

Ciąg geometryczny

W ciągu geometrycznym każdy wyraz powstaje z poprzedniego przez pomnożenie przez stały iloraz q . Wzory są w broszurze, a zadanie o wyrazie z dwóch danych ma łatwość 78%. Słabiej idą dwie własności: że iloczyny wyrazów o równej sumie numerów są równe (42% w 2026) i że ujemny iloraz wyklucza monotoniczność. Lekcja kończy się zadaniami, w których ciąg geometryczny buduje się z wyrazów ciągu arytmetycznego.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 50
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
VI.4, VI.6, VI.7

W TEJ LEKCJI

- 0 Razy trzy, razy trzy, razy trzy
- 1 Wzór na
- n -ty wyraz i monotoniczność
- 2 Suma
- n wyrazów
- 3 Trzy kolejne wyrazy:
 $b^2 =$
 ac
- 4 Iloczyny wyrazów
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

0

Razy trzy, razy trzy, razy trzy

W ciągu geometrycznym $a_2 = 6$ i $a_5 = 162$. Od a_2 do a_5 są trzy kroki, każdy to mnożenie przez q : $a_5 = a_2 \cdot q^3$. Stąd $q^3 = 27$, $q = 3$. W ciągu arytmetycznym te same trzy kroki byłyby dodawaniem $3r$. Cała różnica między ciągami: tam się dodaje, tu się mnoży. Wyrazy: 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458.

1

Wzór na n -ty wyraz i monotoniczność

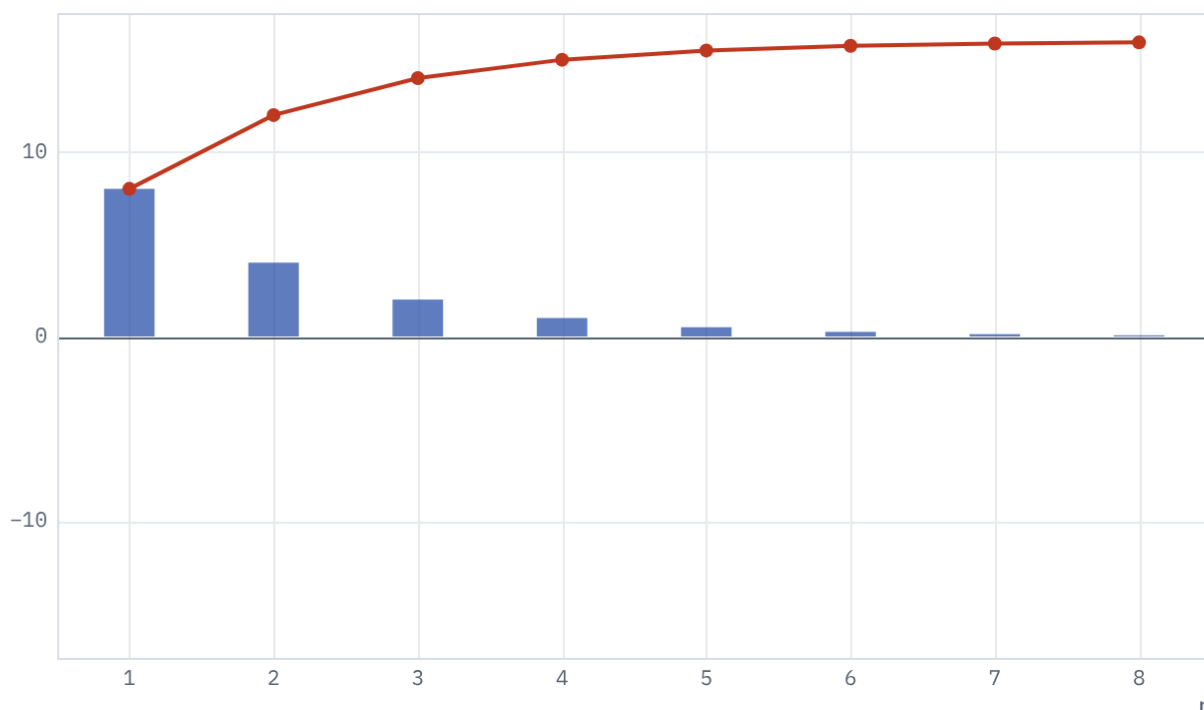
CIĄG GEOMETRYCZNY

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad a_n = a_k \cdot q^{n-k}.$$

- $q < 0$: znaki na przemian, ciąg **niemonotoniczny**.
- $q > 1$: rosnący dla $a_1 > 0$, malejący dla $a_1 < 0$; $0 < q < 1$: odwrotnie.
- $q = 1$: stały.

SYMULACJA 1

Wyraży ciągu geometrycznego (słupki) i sumy częściowe (linia). Zmieniaj a_1 i q . Przy ujemnym q słupki skaczą nad i pod oś; przy $|q| < 1$ maleją do zera, a sumy zbliżają się do stałej wartości.



— wyrazy a_n — suma S_n

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ 8; 4; 2; 1; 0,5; ...

zachowanie malejący

S_8 15,938

$|q| < 1$? tak: $S_n \rightarrow a_1 / (1 - q) = 16$

Dodatni iloraz: wszystkie wyrazy mają znak a_1 . Dla $a_1 > 0$ ciąg rośnie przy $q > 1$ i maleje przy $0 < q < 1$; dla $a_1 < 0$ odwrotnie. Teraz: malejący.

Stan na rysunku: $a_1 = 8$, $q = 0,5$; wyrazy 8; 4; 2; 1; 0,5; malejący.

Przykład 1.1**Warunek „ciąg malejący”**

Ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich jest malejący i $a_6 = 16a_8$. Wyznacz q .

- $a_8 = a_6 q^2$, więc $a_6 = 16a_6 q^2$ i $q^2 = \frac{1}{16}$.
- $q = \frac{1}{4}$ albo $q = -\frac{1}{4}$. Ujemny iloraz daje ciąg niemonotoniczny (i wyrazy ujemne).

Wynik: $q = \frac{1}{4}$.

1 $a_1 = 81, a_2 = 27$. Oblicz a_5 .

2 $a_4 = -8a_7$. Oblicz q .

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

2 Suma n wyrazów

🔑 SUMA n POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1), \quad S_n = na_1 \quad (q = 1).$$

Przykład 2.1

Suma z ilorazem

2

Oblicz $3 + 6 + 12 + \dots + 384$.

1 $a_1 = 3, q = 2, 384 = 3 \cdot 2^{n-1}$, więc $2^{n-1} = 128, n = 8$.

2 $S_8 = 3 \cdot \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 3 \cdot 255$.

Wynik: 765.

1 Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Trzy kolejne wyrazy: $b^2 = ac$

WARUNEK DLA TRZECH LICZB

Niezerowe liczby a, b, c tworzą (w tej kolejności) ciąg geometryczny $\iff b^2 = ac$.
Rozwiązania z wyrazem równym zero odrzucamy.

Uwaga na znak: z $b^2 = ac$ wynika $b = \pm\sqrt{ac}$. Gdy treść nie mówi o znakach wyrazów, oba przypadki trzeba rozważyć.

Przykład 3.1

Parametr i wyrazy zerowe

Dla jakich x liczby $x - 1, x + 1, 3x + 3$ tworzą ciąg geometryczny?

- 1 $(x + 1)^2 = (x - 1)(3x + 3) = 3(x - 1)(x + 1)$.
- 2 $(x + 1)[(x + 1) - 3(x - 1)] = 0$, czyli $(x + 1)(4 - 2x) = 0$.
- 3 $x = -1$: ciąg $(-2, 0, 0)$ ma wyrazy zerowe $\times$. $x = 2$: $(1, 3, 9)$, $q = 3$ $\checkmark$.

Wynik: $x = 2$. Dzielenie przez $x + 1$ na początku „zgubiłoby” przypadek $x = -1$, który i tak odpada, ale trzeba to napisać.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 6 min

- 1 Ciąg $(4, x, 9)$ jest geometryczny. Wyznacz x .

■ ■ ■

- 2 Ciąg $(x, x + 2, 4x + 8)$ jest geometryczny o wyrazach dodatnich. Oblicz x i q .

■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

4 Iloczyn wyrazów

RÓWNE SUMY NUMERÓW, RÓWNE ILOCZYNY

Jeśli $k + l = m + n$, to $a_k \cdot a_l = a_m \cdot a_n$, bo oba iloczyny są równe $a_1^2 q^{k+l-2}$. W szczególności $a_{k-1} a_{k+1} = a_k^2$.

Przykład 4.1

Iloczyn bez

a_1

i

q

W ciągu geometrycznym $a_3 \cdot a_8 = 20$. Oblicz $a_5 \cdot a_6$ i $a_1 \cdot a_{10}$. Ile wynosi $a_1 a_2 \cdots a_7$, jeśli $a_4 = 3$?

- 1 $3 + 8 = 5 + 6 = 1 + 10 = 11$: oba iloczyny są równe 20.
- 2 $a_1 a_7 = a_2 a_6 = a_3 a_5 = a_4^2 = 9$, więc iloczyn siedmiu wyrazów to $9^3 \cdot 3 = 3^7$.

Wynik: 20, 20, $3^7 = 2187$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 3 min

- 1 W ciągu geometrycznym $a_2 \cdot a_6 = 25$. Oblicz a_4^2 i $a_1 \cdot a_7$.



▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 26 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WYRAZY I ILORAZ

ZESTAWY A

1 Ciąg geometryczny: oblicz szukaną wielkość.



a) $a_1 = 5, q = 2; a_6$

b) $a_2 = 6, a_5 = -48; q$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · SUMY I ILOCZYNY

ZESTAWY B

1 Oblicz.



a) $a_1 = 1, q = 3; S_5$

b) $a_4 \cdot a_6 = 18; a_3 \cdot a_7$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · TRZY WYRAZY I CIĄGI MIESZANE

ZESTAWY C

1 Wyznacz x , dla których ciąg jest geometryczny.



a) $(2, x, 18)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Ciągi mieszane.



a) $a_n = 2n + 2; k$, dla którego (a_1, a_3, a_k) jest geometryczny

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (26 przykładów i zadań) →

Ciąg geometryczny to w arkuszach z lat 2024–2026 kilkanaście zadań zamkniętych i kilka otwartych. Według sprawozdań CKE wyraz z dwóch danych rozwiązało 78% zdających (maj 2025), zadanie o iloczynie wyrazów tylko 42% (maj 2026), a ciąg geometryczny złożony z wyrazów ciągu arytmetycznego 62% (maj 2026). W zasadach oceniania: pomylenie typu ciągu daje 0 albo co najwyżej 2 punkty, a przyjęcie $b = \sqrt{ac}$ bez rozważenia $b = -\sqrt{ac}$ obniża wynik. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 9 pkt · ok. 25 min

- 1 (0–1 pkt) W ciągu geometrycznym $a_1 = 48$ i $a_2 = 24$. Wyraz a_5 jest równy
 A. 1,5 B. 3 C. 6 D. 12
- 2 (0–1 pkt) W ciągu geometrycznym $a_2 = 27a_5$. Iloraz tego ciągu jest równy
 A. -3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3
- 3 (0–1 pkt) W ciągu geometrycznym $a_2 \cdot a_9 = 12$. Uzupełnij zdanie: iloczyn $a_4 \cdot a_7$ jest równy
- 4 (0–3 pkt) Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3n - 1$. Liczby a_1, a_3, a_k są (w tej kolejności) pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz k .
- 5 (0–3 pkt) Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 2. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 84. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

✗ „ $a_n = a_1 \cdot q^n$.”

$a_n = a_1 q^{n-1}$: od a_1 do a_n jest $n - 1$ mnożeń.

× „ $q^2 = \frac{1}{16}$, więc $q = \frac{1}{4}$.”

Także $q = -\frac{1}{4}$. Odrzucasz go dopiero z warunku (malejący, wyrazy dodatnie) i pisesz dlaczego.

× „ $b^2 = ac$, więc $b = \sqrt{ac}$.”

$b = \pm\sqrt{ac}$. Ujemny środkowy wyraz też daje ciąg geometryczny.

× „ $a_3a_8 = a_5a_6$, bo $3 \cdot 8 = \dots$ ”

Równe muszą być sumy numerów ($3 + 8 = 5 + 6$), nie iloczyny.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Czy ciąg $3, -6, 12, -24$ jest monotoniczny?

Nie: $q = -2 < 0$.

2 Ile wynosi a_3 , jeśli $a_2 = 4$ i $a_4 = 9$, a wyrazy są dodatnie?

6.

3 Czy $(0, 0, 0)$ jest ciągiem geometrycznym w sensie zadań maturalnych?

Nie: wyrazy muszą być niezerowe, żeby był określony iloraz.

4 Ile wynosi S_n dla $q = 1$?

na_1 .

WZORY

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$b^2 = ac$$

WŁASNOŚCI

$$a_k a_l = a_m a_n \text{ dla } k + l = m + n$$

$q < 0$: niemonotoniczny

Wzory na a_n , S_n i $a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}$ są w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne”. Własności iloczynów $a_k a_l = a_m a_n$ broszura nie podaje.

Dalej: dla rozszerzenia granice ciągów i szereg geometryczny (lekcja 6.4 Granice ciągów i szereg geometryczny); model wykładniczy w lekcji 5.6 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $q = \frac{1}{3}, a_5 = 81 \cdot \frac{1}{81} = 1$.
2. $a_7 = a_4 q^3: 1 = -8q^3, q^3 = -\frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$.

Zadania · część 2

1. $S_5 = 2 \cdot \frac{1 - (-3)^5}{1 + 3} = 2 \cdot \frac{244}{4} = 122$.

Zadania · część 3

1. $x^2 = 36: x = 6$ albo $x = -6$ (oba dają ciąg geometryczny: $q = \frac{3}{2}$ albo $q = -\frac{3}{2}$).
1. $(x + 2)^2 = x \cdot 4(x + 2), x + 2 > 0$, więc $x + 2 = 4x$.
2. $x = \frac{2}{3}: (\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{32}{3}), q = 4$.

Zadania · część 4

1. $2 + 6 = 4 + 4 = 1 + 7$: oba są równe 25.

Zestawy A

1. a) 160 b) -2

Zestawy B

1. a) 121 b) 18

Zestawy C

1. a) ± 6
2. a) $k = 7$

Zadania w stylu maturalnym

1. B. $q = \frac{1}{2}, a_5 = 48 \cdot \frac{1}{16} = 3$.
2. C. $a_5 = a_2 q^3: 1 = 27q^3, q = \frac{1}{3}$.
3. 12 (bo $2 + 9 = 4 + 7$).
4. 1. Wyraży. $a_1 = 2, a_3 = 8$.
2. Warunek. $8^2 = 2 \cdot a_k$, więc $a_k = 32$.
3. Numer. $3k - 1 = 32, k = 11$.
1 pkt za a_1 i a_3 albo za zapis $a_3^2 = a_1 a_k$. **2 pkt** za $a_k = 32$ (albo równanie $64 = 2(3k - 1)$). **3 pkt** za $k = 11$.
5. 1. Krawędzie. $a, 2a, 4a$.
2. Suma. $4(a + 2a + 4a) = 28a = 84, a = 3$.
3. Objętość. $3 \cdot 6 \cdot 12 = 216$.

1 pkt za a , $2a$, $4a$. **2 pkt** za $a = 3$. **3 pkt** za $V = 216$.

Uwaga: prostopadłościan ma 12 krawędzi, po 4 każdej długości. Suma $a + 2a + 4a = 84$ to błąd interpretacji.

Matura z matematyki · Lekcja 6.3: Ciąg geometryczny · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości i Uwagi według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt6_3.py).