

Granice ciągów i szereg geometryczny

Na poziomie rozszerzonym granica ciągu pojawia się zwykle w zadaniu za 2–4 punkty: iloraz wielomianów, często ukryty w symbolu Newtona albo w sumie ciągu arytmetycznego. Szereg geometryczny to zadanie za 4–5 punktów, w którym najpierw trzeba znaleźć a_1 i q , a potem odfiltrować przypadki z $|q| \geq 1$. W 2025 roku część zdających pominęła ujemne ilorazy w przekonaniu, że szereg zbiega tylko dla $q > 0$.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 60
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
VI.R1, VI.R2

W TEJ LEKCJI

- 0 Połowa, ćwiartka, ósemka...
- 1 Granica ilorazu wielomianów
- 2 Sumy i symbol Newtona w liczniku
- 3 Twierdzenie o trzech ciągach
- 4 Szereg geometryczny
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Połowa, ćwiartka, ósemka...

Idziesz do ściany odległej o 2 m: najpierw pokonujesz połowę (1 m), potem połowę reszty ($\frac{1}{2}$ m), potem połowę tego, co zostało... Sumy częściowe 1, 1,5, 1,75, 1,875 rosną, ale nigdy nie przekraczają 2 i zbliżają się do 2 dowolnie blisko. Mówimy, że suma nieskończonego ciągu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ jest równa 2. To jest szereg geometryczny z $a_1 = 1$ i $q = \frac{1}{2}$; wzór $\frac{a_1}{1-q}$ daje właśnie 2.

Granica ilorazu wielomianów

GRANICA $\frac{W(n)}{Q(n)}$ PRZY $n \rightarrow \infty$

Podziel licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n z mianownika. Korzystasz z $\frac{c}{n^k} \rightarrow 0$ dla $k > 0$.

- stopień licznika < stopnia mianownika: granica 0;
- stopnie równe: iloraz współczynników przy najwyższych potęgach;
- stopień licznika > stopnia mianownika: $\pm\infty$ (ciąg rozbieżny).

Przykład 1.1

Równe stopnie

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 5}$.

1 Dzielimy przez n^2 : $\frac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n^2}}$.

2 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{5}{n^2} \rightarrow 0$.

Wynik: $\frac{3}{2}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

1 Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1}$.

2 Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$.

2 Sumy i symbol Newtona w liczniku

NAJPIERW ZAMIEŃ NA WIELOMIAN

- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$; ogólnie suma ciągu arytmetycznego $\frac{a_1+a_k}{2} \cdot k$ (policz liczbę składników k !).
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Przykład 2.1

Suma w liczniku

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)}{n^2 + 1}$.

- Składników jest $n+1$ (od $2 \cdot 0 + 1$ do $2n+1$), suma $\frac{1+(2n+1)}{2}(n+1) = (n+1)^2$.
- $\frac{(n+1)^2}{n^2+1} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+1} \rightarrow 1$.

Wynik: 1.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

1 zadanie · ok. 3 min

1 Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^2}$.

3 Twierdzenie o trzech ciągach

TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH

Jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla prawie wszystkich n oraz $\lim a_n = \lim c_n = g$, to $\lim b_n = g$.

Przykład 3.1

Pierwiastek z sumy potęg

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n}$.

- 1 $5^n \leq 2^n + 5^n \leq 2 \cdot 5^n$.
- 2 $5 \leq \sqrt[n]{2^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot 5$, a $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$.

Wynik: 5 (największa z podstaw).

4 Szereg geometryczny

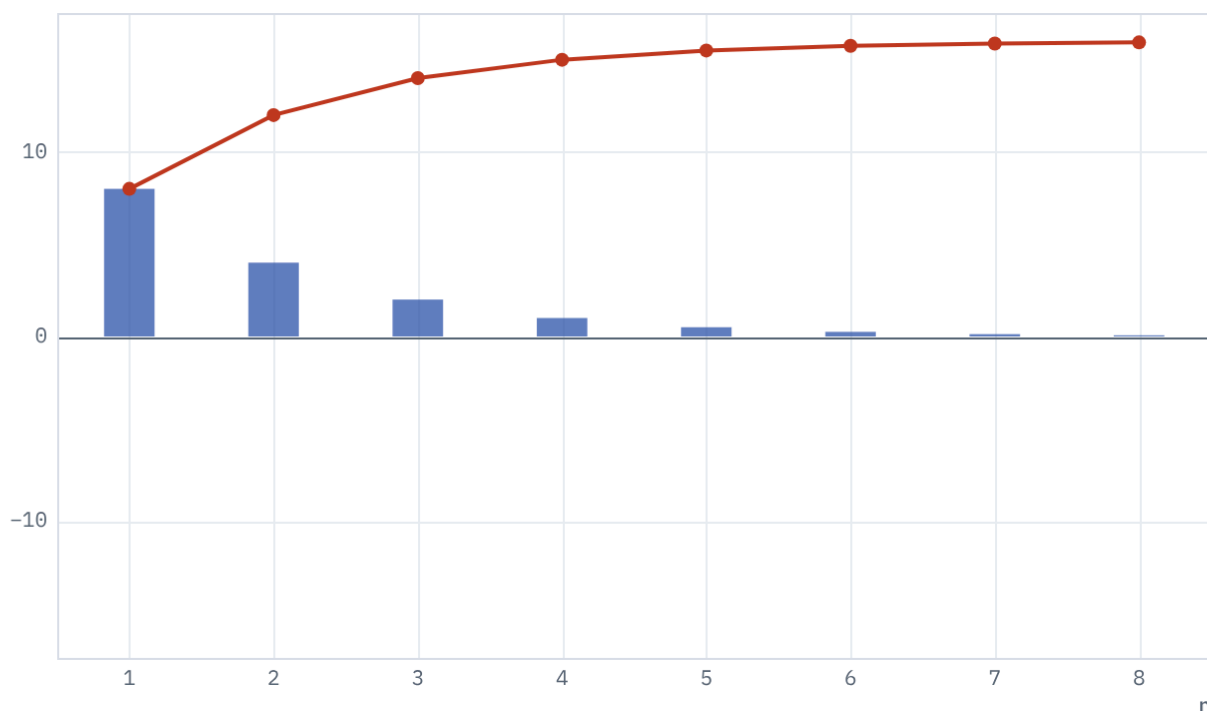
☞ SUMA NIESKOŃCZONEGO CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } |q| < 1.$$

Dla $|q| \geq 1$ (i $a_1 \neq 0$) suma nie istnieje. Warunek $|q| < 1$ obejmuje także ilorazy ujemne z przedziału $(-1, 0)$. „Podciągi” są znowu szeregami: kwadraty wyrazów mają iloraz q^2 , wyrazy o numerach parzystych też q^2 (z pierwszym wyrazem a_1q).

SYMULACJA 1

Wyraży ciągu geometrycznego (słupki) i sumy częściowe (linia). Ustaw $|q| < 1$: sumy zbliżają się do $\frac{a_1}{1-q}$, także przy ujemnym q (wtedy linia sum oscyluje wokół granicy). Dla $|q| \geq 1$ sumy uciekają.



— wyrazy a_n — suma S_n

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ 8; 4; 2; 1; 0,5; ...

zachowanie malejący

S_8 15,938

$|q| < 1$? tak: $S_n \rightarrow a_1 / (1 - q) = 16$

Dodatni iloraz: wszystkie wyrazy mają znak a_1 . Dla $a_1 > 0$ ciąg rośnie przy $q > 1$ i maleje przy $0 < q < 1$; dla $a_1 < 0$ odwrotnie. Teraz: malejący.

Stan na rysunku: $a_1 = 8$, $q = 0,5$; wyrazy 8; 4; 2; 1; 0,5; malejący.

Przykład 4.1**Ułamek okresowy**

Zapisz $0,(36)$ w postaci ułamka zwykłego.

1 $0,363636 \dots = 0,36 + 0,0036 + \dots$: $a_1 = 0,36$, $q = 0,01$.

2 $\frac{0,36}{0,99} = \frac{36}{99}$.

Wynik: $\frac{4}{11}$.

1 Oblicz $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \dots$



2 Rozwiąż równanie $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 4$.



3 Suma szeregu geometrycznego jest równa 6, a suma kwadratów jego wyrazów 12.
Wyznacz a_1 i q .



podstawowe średnie trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 25 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · GRANICE

ZESTAWY A

1 Oblicz granicę przy $n \rightarrow \infty$.



a) $\frac{4n+1}{2n-3}$

b) $\frac{1-2n^2}{n^2+n}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Zamień licznik na wielomian i oblicz granicę.



a) $\frac{1+2+\dots+n}{n^2}$

b) $\sqrt[n]{3^n+4^n}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM B · SZEREGI

ZESTAWY B

1 Oblicz sumę (albo stwierz, że nie istnieje).



a) $12 + 4 + \frac{4}{3} + \dots$

b) $0,2(15)$ jako ułamek

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · RÓWNANIA I PARAMETRY

ZESTAWY C

1 Rozwiąż albo wyznacz parametr.



a) $2 + 2x + 2x^2 + \dots = 3$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (25 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach rozszerzonych z lat 2024–2026 są tu zadania otwarte: granica ciągu za 2–4 punkty (dwa razy z symbolem Newtona albo sumą ciągu arytmetycznego w liczniku) i szereg geometryczny za 4–5 punktów. Według sprawozdań CKE zadanie z szeregiem w maju 2025 rozwiązało średnio 46% zdających, a granicę z symbolem Newtona w maju 2026 40%. W zasadach oceniania: liczenie sumy szeregu dla $|q| \geq 1$ daje co najwyżej 3 punkty, a liczba składników n zamiast $n + 1$ przy konsekwentnym dokończeniu nadal daje 2 punkty. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 11 pkt · ok. 35 min

1



(0–2 pkt) Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+1}{2}}{3n^2 - 1}$.

2



(0–2 pkt) Wyznacz p , dla którego $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+1)n^2 + 3}{2n^2 - n} = 3$.

- 3 (0–4 pkt) Ciąg geometryczny (a_n) jest zbieżny. Wiadomo, że $a_1 + a_3 = 10$ oraz $a_1^2 + a_3^2 = 68$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

- 4 (0–3 pkt) Rozwiąż równanie $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^3 + \dots = 2x$, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

- × „Szereg zbiega tylko dla $0 < q < 1$.”

Zbiega dla $|q| < 1$, także dla $q \in (-1, 0)$.

- × „ $1 + 3 + \dots + (2n + 1)$ ma n składników.”

Ma $n + 1$ składników. Policz: $2k + 1$ dla $k = 0, 1, \dots, n$.

- × „ $\frac{\infty}{\infty} = 1$.”

To nie jest liczba. Podziel przez najwyższą potęgę i policz.

- × „Policzyłem $\frac{a_1}{1-q}$ dla $q = 2$: wyszło -8 .”

Dla $|q| \geq 1$ suma nie istnieje; wzór daje liczbę bez sensu.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Ile wynosi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 1}{2n^3 - n}$?

$\frac{5}{2}$.

- 2 Ile wynosi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1}$?

$+\infty$.

3 Jaka jest suma $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$?

8.

4 Dla jakich q istnieje suma szeregu geometrycznego z $a_1 \neq 0$?

$|q| < 1$.

GRANICE

dziel przez najwyższą potęgę mianownika

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SZEREG

$$S = \frac{a_1}{1-q} \text{ dla } |q| < 1$$

kwadraty wyrazów: $\frac{a_1^2}{1-q^2}$

Wzór na sumę szeregu geometrycznego jest w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne”; technik obliczania granic broszura nie podaje.

*Dalej: trygonometria (lekcja 7.1 Trygonometria kątów od 0° do 180°); granice funkcji w lekcji 13.1
Granice i ciągłość funkcji, własność Darboux.*



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Stopień licznika mniejszy: 0.
2. 1. Mnożymy i dzielimy przez $\sqrt{n^2 + 4n} + n$: $\frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}$.
2. Dzielimy przez n : $\frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} \rightarrow 2$.

Zadania • część 2

1. $\frac{n(n-1)}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Zadania • część 4

1. $q = -\frac{1}{3}, |q| < 1$: $\frac{9}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{27}{4}$.
2. 1. Warunek $|x| < 1$; $\frac{1}{1-x} = 4$.
2. $x = \frac{3}{4} \checkmark$.
3. 1. $\frac{a_1}{1-q} = 6, \frac{a_1^2}{1-q^2} = 12$.
2. Dzielimy drugie przez kwadrat pierwszego: $\frac{1-q}{1+q} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{2}$.
3. $a_1 = 3$.

Zestawy A

1. a) 2 b) -2
2. a) $\frac{1}{2}$ b) 4

Zestawy B

1. a) 18 b) $\frac{71}{330}$

Zestawy C

1. a) $x = \frac{1}{3}$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Symbol Newtona. $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$.
2. Granica. $\frac{n^2 + n}{2(3n^2 - 1)} \rightarrow \frac{1}{6}$.
1 pkt za zapis symbolu Newtona jako wielomianu. 2 pkt za granicę $\frac{1}{6}$.
2. 1. Granica. $\frac{p+1}{2}$.
2. Równanie. $\frac{p+1}{2} = 3, p = 5$.
1 pkt za granicę w zależności od p . 2 pkt za $p = 5$.

3. 1. **Iloczyn.** $a_1 a_3 = \frac{100-68}{2} = 16$, więc $\{a_1, a_3\} = \{2, 8\}$.

2. **Iloraz.** $q^2 = \frac{a_3}{a_1}$: $(a_1, a_3) = (2, 8)$ daje $q = \pm 2$ (szereg rozbieżny); $(8, 2)$ daje $q = \pm \frac{1}{2}$.

3. **Sumy.** $q = \frac{1}{2}$: $\frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = 16$; $q = -\frac{1}{2}$: $\frac{8}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{16}{3}$.

1 pkt za $a_1 a_3 = 16$ albo równanie z jedną niewiadomą. **2 pkt** za pary $(2, 8)$ i $(8, 2)$. **3 pkt** za ilorazy i odrzucenie $|q| = 2$. **4 pkt** za sumy 16 i $\frac{16}{3}$.

Uwaga: pominięcie $q = -\frac{1}{2}$ (przekonanie, że szereg zbiega tylko dla $q > 0$) daje co najwyżej 3 pkt.

4. 1. **Warunek.** $|x - 1| < 1$, czyli $x \in (0, 2)$.

2. **Równanie.** $\frac{1}{1 - (x - 1)} = \frac{1}{2 - x} = 2x$, czyli $2x^2 - 4x + 1 = 0$.

3. **Rozwiązania.** $x = 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$; oba należą do $(0, 2)$.

1 pkt za warunek zbieżności. **2 pkt** za równanie $2x^2 - 4x + 1 = 0$. **3 pkt** za oba rozwiązania z weryfikacją warunku.

Matura z matematyki · Lekcja 6.4: Granice ciągów i szereg geometryczny · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości i Uwagi według arkusza, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt6_4.py).