamienia się $\cos 5x - \cos x$?

$-2 \sin 3x \sin 2x$.

4 Co trzeba zrobić przed podzieleniem równania przez $\sin x$?

Rozpatrzeć przypadek $\sin x = 0$ i sprawdzić, czy daje rozwiązania.

WZORY

$\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$:

broszura

$$\sin^4 + \cos^4 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

SCHEMAT RÓWNANIA

wzór $\rightarrow$ iloczyn $= 0 \rightarrow$ alternatywa

$\sin: t_0, \pi - t_0$; $\cos: \pm t_0$; $\operatorname{tg}: t_0 + k\pi$

okres serii dzielony przez b

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są wzory na funkcje sumy i różnicy kątów (także tangensa), podwojonego kąta oraz na sumy i różnice sinusów i cosinusów. Nie ma wzorów na potrojony kąt ani na $\sin^4 + \cos^4$: te trzeba wyprowadzić albo pamiętać.

Dalej: twierdzenie sinusów i rozwiązywanie trójkątów (lekcja 7.5 Twierdzenie sinusów i rozwiązywanie trójkątów).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (tyle samo co $\sin 75^\circ$, bo kąty dopełniają się do 90°).

2. 1. $\operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$.

2. Usunięcie niewymierności: $\frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$.

3. 1. II ćwiartka: $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; I ćwiartka: $\sin \beta = \frac{5}{13}$.

2. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{36 - 20}{65} = \frac{16}{65}$.

Zadania • część 2

1. 1. $\sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4}{5}$.

2. $\cos 2\alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$.

Wynik nie zależy od ćwiartki: α i $\alpha + \pi$ mają ten sam tangens i te same $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.

2. $1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$.

3. 1. $\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$.

2. $= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$.

3. $= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

Zadania • część 3

1. $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ albo $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.

2. $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi$, więc $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadania • część 4

1. 1. $2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x - 3 = 0$, czyli $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$.

2. $(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$: $\sin x = \frac{1}{2}$ albo $\sin x = 1$.

3. $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$.

2. 1. $\cos x (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$.

2. $\cos x = 0$: $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

3. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x = \frac{\pi}{3}$ albo $x = \frac{2\pi}{3}$.

4. $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right\}$.

3. 1. $2 \cos 3x \cos 2x = 0$.

2. $\cos 3x = 0$: $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, w przedziale $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{2}$.

3. $\cos 2x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, w przedziale $\frac{\pi}{4}$.

4. $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$.

Zestawy A

1. a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2. a) $\frac{24}{25}$

Zestawy B

1. a) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ b) $\pm \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$

Zestawy C

1. a) $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$ b) $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Wzór. $1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$, czyli $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

2. Alternatywa. $(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$: $\sin x = -\frac{1}{2}$ albo $\sin x = 1$.

3. W przedziale. $\sin x = 1$: $\frac{\pi}{2}$; $\sin x = -\frac{1}{2}$: $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

1 pkt za równanie kwadratowe w $\sin x$. 2 pkt za $\sin x = -\frac{1}{2}$ lub $\sin x = 1$. 3 pkt za $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

2. 1. Wzór. $2\cos 2x \cos x = 0$.

2. Alternatywa. $\cos 2x = 0$ albo $\cos x = 0$.

3. Pierwsze. $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$: w przedziale $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

4. Drugie. $x = \frac{\pi}{2}$.

1 pkt za zastosowanie wzoru na sumę cosinusów (albo na $\cos 3x$). 2 pkt za alternatywę. 3 pkt za rozwiązanie jednego z równań w przedziale. 4 pkt za $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

3. 1. Wzór. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

2. Równanie. $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{5}{8}$, czyli $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$.

3. Alternatywa. $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ albo $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. W przedziale. $2x \in [0, 2\pi]$: $2x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

5. Wynik. $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

1 pkt za przekształcenie $\sin^4 x + \cos^4 x$ do funkcji $2x$. 2 pkt za alternatywę. 3 pkt za rozwiązanie jednego równania. 4 pkt za cztery rozwiązania.

4. 1. Wzór. $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x$.

2. Iloczyn. $2\sin 2x \cos x - \sin 2x = \sin 2x(2\cos x - 1) = 0$.

3. Alternatywa. $\sin 2x = 0$ albo $\cos x = \frac{1}{2}$.

4. Pierwsze. $x = \frac{k\pi}{2}$.

5. Drugie. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ albo $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

1 pkt za wzór na sumę sinusów. 2 pkt za postać iloczynową. 3 pkt za alternatywę. 4 pkt za rozwiązanie jednego równania. 5 pkt za komplet. Podzielenie przez $\sin 2x$ bez rozpatrzenia $\sin 2x = 0$: co najwyżej 3 pkt.

Matura z matematyki · Lekcja 7.4: Wzory na funkcje sumy kątów i równania trygonometryczne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze CKE z lat 2024–2026 i ich zasady oceniania; sprawozdania CKE z sesji 2025 i 2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt7_4.py).