

Miara łukowa, wykresy, okresowość i wzory redukcyjne

Na poziomie rozszerzonym kąt może być dowolną liczbą rzeczywistą, mierzoną w radianach. Funkcje trygonometryczne są wtedy współrzędnymi punktu na okręgu jednostkowym, a ich wykresy powtarzają się co 2π (tangens co π). W arkuszach z lat 2024–2026 nie było osobnego zadania na wykresy ani wzory redukcyjne, ale bez nich nie rozwiąże się równania trygonometrycznego (lekcja 7.4 Wzory na funkcje sumy kątów i równania trygonometryczne) ani zadania z siatką stożka.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
VII.R1–VII.R4

W TEJ LEKCJI

- 0 Kąt jako długość łuku
- 1 Radiany, łuk i wycinek
- 2 Funkcje dowolnego kąta
- 3 Wzory redukcyjne
- 4 Wykresy i okres
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Kąt jako długość łuku

Na okręgu o promieniu 1 kąt można mierzyć długością łuku, który wycina. Pełny kąt wycina cały obwód, czyli 2π ; kąt półpełny π ; kąt prosty $\frac{\pi}{2}$. To jest miara łukowa (w radianach). Zaletą jest prosta proporcja: na okręgu o promieniu r kąt α radianów wycina łuk o długości $r\alpha$. Wzory na długość łuku i pole wycinka przestają wymagać dzielenia przez 360° .

Radiany, łuk i wycinek

MIARA ŁUKOWA

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ, \quad l = r\alpha, \quad P_{\text{wycinka}} = \frac{1}{2}r^2\alpha \quad (\alpha \text{ w radianach}).$$

Przykład 1.1

Wycinek z obwodu

Wycinek koła ma obwód 20, a jego kąt środkowy ma 2 radiany. Oblicz pole wycinka.

- 1 Obwód wycinka: $2r + r\alpha = 2r + 2r = 4r = 20$, więc $r = 5$.
- 2 $P = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 2$.

Wynik: $P = 25$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Zamień: 135° na radiany i $\frac{5\pi}{6}$ na stopnie.

- 2 Tworząca stożka ma długość 12, a promień podstawy 4. Oblicz kąt środkowy wycinka, który jest siatką powierzchni bocznej.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

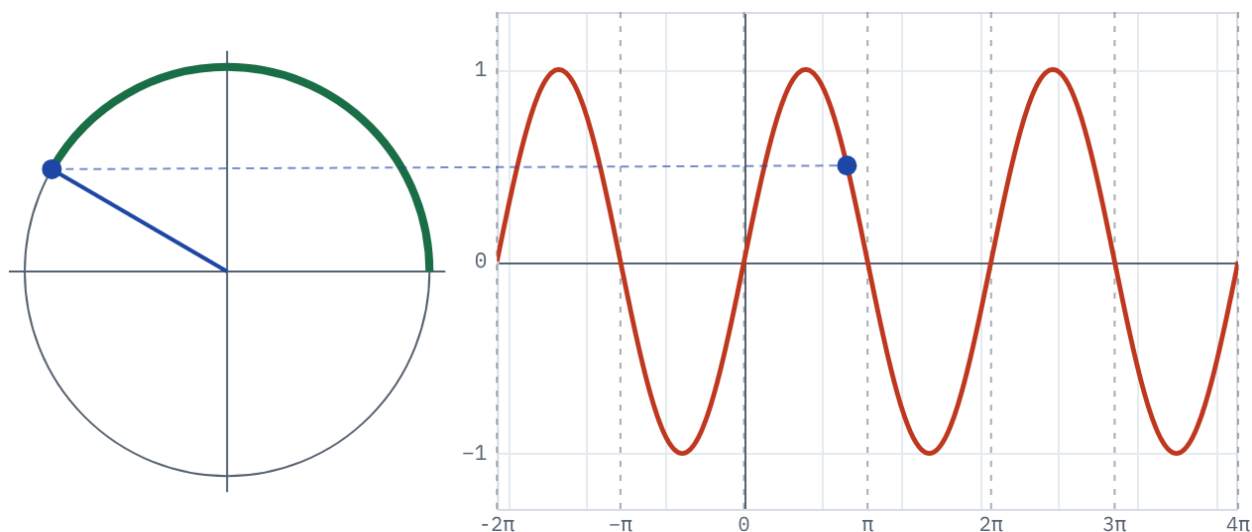
2 Funkcje dowolnego kąta

OKRĄG JEDNOSTKOWY

Kąt x (w radianach, dowolny znak) wyznacza na okręgu $x^2 + y^2 = 1$ punkt $(\cos x, \sin x)$.
Stąd:

- $\sin x, \cos x \in [-1, 1]$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$;
- znaki: I ćwiartka $+, +, +$; II: $\sin > 0$; III: $\operatorname{tg} > 0$; IV: $\cos > 0$ (kolejno $\sin, \cos, \operatorname{tg}$);
- okresy: $\sin$ i $\cos$ mają okres 2π , tg okres π ;
- parzystość: $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

SYMULACJA 1 Po lewej okrąg jednostkowy, po prawej wykres $\sin x$ albo $\cos x$. Zielony łuk ma długość $|x|$. Przesuwaj x w wielokrotnościach $\frac{\pi}{12}$: punkt na wykresie ma tę samą wysokość co punkt na okręgu (dla sinusa). Dodaj 2π i sprawdź, że punkt wraca na to samo miejsce.



— punkt na okręgu — $y = \sin x$ albo $y = \cos x$ — łuk o długości x

$x \ 5\pi/6 \ \text{rad} = 150^\circ$

$\sin x \ 0,500$

$\cos x \ -0,866$

$\operatorname{tg} x \ -0,577$

ten sam punkt dla $x + 2k\pi$ (np. $17\pi/6$)

Punkt okręgu jednostkowego dla kąta x ma współrzędne $(\cos x, \sin x)$. Po pełnym obrocie (2π) wraca na to samo miejsce, dlatego $\sin$ i $\cos$ mają okres 2π . Ćwiartka: II.

Stan na rysunku: $x = 5\pi/6$ (150°), $\sin x \approx 0,500$, $\cos x \approx -0,866$.

Przykład 2.1

Wartości kątów spoza

$[0, \pi]$

Oblicz $\sin \frac{7\pi}{6} \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$.

- 1 $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ (III ćwiartka): $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.
- 2 $\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ (okres π).

Wynik: $-\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Podaj znak $\sin 4$, $\cos 4$ (kąt w radianach).
- 2 Rozwiąż równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

3 Wzory redukcyjne

🔑 REGUŁA MNEMOTECHNICZNA

Dla kątów $\pi \pm x$ i $2\pi - x$ funkcja się **nie zmienia**, dla $\frac{\pi}{2} \pm x$ i $\frac{3\pi}{2} \pm x$ zmienia się na **kofunkcję** ($\sin \leftrightarrow \cos$). Znak wyniku to znak funkcji wyjściowej w ćwiartce, w której leży kąt (przy założeniu, że x jest ostry).

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Przykład 3.1

Uproszczenie

Uprość $\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)$.

- 1 $\sin(\pi + x) = -\sin x$ (III ćwiartka, sinus ujemny).
- 2 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\cos(2\pi - x) = \cos x$.

Wynik: $\cos x$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

1 zadanie · ok. 3 min

- 1 Oblicz $\cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6}$.



 podstawowe  średnie  trudniejsze

4 Wykresy i okres

 $y = a \sin(bx) + c$

Zbiór wartości $[c - |a|, c + |a|]$, okres $\frac{2\pi}{|b|}$. Analogicznie dla $\cos$; dla $\tan(bx)$ okres $\frac{\pi}{|b|}$.

Przesunięcia i symetrie wykresu działają jak w lekcji 5.7 Przekształcenia wykresów, złożenia, dowodzenie monotoniczności.

Przykład 4.1

Okres i liczba rozwiązań

Funkcja $f(x) = 3 \sin(2x) - 1$. Podaj jej okres i zbiór wartości. Ile rozwiązań ma równanie $f(x) = 0$ w przedziale $[0, 2\pi]$?

- 1 Okres $\frac{2\pi}{2} = \pi$; zbiór wartości $[-4, 2]$.
- 2 $\sin 2x = \frac{1}{3}$: w każdym okresie $\sin$ przyjmuje wartość $\frac{1}{3}$ dwa razy; przedział $[0, 2\pi]$ to dwa okresy funkcji f .

Wynik: okres π , $ZW = [-4, 2]$, cztery rozwiązania.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 3 min

- 1 Podaj okres i zbiór wartości funkcji $g(x) = -2 \cos \frac{x}{2} + 1$.



▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 20 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · RADIANY

ZESTAWY A

- 1 Zamień albo oblicz.



a) 210° w radianach

b) pole wycinka: $r = 4$,

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

POZIOM B · WARTOŚCI I REDUKCJA

ZESTAWY B

1 Oblicz.



a) $\sin \frac{5\pi}{3}$

b) $\cos \frac{13\pi}{6}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

POZIOM C · OKRES I WARTOŚCI

ZESTAWY C

1 Podaj okres podstawowy i zbiór wartości.



a) $y = 2 \sin x - 3$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Pełny trening (20 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W puli zadań CKE z lat 2024–2026 ten dział reprezentuje jedno zadanie z informatora (4 punkty): najkrótsza droga po powierzchni stożka, czyli siatka w postaci wycinka koła, kąt wycinka w radianach i odcinek na siatce. Wykresy i wzory redukcyjne pojawiają się w arkuszach jako kroki innych zadań, np. $\sin(180^\circ - 3\alpha)$ w zadaniu z trójkątem. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 12 pkt · ok. 30 min

1 (0–2 pkt) Oblicz wartość wyrażenia $\cos \frac{4\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin \frac{5\pi}{2}$.



2 (0–3 pkt) Wycinek koła o promieniu r i kącie środkowym α (w radianach) ma pole 12 i łuk długości 6. Oblicz r i α .



3 (0–3 pkt) Funkcja $f(x) = 2 \cos(3x) + 1$. Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości oraz liczbę rozwiązań równania $f(x) = 2$ w przedziale $[0, 2\pi]$.



- 4 (0–4 pkt) Stożek ma tworzącą długości 12 i promień podstawy 4. Punkty A i B leżą na brzegu podstawy i są końcami jej średnicy. Oblicz długość najkrótszej drogi z A do B po powierzchni bocznej stożka.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

- × „ $l = r\alpha$ dla α w stopniach.”

Wzór działa tylko w radianach. W stopniach: $l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

- × „ $\sin(\pi + x) = \sin x$.”

$\pi + x$ leży w III ćwiartce, gdzie sinus jest ujemny: $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

- × „Okres $\sin(3x)$ to 6π .”

$\frac{2\pi}{3}$: większy współczynnik przy x ściska wykres.

- × „ $\cos(-x) = -\cos x$.”

Cosinus jest parzysty: $\cos(-x) = \cos x$.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Ile stopni ma 1 radian w przybliżeniu?

$$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ.$$

- 2 Jaki jest znak $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$?

Dodatni (III ćwiartka).

- 3 Czemu jest równy $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$?

$\cos x$.

4 Jaki jest okres $\operatorname{tg} 2x$?

$$\frac{\pi}{2}.$$

RADIANY

$$\pi = 180^\circ, l = r\alpha, P = \frac{1}{2}r^2\alpha$$

okres $\sin, \cos: 2\pi$; $\operatorname{tg}: \pi$

REDUKCJA

$\pi \pm x, 2\pi - x$: ta sama funkcja

$\frac{\pi}{2} \pm x, \frac{3\pi}{2} \pm x$: kofunkcja

znak z ćwiartki

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są związki między funkcjami tego samego kąta, wybrane wzory redukcyjne (dla $90^\circ \pm \alpha$ i $180^\circ \pm \alpha$), okresowość i wartości dla kątów szczególnych, a także wzory na długość łuku i pole wycinka, ale w wersji z kątem w stopniach ($\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$). Wersje radianowe $l = r\alpha$ i $P = \frac{1}{2}r^2\alpha$ trzeba znać samodzielnie.

Dalej: wzory na funkcje sumy kątów i równania trygonometryczne (lekcja 7.4 Wzory na funkcje sumy kątów i równania trygonometryczne).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$.

2. Łuk wycinka to obwód podstawy: $12\alpha = 2\pi \cdot 4$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ (120°).

Zadania · część 2

1. $\pi \approx 3,14 < 4 < \frac{3\pi}{2} \approx 4,71$: III ćwiartka, oba ujemne.

2. $x = \frac{\pi}{6}$ albo $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Zadania · część 3

1. $-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 0$.

Zadania · część 4

1. Okres 4π , zbiór wartości $[-1, 3]$.

Zestawy A

1. a) $\frac{7\pi}{6}$ b) 6π

Zestawy B

1. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zestawy C

1. a) 2π ; $[-5, -1]$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Redukcja. $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$, $\sin \frac{5\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

2. Wynik. $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

1 pkt za dwie z trzech wartości. 2 pkt za $-\frac{1}{2}$.

2. 1. Układ. $r\alpha = 6$, $\frac{1}{2}r^2\alpha = 12$.

2. Dzielenie. $\frac{\frac{1}{2}r^2\alpha}{r\alpha} = \frac{r}{2} = 2$, więc $r = 4$.

3. Kąt. $\alpha = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

1 pkt za układ. 2 pkt za $r = 4$. 3 pkt za $\alpha = \frac{3}{2}$.

3. 1. Okres i wartości. $\frac{2\pi}{3}$; $[-1, 3]$.

2. Równanie. $\cos 3x = \frac{1}{2}$; $3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, czyli $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$.

3. Liczba. w $[0, 2\pi]$: $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}$, czyli 6.

1 pkt za okres i zbiór wartości. 2 pkt za rozwiązanie ogólne. 3 pkt za 6 rozwiązań.

4. 1. **Siatka.** wycinek koła o promieniu 12 i kącie $\alpha = \frac{2\pi \cdot 4}{12} = \frac{2\pi}{3}$.
2. **Położenie punktów.** A i B dzielą obwód podstawy na połowy, więc na siatce leżą na łuku w odległości kątowej $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$.
3. **Droga.** najkrótsza droga to odcinek AB na siatce: trójkąt o ramionach 12 i kącie $\frac{\pi}{3}$ jest równoboczny.
4. **Wynik.** $|AB| = 12$.
- 1 pkt** za stwierdzenie, że droga to odcinek na siatce. **2 pkt** za kąt wycinka $\frac{2\pi}{3}$. **3 pkt** za kąt $\frac{\pi}{3}$ między promieniami do A i B . **4 pkt** za długość 12.
-

Matura z matematyki · Lekcja 7.3: Miara łukowa, wykresy, okresowość i wzory redukcyjne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE), zadanie 27 i jego zasady oceniania; arkusze CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt7_3.py).