

# Trening: wzory sumy kątów i równania trygonometryczne

Zestawy krótkich przykładów do lekcji 7.4 Wzory na funkcje sumy kątów i równania trygonometryczne: wartości z wzorów na sumę i podwojony kąt, równania elementarne w  $\mathbb{R}$ , równania sprowadzane do iloczynu w przedziale. Na końcu zadania w stylu arkusza rozszerzonego.

## POZIOM A · WARTOŚCI Z WZORÓW

### ZESTAWY A

2 zestawy

1 Oblicz, korzystając z wzorów na funkcje sumy i różnicy kątów.



a)  $\cos 75^\circ$

b)  $\sin 15^\circ$

c)  $\cos 105^\circ$

d)  $\operatorname{tg} 15^\circ$

e) uprość

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

2 Oblicz, korzystając z wzorów na podwojony kąt.



a)  $\sin 2\alpha$ , gdy  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  ostry

b)  $\cos 2\alpha$ , gdy  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

c)  $\cos 2\alpha$ , gdy  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

d)  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , gdy  $\operatorname{tg} \alpha = 3$

e)  $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

f)  $2 \sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ$

▢▢▢ podstawowe   ▢▢▢ średnie   ▢▢▢ trudniejsze

## POZIOM B · RÓWNANIA ELEMENTARNE W $\mathbb{R}$

### ZESTAWY B

1 zestaw

1 Rozwiąż równanie ( $k \in \mathbb{Z}$ ).



a)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b)  $\cos 2x = -1$

c)  $\operatorname{tg} 3x = 1$

d)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

e)  $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

f)  $\cos x = 2$

▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣▣ trudniejsze

## POZIOM C · DO ILOCZYNU, ROZWIĄZANIA W PRZEDZIALE

### ZESTAWY C

1 zestaw

1 Rozwiąż równanie w podanym przedziale.



a)  $\cos 2x = \cos x$ ,  $[0, 2\pi]$

b)  $\sin 2x = \sin x$ ,  $[0, \pi]$

c)  $\sin x + \cos x = 1$ ,  $[0, 2\pi]$

d)  $\sin 5x - \sin x = 0$ ,  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

e)  $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$ ,  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣▣ trudniejsze

## ZADANIA MATURALNE

Formy zadań jak w arkuszu rozszerzonym CKE: zadania otwarte z punktowanymi etapami (wzór, alternatywa, rozwiązania).

### ZADANIA W STYLU ARKUSZA

3 zadania · 11 pkt

1 (0–3 pkt) Rozwiąż równanie  $\cos 2x = 3 \sin x - 1$  w przedziale  $[0, 2\pi]$ .



2 (0–4 pkt) Rozwiąż równanie  $\sin 3x = \sin x$  w przedziale  $[0, \pi]$ .



3 (0–4 pkt) Rozwiąż równanie  $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x$  w zbiorze liczb rzeczywistych.



▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣▣ trudniejsze



# Odpowiedzi

## Zestawy A

1. a)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  b)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  c)  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$  d)  $2 - \sqrt{3}$  e)  $\sqrt{3} \cos x$

2. a)  $\frac{24}{25}$  b)  $\frac{7}{25}$  c)  $-\frac{7}{9}$  d)  $-\frac{3}{4}$  e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  f)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

## Zestawy B

1. a)  $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$  b)  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  c)  $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$  d)  $\frac{\pi}{4} + k\pi$  e)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$  f) brak rozwiązań

## Zestawy C

1. a)  $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$  b)  $0, \frac{\pi}{3}, \pi$  c)  $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$  d)  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$  e)  $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$

## Zadania w stylu arkusza

1. 1. Wzór.  $1 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 1$ , czyli  $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$ .

2. Pierwiastki.  $(2 \sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$ :  $\sin x = \frac{1}{2}$  (bo  $\sin x = -2$  jest niemożliwe).

3. W przedziale.  $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ .

1 pkt za równanie kwadratowe w  $\sin x$ . 2 pkt za  $\sin x = \frac{1}{2}$  i odrzucenie  $-2$ . 3 pkt za oba rozwiązania.

2. 1. Wzór.  $\sin 3x - \sin x = 2 \cos 2x \sin x = 0$ .

2. Alternatywa.  $\cos 2x = 0$  albo  $\sin x = 0$ .

3. Pierwsze.  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ :  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ .

4. Drugie.  $x = 0$  albo  $x = \pi$ .

1 pkt za wzór na różnicę sinusów (albo na  $\sin 3x$ ). 2 pkt za alternatywę. 3 pkt za rozwiązania jednego równania. 4 pkt za  $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi \right\}$ .

3. 1. Wzór.  $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$ .

2. Iloczyn.  $2 \cos 2x (\cos x - 1) = 0$ .

3. Pierwsze.  $\cos 2x = 0$ :  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ .

4. Drugie.  $\cos x = 1$ :  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

1 pkt za wzór na sumę cosinusów. 2 pkt za alternatywę. 3 pkt za jedną serię. 4 pkt za obie. Podzielenie przez  $\cos 2x$  bez rozpatrzenia  $\cos 2x = 0$ : co najwyżej 3 pkt.

Matura z matematyki · Trening do lekcji 7.4 · Zadania autorskie, formy i punktacja wzorowane na informatorze i zasadach oceniania CKE dla poziomu rozszerzonego. Wszystkie odpowiedzi sprawdzone (tools/verify/mt7\_4.py).