

Trening: granice ciągów i szereg geometryczny

Zestawy krótkich przykładów do lekcji 6.4 Granice ciągów i szereg geometryczny: granice ilorazów wielomianów, sumy i symbol Newtona w liczniku, twierdzenie o trzech ciągach, sumy szeregów i równania z szeregiem. Na końcu zadania w stylu arkusza rozszerzonego.

POZIOM A · GRANICE

ZESTAWY A

2 zestawy

1 Oblicz granicę przy $n \rightarrow \infty$.



a) $\frac{4n+1}{2n-3}$

b) $\frac{n^2-5}{3n^3+n}$

c) $\frac{(2n+1)^2}{n^2+1}$

d) $\frac{1-2n^2}{n^2+n}$

e) $\frac{n^3}{n^2+1} - n$

f) $\sqrt{n^2+6n} - n$

2 Zamień licznik na wielomian i oblicz granicę.



a) $\frac{1+2+\dots+n}{n^2}$

b) $\frac{2+4+\dots+2n}{n^2+3n}$

c) $\frac{\binom{n}{3}}{n^3+1}$

d) $\frac{\binom{n+2}{n}}{4n^2}$

e) $\sqrt[n]{3^n+4^n}$

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM B · SZEREGI

ZESTAWY B

1 zestaw

1 Oblicz sumę (albo stwierz, że nie istnieje).



a) $12 + 4 + \frac{4}{3} + \dots$

b) $10 - 5 + \frac{5}{2} - \dots$

c) $1 - 2 + 4 - \dots$

d) $0,(7)$ jako ułamek

e) $0,2(15)$ jako ułamek

f) $\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots$

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM C · RÓWNANIA I PARAMETRY

ZESTAWY C

1 zestaw

1 Rozwiąż albo wyznacz parametr.



a) $2 + 2x + 2x^2 + \dots = 3$

b) $x + x^2 + x^3 + \dots = 2$

c) dla jakich x istnieje
suma $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots$

d) $S = 9, a_1 = 6; q$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pn^2 + 1}{(2-p)n^2 + n} = 1; p$

podstawowe średnie trudniejsze

ZADANIA MATURALNE

Formy zadań jak w arkuszu rozszerzonym CKE. W zadaniach z szeregiem ostatni punkt jest za sumy policzone tylko dla $|q| < 1$.

ZADANIA W STYLU ARKUSZA

3 zadania · 9 pkt

1 (0-2 pkt) Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)}{2n^2 + 5}$.



2 (0-4 pkt) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 16, a suma jego wyrazów o numerach parzystych $\frac{16}{3}$. Wyznacz a_1 i q .



3 (0-3 pkt) Wyznacz wszystkie x , dla których $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \dots = \frac{x+3}{4}$ (lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego).



podstawowe średnie trudniejsze



Odpowiedzi

Zestawy A

1. a) 2 b) 0 c) 4 d) -2 e) 0 f) 3

2. a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{8}$ e) 4

Zestawy B

1. a) 18 b) $\frac{20}{3}$ c) nie istnieje d) $\frac{7}{9}$ e) $\frac{71}{330}$ f) $2 + 2\sqrt{2}$

Zestawy C

1. a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $x \in (-2, 2)$ d) $\frac{1}{3}$ e) 1

Zadania w stylu arkusza

1. 1. Suma. n składników, $\frac{3+4n-1}{2} \cdot n = (2n+1)n$.

2. Granica. $\frac{2n^2+n}{2n^2+5} \rightarrow 1$.

1 pkt za sumę $(2n+1)n$. 2 pkt za granicę 1.

2. 1. Równania. $\frac{a_1}{1-q} = 16$, $\frac{a_1 q}{1-q^2} = \frac{16}{3}$.

2. Dzielenie. $\frac{q}{1+q} = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{2}$.

3. Wynik. $a_1 = 8$; $|q| < 1$ ✓.

1 pkt za oba równania. 2 pkt za równanie z jedną niewiadomą. 3 pkt za $q = \frac{1}{2}$. 4 pkt za $a_1 = 8$ ze sprawdzeniem $|q| < 1$.

3. 1. Warunek. $q = -\frac{x}{3}$, $|q| < 1$: $x \in (-3, 3)$.

2. Równanie. $\frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{3}{x+3} = \frac{x+3}{4}$, czyli $(x+3)^2 = 12$.

3. Wynik. $x = -3 \pm 2\sqrt{3}$; do $(-3, 3)$ należy tylko $x = 2\sqrt{3} - 3$.

1 pkt za warunek $|x| < 3$. 2 pkt za równanie $(x+3)^2 = 12$. 3 pkt za $x = 2\sqrt{3} - 3$ z odrzuceniem drugiego.

Matura z matematyki · Trening do lekcji 6.4 · Zadania autorskie, formy i punktacja wzorowane na arkuszach, informatorze i zasadach oceniania CKE dla poziomu rozszerzonego. Wszystkie odpowiedzi sprawdzone (tools/verify/mt6_4.py).