

Trygonometria kątów od 0° do 180°

Na poziomie podstawowym trygonometria to kilka zadań zamkniętych w każdym arkuszu: wartość funkcji kąta rozwartego, tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, funkcje kąta w trójkącie prostokątnym. Gdy bok jest dany wprost, wynik ma łatwość 81%; gdy najpierw trzeba policzyć przeciwprostokątną, już tylko 59%. Ta lekcja ćwiczy obie umiejętności i znak cosinusa dla kąta rozwartego.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 6
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
VII.1, VII.2, VII.4

W TEJ LEKCJI

- 0 Ten sam sinus, dwa kąty
- 1 Definicje na półokręgu
- 2 Trójkąt prostokątny
- 3 Tożsamości i wyrażenia
- 4 Zastosowania: odcinki w figurach
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Ten sam sinus, dwa kąty

Jeśli $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, to $\alpha = 30^\circ$ albo $\alpha = 150^\circ$. Oba kąty mają ten sam sinus, ale cosinusy przeciwnych znaków: $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dlatego z samego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dostajesz dwa kandydaty na cosinus, a o wyborze decyduje informacja „kąt ostry” albo „kąt rozwarty”. W zadaniach zamkniętych CKE dystraktorem jest zwykle ta sama liczba z drugim znakiem.

Definicje na półokręgu

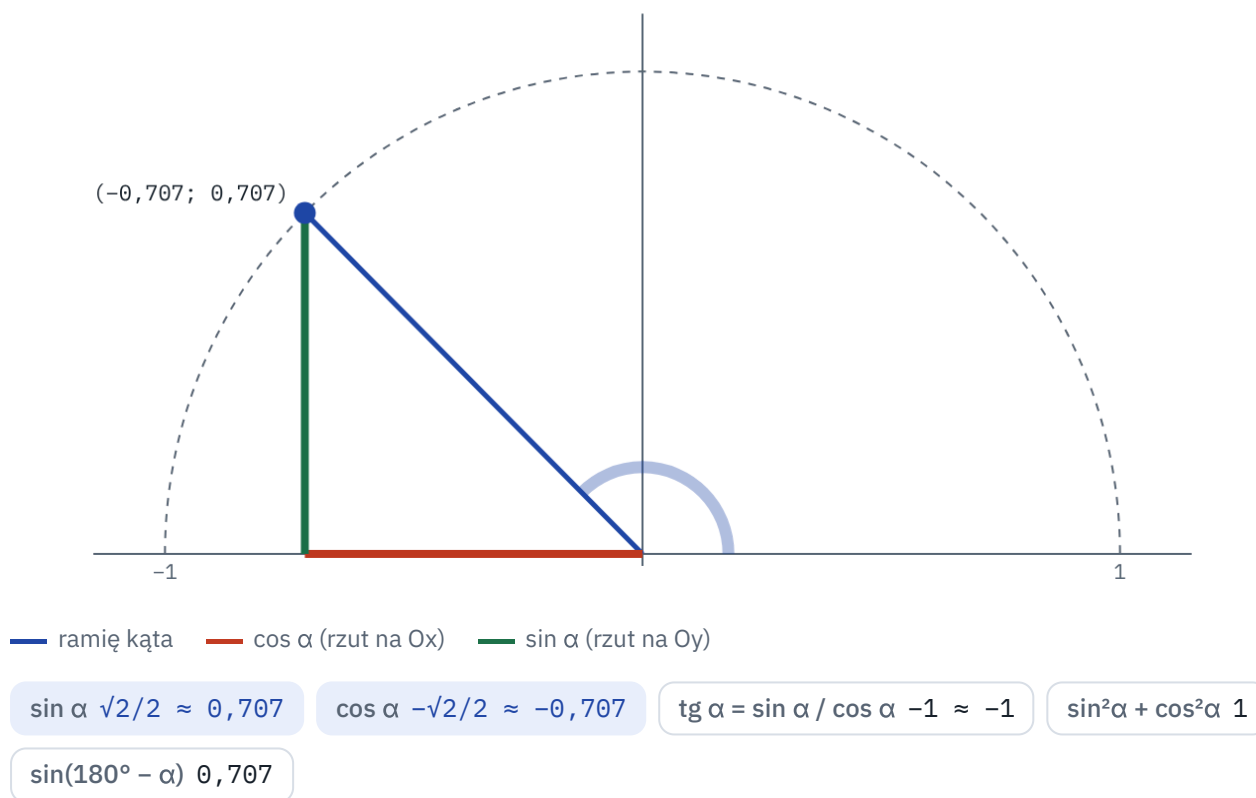
 **FUNKCJE KĄTA** $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$

Ramię kąta wyznacza na półokręgu o promieniu 1 punkt (x, y) . Wtedy $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ (dla $\alpha \neq 90^\circ$).

- $\sin \alpha \geq 0$ dla każdego takiego kąta; $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ są ujemne dla kąta rozwartego.
- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

SYMULACJA 1

Kąt α od 0° do 180° . Punkt na półokręgu ma współrzędne $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Przeciągnij kąt przez 90° : sinus zostaje dodatni, cosinus zmienia znak. Dla kątów 30° , 45° , 60° i ich dopełnień do 180° odczyt podaje wartości dokładne.



Kąt rozwarty: punkt w II ćwiartce. $\sin \alpha > 0$, ale $\cos \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$. Sinus jest taki sam jak dla kąta 45° , cosinus ma przeciwny znak.

Stan na rysunku: $\alpha = 135^\circ$, $\sin \alpha \approx 0,707$, $\cos \alpha \approx -0,707$, $\operatorname{tg} \alpha \approx -1$.

Przykład 1.1**Kąt rozwarty, dany sinus**

Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

- 1 $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$; kąt rozwarty, więc $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.
- 2 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2/3}{-\sqrt{5}/3} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Wynik: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

- 1 Oblicz $\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 150^\circ$.
- 2 Kąt α jest rozwarty i $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ trudniejsze

2 Trójkąt prostokątny

🔑 KĄT OSTRY α W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM

$$\sin \alpha = \frac{\text{przyprostokątna naprzeciw}}{\text{przeciwprostokątna}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{przyprostokątna przy}}{\text{przeciwprostokątna}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{naprzeciw}}{\text{przy}}.$$

Gdy brakuje boku, najpierw twierdzenie Pitagorasa, potem definicja.

Przykład 2.1

Najpierw Pitagoras

W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy C jest prosty, $|AC| = 5$, $|BC| = 12$. Oblicz $\sin \angle BAC$ i $\operatorname{tg} \angle ABC$.

- 1 $|AB| = \sqrt{25 + 144} = 13$.
- 2 $\sin \angle BAC = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{5}{12}$.

Wynik: $\frac{12}{13}$ i $\frac{5}{12}$.

- 1 W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i $\sqrt{5}$. Oblicz sinus kąta leżącego naprzeciw krótszej przyprostokątnej.
- 2 W trójkącie prostokątnym ABC (kąt prosty przy C) $|AC| = 4$, $|BC| = 3$, a D jest środkiem AC . Oblicz $\operatorname{tg} \angle BDC$ i $\operatorname{tg} \angle ADB$.

3 Tożsamości i wyrażenia

DWIE TOŻSAMOŚCI

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Wyrażenie, w którym licznik i mianownik są „tego samego stopnia” w $\sin$ i $\cos$, podziel przez $\cos \alpha$ (albo $\cos^2 \alpha$): zostanie samo $\operatorname{tg} \alpha$.

Przykład 3.1

Sprawdzenie do tangensa

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} = 4$. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$ i $\sin \alpha$.

- 1 $\operatorname{tg} \alpha + 1 = 4$, więc $\operatorname{tg} \alpha = 3$.
- 2 $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$ i $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$: $10 \cos^2 \alpha = 1$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
- 3 $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Wynik: $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

1 zadanie · ok. 3 min

- 1 Uprość $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$ dla kąta ostrego α .

Przykład 4.1

Wysokość z kąta

W trapezie równoramiennym ramię ma długość 6 i tworzy z dłuższą podstawą kąt 60° . Oblicz wysokość trapezu.

- 1 Wysokość z wierzchołka krótszej podstawy wraz z ramieniem tworzy trójkąt prostokątny.
- 2 $h = 6 \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Wynik: $h = 3\sqrt{3}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 3 min

- 1 Przekątna prostokąta ma długość 10 i tworzy z dłuższym bokiem kąt 30° . Oblicz pole prostokąta.

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 27 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WARTOŚCI

ZESTAWY A

- 1 Oblicz.
a) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$ b) $\cos 150^\circ + \sin 60^\circ$
... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ trudniejsze

ZESTAWY B

1 Oblicz pozostałe dwie funkcje.



a) α ostry, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) α ostry, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

POZIOM C · TRÓJKĄTY I WYRAŻENIA

ZESTAWY C

1 Trójkąt prostokątny ($\gamma = 90^\circ$): oblicz.



a) $a = 8, b = 15$; $\sin \alpha$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Kąt α ostry: oblicz $\operatorname{tg} \alpha$ albo uprość.



a) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2$ b) $\frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ trudniejsze

Pełny trening (27 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

Trygonometria to w arkuszach podstawowych z lat 2024–2026 głównie zadania zamknięte. Według sprawozdań CKE tangens kąta w trójkącie danym na rysunku rozwiązało 81% zdających (maj 2025), sinus kąta, gdy trzeba było najpierw policzyć przeciwprostokątną, 59%, tożsamość $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$ 70% (maj 2025), a wyrażenie wymierne w $\sin$ i $\cos$ do sprowadzenia do tangensa 51% (maj 2026). Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

6 zadań · 9 pkt · ok. 20 min

- 1 (0-1 pkt) Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy $\cos \alpha$ jest równy
 A. $-\frac{12}{13}$ B. $-\frac{8}{13}$ C. $\frac{8}{13}$ D. $\frac{12}{13}$
-
- 2 (0-1 pkt) Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Wtedy $\sin \alpha$ jest równy
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2}{3}$
-
- 3 (0-1 pkt) Kąt α jest ostry i $\frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{\cos \alpha} = 7$. Wtedy $\operatorname{tg} \alpha$ jest równy
 A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 4 D. 5
-
- 4 (0-1 pkt) Wartość wyrażenia $\sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$ jest równa
 A. $-\frac{3}{4}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3}{4}$
-
- 5 (0-2 pkt) Kąt α jest rozwarty i $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $2 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$.
-
- 6 (0-3 pkt) W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, $|AC| = 6$, $|BC| = 4$, a punkt D leży na boku AC i $|CD| = 3$. Oblicz $\sin \angle ADB$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

✗ „ $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.”

Tylko dla kąta ostrego. Dla rozwartego $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

✗ „ $\sin \alpha$ może być ujemny dla kąta rozwartego.”

Dla kątów od 0° do 180° sinus jest nieujemny.

✗ „ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.”

Odwrotnie: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Wzór jest w broszurze.

✗ „ $\sin \angle BAC = \frac{|AC|}{|AB|}$.”

Sinus to przyprostokątna **naprzeciw** kąta. Naprzeciw A leży BC .

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Ile wynosi $\cos 120^\circ$?

$$-\frac{1}{2}.$$

- 2 Dla jakiego kąta z $[0^\circ, 180^\circ]$ tangens nie istnieje?

Dla 90° .

- 3 Jaki znak ma $\operatorname{tg} 100^\circ$?

Ujemny.

- 4 Jak z $\operatorname{tg} \alpha = 1$ (kąt ostry) dostać $\sin \alpha$?

$$\alpha = 45^\circ, \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

TOŻSAMOŚCI

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

WARTOŚCI

$$30^\circ: \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$45^\circ: \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$$

$$60^\circ: \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}$$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są definicje, tożsamości, wzory $180^\circ - \alpha$ i tablica wartości funkcji trygonometrycznych.

Dalej: twierdzenie cosinusów i pole trójkąta (lekcja 7.2 Twierdzenie cosinusów i pole trójkąta).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$.
2. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ (zawsze nieujemny), $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$.

Zadania • część 2

1. Przeciwnprostokątna 3; krótsza to 2 ($2 < \sqrt{5}$): $\sin = \frac{2}{3}$.
2. 1. $|DC| = 2$, $\operatorname{tg} \angle BDC = \frac{3}{2}$.
2. $\angle ADB = 180^\circ - \angle BDC$ (kąt rozwarty): $\operatorname{tg} \angle ADB = -\frac{3}{2}$.

Zadania • część 3

1. $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

Zadania • część 4

1. Boki $10 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}$ i $10 \sin 30^\circ = 5$: pole $25\sqrt{3}$.

Zestawy A

1. a) 1 b) 0

Zestawy B

1. a) $\cos = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} = \frac{3}{4}$ b) $\sin = \frac{3}{5}$, $\cos = \frac{4}{5}$

Zestawy C

1. a) $\frac{8}{17}$
2. a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ b) 1

Zadania w stylu maturalnym

1. A. $\cos^2 \alpha = \frac{144}{169}$, rozwarty: ujemny.
2. C. $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$, $5 \cos^2 \alpha = 1$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
3. B. $2 \operatorname{tg} \alpha + 3 = 7$.
4. A. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
5. 1. Sinus. $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
2. Tangens. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{2}/3}{-1/3} = -2\sqrt{2}$.
3. Wynik. $2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot (-2\sqrt{2}) = -\frac{16}{3}$.
1 pkt za $\sin \alpha$ (albo za uproszczenie $2 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$). 2 pkt za $-\frac{16}{3}$.

6. 1. Trójkąt BCD , prostokątny, $|BD| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

2. Kąt BDC . $\sin \angle BDC = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{4}{5}$.

3. Kąt ADB . $\angle ADB = 180^\circ - \angle BDC$, więc $\sin \angle ADB = \frac{4}{5}$.

1 pkt za $|BD| = 5$. **2 pkt** za $\sin \angle BDC = \frac{4}{5}$. **3 pkt** za $\sin \angle ADB = \frac{4}{5}$ z uzasadnieniem.

Matura z matematyki · Lekcja 7.1: Trygonometria kątów od 0° do 180° · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań i łatwości według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt7_1.py).