

Twierdzenie cosinusów i pole trójkąta

Gdy znasz dwa boki trójkąta i kąt między nimi, twierdzenie cosinusów daje trzeci bok, a wzór $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ daje pole. Na maturze te dwa wzory pojawiają się w zadaniach zamkniętych, P/F i krótkich zadaniach otwartych, często razem ze środkową albo stosunkiem pól. Punkty giną na wyborze trójkąta pomocniczego, w którym znamy dwa boki i kąt.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

4 zadania w treści, próbka treningu rachunkowego, 6 zadań w stylu maturalnym; pełny trening na osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa programowa, zakres podstawowy: VII.3, VIII.2

W TEJ LEKCJI

- 0 Pitagoras z poprawką
- 1 Twierdzenie cosinusów
- 2 Pole
 $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$
- 3 Środkowa i trójkąt pomocniczy
- 4 Stosunki pól przy wspólnym kącie
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Pitagoras z poprawką

Dla kąta prostego $c^2 = a^2 + b^2$. Gdy kąt między a i b jest ostry, ramiona są „ściśnięte” i c jest krótsze; gdy rozwarty, c jest dłuższe. Poprawka wynosi dokładnie $-2ab \cos \gamma$: dla $\gamma < 90^\circ$ odejmujemy, dla $\gamma > 90^\circ$ cosinus jest ujemny, więc dodajemy. Przykład: $a = 8$, $b = 5$, $\gamma = 60^\circ$ daje $c^2 = 64 + 25 - 40 = 49$, $c = 7$, mniej niż $\sqrt{89}$ dla kąta prostego.

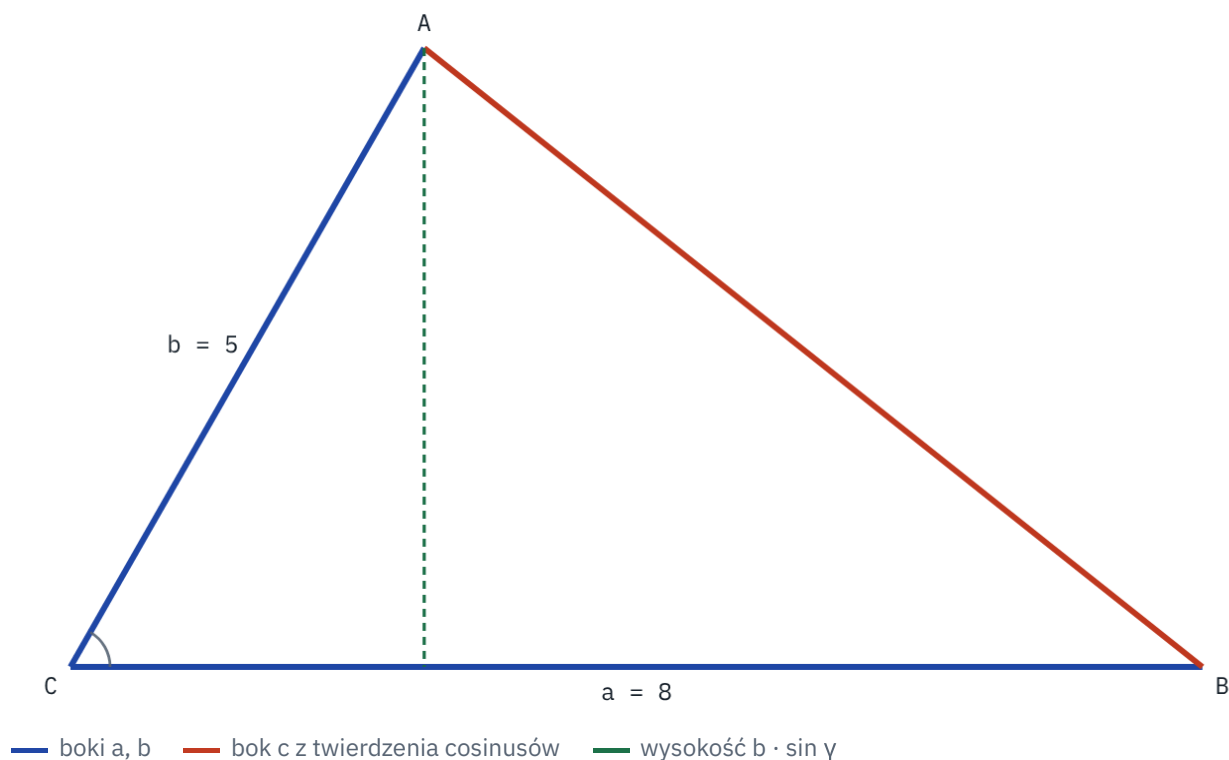
Twierdzenie cosinusów

TWIERDZENIE COSINUSÓW

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

gdzie γ to kąt między bokami a i b (leżący naprzeciw c). Działa w obie strony: z trzech boków wyznacysz cosinus każdego kąta, $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

SYMULACJA 1 Trójkąt z boków a , b i kąta γ między nimi. Trzeci bok liczy twierdzenie cosinusów, pole wzór $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$. Przerywana linia to wysokość $b \sin \gamma$: przy kącie rozwartym pada poza trójkąt. Ustaw $\gamma = 90^\circ$, a dostaniesz twierdzenie Pitagorasa.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad 64 + 25 - 80 \cdot \cos 60^\circ = 49$$

c 7

$$\text{pole } \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma \quad 17,32$$

wysokość na a 4,33

γ ostry: $\cos \gamma > 0$, więc c^2 jest mniejsze niż $a^2 + b^2$. Pole to połowa podstawy a razy wysokość $b \cdot \sin \gamma$.

Stan na rysunku: $a = 8$, $b = 5$, $\gamma = 60^\circ$; $c \approx 7$, pole $\approx 17,32$.

Przykład 1.1

Kąt z trzech boków

Trójkąt ma boki 5, 7, 8. Oblicz miarę kąta leżącego naprzeciw boku 7.

1 $7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos \gamma$, czyli $49 = 89 - 80 \cos \gamma$.

2 $\cos \gamma = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$.

Wynik: $\gamma = 60^\circ$.

- 1 W trójkącie $|AB| = 4$, $|AC| = 6$, $\angle BAC = 120^\circ$. Oblicz $|BC|$.

- 2 Trójkąt ma boki 3, 5, 7. Wykaż, że jest rozwartokątny, i podaj największy kąt.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

2 Pole $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$

🔑 POLE Z DWÓCH BOKÓW I KĄTA MIĘDZY NIMI

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

To jest „połowa podstawy razy wysokość”, bo wysokość opuszczona na bok a ma długość $b \sin \gamma$. Ponieważ $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$, kąty 30° i 150° dają to samo pole.

Przykład 2.1

Pole przy kącie rozwartym

Oblicz pole trójkąta o bokach 4 i 6 i kącie 150° między nimi.

- 1 $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$.
- 2 $P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$.

Wynik: $P = 6$.

- 1 Pole trójkąta o bokach 8 i 5 jest równe $10\sqrt{3}$. Jaki może być kąt między tymi bokami?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Środkowa i trójkąt pomocniczy

Twierdzenie cosinusów stosuje się w trójkącie, w którym znasz dwa boki i kąt między nimi. Przy środkowej takim trójkątem jest ten, który ma za bok **połowę** boku trójkąta.

Przykład 3.1

Długość środkowej

W trójkącie ABC : $|AB| = 8$, $|BC| = 10$, $\angle ABC = 60^\circ$. Oblicz długość środkowej AD .

- 1 D jest środkiem BC , więc $|BD| = 5$. W trójkącie ABD znamy $|AB|$, $|BD|$ i kąt B między nimi.
- 2 $|AD|^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 49$.

Wynik: $|AD| = 7$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

1 zadanie · ok. 4 min

- 1 W równoległoboku boki mają długości 5 i 8, a kąt ostry ma 60° . Oblicz długości przekątnych.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Stosunki pól przy wspólnym kącie

WSPÓLNY KĄT

Jeśli trójkąty DBE i ABC mają wspólny kąt B , to $\frac{P_{DBE}}{P_{ABC}} = \frac{|BD| \cdot |BE|}{|BA| \cdot |BC|}$, bo $\sin B$ się skraca.

Przykład 4.1

Pole „odciętego” trójkąta

Pole trójkąta ABC jest równe 24. Punkt D leży na AB i $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$, punkt E leży na BC i $|BE| = \frac{1}{4}|BC|$. Oblicz pole trójkąta DBE .

1 $|BD| = \frac{2}{3}|AB|, |BE| = \frac{1}{4}|BC|.$

2 $P_{DBE} = 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}.$

Wynik: 4.

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 24 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · TRZECI BOK I KĄT

ZESTAWY A

1 Oblicz c (kąt γ leży między a i b).



a) $a = 3, b = 8, \gamma = 60^\circ$ b) $a = \sqrt{3}, b = 1, \gamma = 150^\circ$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Oblicz cosinus kąta naprzeciw boku c i podaj, czy kąt jest ostry, prosty czy rozwarty.



a) $a = 4, b = 5, c = 6$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

POZIOM B · POLE

ZESTAWY B

1 Oblicz pole.



a) $a = 6, b = 7, \gamma = 30^\circ$

b) romb o boku 10 i kącie 150°

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · ŚRODKOWE I STOSUNKI PÓŁ

ZESTAWY C

1 Oblicz.



a) $|AB| = 10, |BC| = 6,$
 $\angle B = 60^\circ$; środkowa z A

b) $P_{ABC} = 18,$
 $|AD| = \frac{1}{3}|AB|,$
 $|AE| = \frac{2}{3}|AC|$; P_{ADE}

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (24 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach z lat 2024–2026 i w informatorze są tu zadania P/F (czy trójkąt jest równoramienny, ile wynosi pole), zamknięte (trzeci bok, pole) i otwarte za 2–3 punkty (długość środkowej, stosunek pól). Według sprawozdania CKE zadanie P/F z twierdzenia cosinusów i pola w maju 2025 rozwiązało 51% zdających. Sprawozdanie zauważa też, że zdający sięgają po twierdzenie cosinusów tam, gdzie wystarczy trójkąt „ekierkowy” (30° – 60° – 90°). Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

6 zadań · 11 pkt · ok. 25 min

1 (0–1 pkt) W trójkącie ABC : $|AB| = 5, |BC| = 8, \angle ABC = 60^\circ$. Oceń prawdziwość zdań.



1. Trójkąt ABC jest prostokątny. P F

2. Pole trójkąta ABC jest równe $10\sqrt{3}$. P F

- 2 (0-1 pkt) W trójkącie $|AB| = 3$, $|AC| = 5$, $\angle BAC = 120^\circ$. Bok BC ma długość
A. $\sqrt{19}$ B. 4 C. 7 D. $\sqrt{34}$
- 3 (0-1 pkt) Pole trójkąta o bokach 6 i 10 i kącie 150° między nimi jest równe
A. 15 B. $15\sqrt{3}$ C. 30 D. $30\sqrt{3}$
- 4 (0-2 pkt) W trójkącie ABC : $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $\angle ABC = 60^\circ$. Oblicz długość środkowej CD .
- 5 (0-3 pkt) Pole trójkąta ABC jest równe 40. Punkt D leży na boku AB i $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$, a punkt E leży na boku BC i $|BE| = \frac{2}{5}|BC|$. Oblicz pole trójkąta DBE .
- 6 (0-3 pkt) Trójkąt ma boki długości 3, 5 i 7. Oblicz miarę jego największego kąta i pole trójkąta.

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, gdzie γ to dowolny kąt.”

γ musi leżeć między a i b , naprzeciw c .

× „ $\cos 120^\circ = \frac{1}{2}$, więc odejmuję.”

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$: odejmujesz liczbę ujemną, czyli dodajesz.

× „Środkowa: biorę cały bok BC .”

W trójkącie pomocniczym bokiem jest połowa BC .

× „ $P = \frac{1}{2}ab \cos \gamma$.”

W polu jest sinus; cosinus jest w twierdzeniu cosinusów.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jakie twierdzenie dostajesz z twierdzenia cosinusów dla $\gamma = 90^\circ$?

Twierdzenie Pitagorasa.

- 2 Jak sprawdzić, czy trójkąt o bokach $a \leq b \leq c$ jest rozwartokątny?

Gdy $c^2 > a^2 + b^2$.

- 3 Ile wynosi pole trójkąta równobocznego o boku a ze wzoru z sinusem?

$$\frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

- 4 Czy kąty 40° i 140° dają to samo pole przy tych samych bokach?

Tak: $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$.

WZORY

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

STRATEGIE

trójkąt pomocniczy: dwa boki i kąt między nimi

wspólny kąt: stosunek pól = iloczyn
stosunków boków

Twierdzenie cosinusów i wzór na pole z sinusem są w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne”.

Dalej: dla rozszerzenia miara łukowa i równania trygonometryczne (lekcje 7.3 Miara łukowa, wykresy, okresowość i wzory redukcyjne i 7.4 Wzory na funkcje sumy kątów i równania trygonometryczne), twierdzenie sinusów (7.5 Twierdzenie sinusów i rozwiązywanie trójkątów); geometria płaska w dziale IX.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $|BC|^2 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 76, |BC| = 2\sqrt{19}.$

2. $\cos \gamma = \frac{9 + 25 - 49}{30} = -\frac{1}{2}; \gamma = 120^\circ.$

Zadania · część 2

1. $20 \sin \gamma = 10\sqrt{3}, \sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}; 60^\circ$ albo $120^\circ.$

Zadania · część 3

1. Krótsza naprzeciw $60^\circ: 25 + 64 - 40 = 49$, długość 7.
2. Dłuższa naprzeciw $120^\circ: 25 + 64 + 40 = 129$, długość $\sqrt{129}.$

Zestawy A

1. a) 7 b) $\sqrt{7}$
2. a) $\frac{1}{8}$; ostry

Zestawy B

1. a) $\frac{21}{2}$ b) 50

Zestawy C

1. a) $\sqrt{79}$ b) 4

Zadania w stylu maturalnym

1. FP.

1. $|AC|^2 = 25 + 64 - 40 = 49, |AC| = 7$. Najdłuższy bok 8: $5^2 + 7^2 = 74 \neq 64$, więc nie jest prostokątny.

2. Pole $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$

2. C. $9 + 25 + 15 = 49.$

3. A. $\frac{1}{2} \cdot 60 \cdot \frac{1}{2}.$

4. 1. Trójkąt pomocniczy. D – środek AB , $|BD| = 3$; w trójkącie BCD : $|CD|^2 = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}.$

2. Wynik. $|CD|^2 = 49, |CD| = 7.$

1 pkt za równanie z twierdzenia cosinusów w trójkącie BCD . 2 pkt za $|CD| = 7.$

5. 1. Stosunki. $\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{3}{4}, \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{2}{5}.$

2. Pola. $P_{DBE} = \frac{1}{2}|BD||BE|\sin B = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot P_{ABC}.$

3. Wynik. $40 \cdot \frac{3}{10} = 12.$

1 pkt za jeden ze stosunków. 2 pkt za oba (albo zapis pól przez $\sin B$). 3 pkt za 12.

6. 1. Kąt. naprzeciw 7: $\cos \gamma = \frac{9+25-49}{30} = -\frac{1}{2}, \gamma = 120^\circ.$

2. Pole. $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$

1 pkt za wybór kąta naprzeciw najdłuższego boku i równanie. 2 pkt za 120° . 3 pkt za pole $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Matura z matematyki · Lekcja 7.2: Twierdzenie cosinusów i pole trójkąta · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań i łatwości według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt7_2.py).