

# Ciąg arytmetyczny

Ciąg arytmetyczny ma stałą różnicę  $r$  między kolejnymi wyrazami. Na maturze wystarczają trzy narzędzia: wzór na  $n$ -ty wyraz, wzór na sumę i własność środkowego wyrazu  $2b = a + c$ . Najprostsze zadania (wyraz z dwóch danych) mają łatwość 87%, ale zadanie z parametrem i warunkiem „ciąg malejący” już tylko 49%. Punkty giną na wyborze rozwiązania, które spełnia wszystkie warunki.

## CZAS

ok. 30 min  
czytania + ok. 50  
min zadań

## ZADANIA

7 zadań w treści,  
próbka treningu  
rachunkowego, 5  
zadań w stylu  
maturalnym;  
pełny trening na  
osobnej stronie

## WYMAGANIA

podstawa  
programowa,  
zakres  
podstawowy:  
VI.4, VI.5, VI.7

## W TEJ LEKCJI

0 Suma od

1 do

100

1 Wzór na

$n$  -ty wyraz

2 Suma

$n$  wyrazów

3 Trzy kolejne wyrazy:

$2b =$

$a +$

$c$

4 Zadania z treścią

5 Trening rachunkowy

6 Na maturze

7 Najczęstsze błędy

8 Sprawdź się

9 Karta wzorów i co dalej

## Suma od 1 do 100

Dodaj  $1 + 2 + \dots + 100$ . Zamiast dodawać po kolei, połącz w pary pierwszy z ostatnim:  $1 + 100$ ,  $2 + 99$ ,  $3 + 98$ ... Każda para daje 101, a par jest 50. Suma:  $50 \cdot 101 = 5050$ . W każdym ciągu arytmetycznym „pierwszy plus ostatni” jest tyle samo co „drugi plus przedostatni”, bo jeden rośnie o  $r$ , a drugi maleje o  $r$ . Stąd wzór na sumę: liczba wyrazów razy średnia z pierwszego i ostatniego.

## Wzór na $n$ -ty wyraz

### CIĄG ARYTMETYCZNY

$$a_{n+1} = a_n + r, \quad a_n = a_1 + (n-1)r, \quad a_n = a_k + (n-k)r.$$

$r > 0$ : ciąg rosnący,  $r < 0$ : malejący,  $r = 0$ : stały.

### Przykład 1.1

### Dwa wyrazy dane, trzeci szukany

W ciągu arytmetycznym  $a_3 = 7$  i  $a_8 = 22$ . Oblicz  $a_{20}$ .

1  $a_8 = a_3 + 5r$ , więc  $22 = 7 + 5r$ ,  $r = 3$ .

2  $a_{20} = a_8 + 12r = 22 + 36 = 58$ .

**Wynik:**  $a_{20} = 58$  (przy okazji  $a_1 = 1$ ,  $a_n = 3n - 2$ ).

### ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

1  $a_1 = 4$ ,  $a_6 = 29$ . Oblicz  $a_{11}$ .

2 Który wyraz ciągu arytmetycznego  $a_1 = 100$ ,  $r = -3$  jest pierwszym ujemnym?

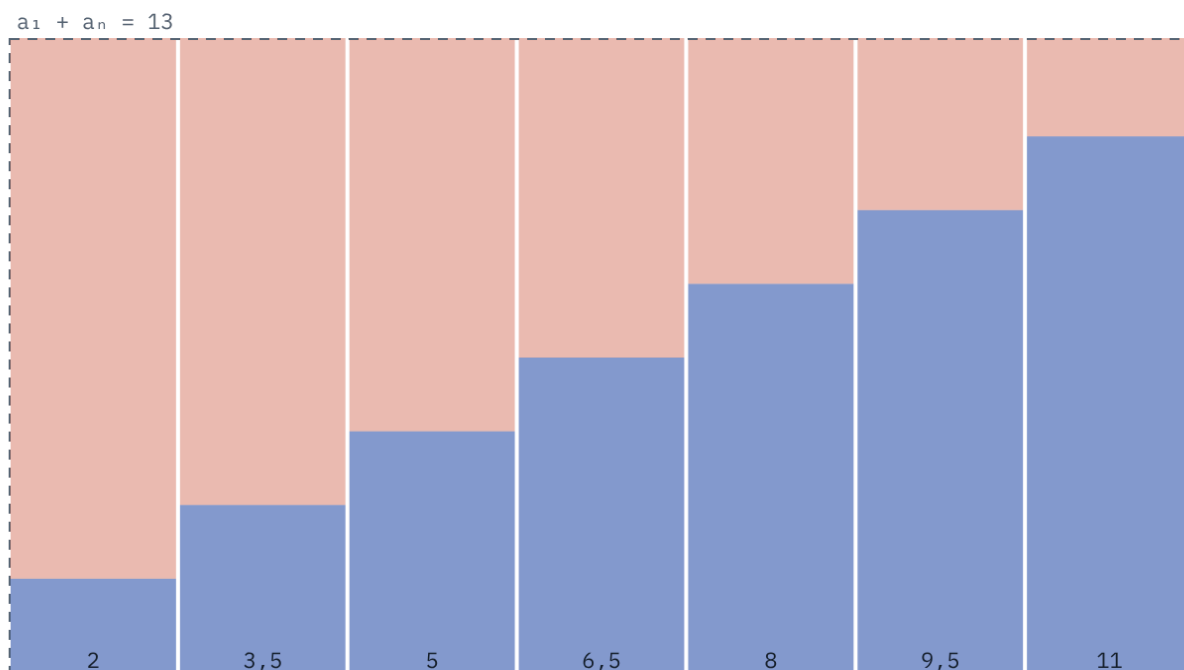
▮▮▮ podstawowe   ▮▮▮ średnie   ▮▮▮ trudniejsze

## 2 Suma $n$ wyrazów

### 🔊 SUMA $n$ POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n.$$

**SYMULACJA 1** Słupki to wyrazy  $a_1, \dots, a_n$ ; na każdym stoi ten sam ciąg w odwrotnej kolejności. Kolumny mają równą wysokość  $a_1 + a_n$ , więc razem tworzą prostokąt  $n \times (a_1 + a_n)$ . Suma ciągu to połowa prostokąta. Zmieniaj  $a_1$ ,  $r$  i  $n$ .



— wyrazy  $a_1 \dots a_n$  — te same wyrazy w odwrotnej kolejności

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad 11$$

$$\text{prostokąt } 7 \times 13 = 91$$

$$S_n = n(a_1 + a_n)/2 \quad 45,5$$

$$S_n = (2a_1 + (n-1)r)n/2 \quad 45,5$$

Każda kolumna (wyraz plus wyraz z drugiego końca) ma tę samą wysokość  $a_1 + a_n$ , bo co krok w prawo pierwszy rośnie o  $r$ , a drugi maleje o  $r$ . Dwie kopie sumy wypełniają prostokąt  $7 \times 13$ , więc jedna to połowa:  $S_n = 45,5$ .

Stan na rysunku:  $a_1 = 2$ ,  $r = 1,5$ ,  $n = 7$ ;  $a_n = 11$ ,  $S_n = 45,5$ .

### Przykład 2.1

## Suma z rekurencji

Ciąg określony jest wzorami  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = a_n + 4$ . Oblicz  $S_{50}$ .

1 Arytmetyczny z  $r = 4$ .  $a_{50} = 3 + 49 \cdot 4 = 199$ .

2  $S_{50} = \frac{3 + 199}{2} \cdot 50 = 101 \cdot 50$ .

**Wynik:**  $S_{50} = 5050$ .

### ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 5 min

1 Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 7.

2 Suma 10 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 85, a  $a_1 = -1$ . Oblicz  $r$ .

 podstawowe    średnie    trudniejsze

## 3 Trzy kolejne wyrazy: $2b = a + c$

### WARUNEK DLA TRZECH LICZB

Liczby  $a, b, c$  (w tej kolejności) tworzą ciąg arytmetyczny  $\iff 2b = a + c$ . Środkowa jest średnią arytmetyczną sąsiednich.

Gdy treść dodaje warunek (rosnący, malejący, niestały), **sprawdź każde rozwiązanie** i odrzuć te, które go nie spełniają.

Przykład 3.1

## Parametr i warunek „malejący”

Ciąg  $(3m + 4, m^2 + 1, 2 - m)$  jest arytmetyczny i malejący. Wyznacz  $m$ .

- 1  $2(m^2 + 1) = 3m + 4 + 2 - m$ , czyli  $2m^2 - 2m - 4 = 0$ ,  $m^2 - m - 2 = 0$ .
- 2  $m = 2$  albo  $m = -1$ .
- 3  $m = 2$ : ciąg  $(10, 5, 0)$ ,  $r = -5$ , malejący ✓.  $m = -1$ : ciąg  $(1, 2, 3)$ , rosnący ×.

**Wynik:**  $m = 2$ . Bez sprawdzenia warunku „malejący” w kluczu traci się punkt.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 6 min

- 1 Dla jakiego  $x$  liczby  $x - 1, 2x, 4x - 5$  tworzą ciąg arytmetyczny?
- 2 Ciąg  $(m^2, 2m + 3, 6)$  jest arytmetyczny. Wyznacz wszystkie  $m$  i dla każdego podaj ciąg.

▣▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣ trudniejsze

## 4 Zadania z treścią

Przykład 4.1

## Suma i średnia

Suma 8 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 100, a średnia arytmetyczna wyrazów  $a_2$  i  $a_5$  jest równa 11. Wyznacz  $a_1$  i  $r$ .

- 1  $S_8 = \frac{2a_1 + 7r}{2} \cdot 8 = 4(2a_1 + 7r) = 100$ , czyli  $2a_1 + 7r = 25$ .
- 2  $\frac{a_2 + a_5}{2} = 11$ :  $a_1 + r + a_1 + 4r = 22$ , czyli  $2a_1 + 5r = 22$ .
- 3 Odejmujemy:  $2r = 3$ ,  $r = \frac{3}{2}$ ,  $a_1 = \frac{22 - 7,5}{2} = \frac{29}{4}$ .

**Wynik:**  $a_1 = \frac{29}{4}$ ,  $r = \frac{3}{2}$ .

- 1 W amfiteatrze w pierwszym rzędzie jest 20 miejsc, a w każdym następnym o 2 więcej. Ile jest miejsc w 15 rzędach?

podstawowe   średnie   trudniejsze

## 5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 26 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

### POZIOM A · WYRAZY

#### ZESTAWY A

- 1 Ciąg arytmetyczny: oblicz szukaną wielkość.

a)  $a_1 = 5, r = 3; a_{12}$       b)  $a_3 = -1, a_7 = 11; a_1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe   średnie   trudniejsze

### POZIOM B · SUMY

#### ZESTAWY B

- 1 Oblicz.

a)  $a_1 = 1, r = 2; S_{20}$       b)  $a_1 = 3, S_8 = 80; r$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe   średnie   trudniejsze

### POZIOM C · TRZY WYRAZY I UKŁADY

#### ZESTAWY C

1 Wyznacz  $x$ , dla których ciąg jest arytmetyczny.

$$\text{a) } (x, 7, 12) \qquad \text{b) } (x, x^2, 6)$$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Wyznacz  $a_1$  i  $r$ .

a)  $a_2 + a_6 = 20, a_3 = 7$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe    średnie    trudniejsze

**Pełny trening (26 przykładów i zadań) →**

## 6 Na maturze

Ciąg arytmetyczny to w arkuszach z lat 2024–2026 kilkanaście zadań zamkniętych i kilka otwartych za 2–4 punkty. Według sprawozdań CKE obliczenie wyrazu z dwóch danych (maj 2026) było najłatwiejszym zadaniem arkusza (87%), a zadanie z parametrem i warunkiem „malejący” (maj 2025) miało łatwość 49%. W zasadach oceniania powtarzają się Uwagi: pomylenie ciągu arytmetycznego z geometrycznym to 0 punktów, brak odrzucenia rozwiązania, które nie spełnia warunku, to punkt mniej, a sam wynik bez rozwiązania to 0 punktów. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

 ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 9 pkt · ok. 25 min

1 (0-1 pkt) W ciągu arytmetycznym  $a_1 = 3$  i  $a_4 = 15$ . Wyraz  $a_{10}$  jest równy

**A. 36**                      **B. 39**                      **C. 43**                      **D. 45**

2 (0-1 pkt) Ciąg  $(4m, 3 + m, m)$  jest arytmetyczny dla

**A.**  $m = -2$       **B.**  $m = 1$       **C.**  $m = 2$       **D.**  $m = 3$

3 (0-1 pkt) Ciąg określony jest wzorami  $a_1 = 7$ ,  $a_{n+1} = a_n + 3$ . Suma  $S_{40}$  jest równa

A. 2620                      B. 2660                      C. 5240                      D. 4960

4 (0-3 pkt) Ciąg  $(m + 7, m^2 + 1, 1 - 5m)$  jest arytmetyczny i rosnący. Oblicz  $m$ .

- 5 (0–3 pkt) Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa  $-50$ , a średnia arytmetyczna wyrazów  $a_1$ ,  $a_4$  i  $a_7$  jest równa 1. Wyznacz  $a_1$  i różnicę  $r$ .

▮▮▮ podstawowe   ▮▮▮ średnie   ▮▮▮ trudniejsze

## 7 Najczęstsze błędy

✗ „ $a_n = a_1 + nr$ .”

$a_n = a_1 + (n - 1)r$ : od  $a_1$  do  $a_n$  jest  $n - 1$  kroków.

✗ „ $(a, b, c)$  arytmetyczny  $\iff b^2 = ac$ .”

To warunek geometryczny. Arytmetyczny:  $2b = a + c$ . Pomylenie ciągów to w kluczu 0 punktów.

✗ „ $r = a_2 - a_1 = m^2 + 1 - m + 7$ .”

Odejmujesz cały wyraz:  $(m^2 + 1) - (m + 7) = m^2 - m - 6$ . Zgubiony nawias to w kluczu 0 punktów za taki zapis.

✗ „Wyszły dwa  $m$ , podaję oba.”

Jeśli treść ma warunek (rosnący, malejący), sprawdź każde  $m$  i odrzuć złe z uzasadnieniem.

## 8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Ile wynosi  $a_7$ , jeśli  $a_5 = 10$  i  $a_9 = 18$ ?

14 (średnia).

2 Jaka jest suma  $2 + 4 + \dots + 40$ ?

$$\frac{2+40}{2} \cdot 20 = 420.$$

- 3 Dla jakiego  $r$  ciąg arytmetyczny jest stały?

$$r = 0.$$

- 4 Jak sprawdzić, że  $(1, 4, 7)$  jest ciągiem arytmetycznym?

$$2 \cdot 4 = 1 + 7.$$

## WZORY

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2}n$$

## WŁASNOŚCI

$$2b = a + c$$

$$a_k + a_l = a_m + a_n \text{ dla } k + l = m + n$$

Wzory na  $a_n$ ,  $S_n$  i warunek  $2b = a + c$  są w broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne”.

*Dalej: ciąg geometryczny (lekcja 6.3 Ciąg geometryczny).*



# Odpowiedzi

## Zadania • część 1

1.  $5r = 25, r = 5; a_{11} = 4 + 50 = 54$ . (Albo:  $a_6$  jest środkiem między  $a_1$  i  $a_{11}$ , więc  $a_{11} = 2 \cdot 29 - 4$ .)

2.  $1. 100 - 3(n - 1) < 0 \iff n > \frac{103}{3} = 34\frac{1}{3}$ .

2.  $a_{35} = -2$ .

## Zadania • część 2

1.  $1. 14, 21, \dots, 98; a_1 = 14, r = 7, 98 = 14 + 7(n - 1), n = 13$ .

2.  $S_{13} = \frac{14 + 98}{2} \cdot 13 = 728$ .

2.  $1. \frac{-2 + 9r}{2} \cdot 10 = 85$

2.  $-2 + 9r = 17, r = \frac{19}{9}$ .

## Zadania • część 3

1.  $4x = 5x - 6, x = 6$ ; ciąg  $(5, 12, 19)$ .

2.  $1. 2(2m + 3) = m^2 + 6$ , czyli  $m^2 - 4m = 0$ .

2.  $m = 0: (0, 3, 6); m = 4: (16, 11, 6)$ .

## Zadania • część 4

1.  $1. a_{15} = 20 + 28 = 48$ .

2.  $S_{15} = \frac{20 + 48}{2} \cdot 15 = 510$ .

## Zestawy A

1. a) 38 b) -7

## Zestawy B

1. a) 400 b) 2

## Zestawy C

1. a) 2 b)  $-\frac{3}{2}$  albo 2

2. a)  $a_1 = 1, r = 3$

## Zadania w stylu maturalnym

1. B.  $3r = 12, r = 4; a_{10} = 3 + 36 = 39$ .

2. C.  $2(3 + m) = 5m, 6 = 3m, m = 2$ ; ciąg  $(8, 5, 2)$ .

3. A.  $a_{40} = 7 + 117 = 124; S_{40} = \frac{131}{2} \cdot 40 = 2620$ .

4. 1. **Warunek.**  $2(m^2 + 1) = (m + 7) + (1 - 5m)$ , czyli  $2m^2 + 4m - 6 = 0$ .  
2. **Rozwiązania.**  $m^2 + 2m - 3 = (m - 1)(m + 3) = 0$ :  $m = 1$  albo  $m = -3$ .  
3. **Wybór.**  $m = 1$ : ciąg  $(8, 2, -4)$ , malejący  $\times$ .  $m = -3$ : ciąg  $(4, 10, 16)$ , rosnący  $\checkmark$ .  
**1 pkt** za równanie  $2(m^2 + 1) = (m + 7) + (1 - 5m)$ . **2 pkt** za oba rozwiązania. **3 pkt** za  $m = -3$  z odrzuceniem  $m = 1$ .

Uwaga: podanie obu wartości bez wyboru to 2 pkt.

5. 1. **Suma.**  $\frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = -50$ , czyli  $2a_1 + 9r = -10$ .  
2. **Średnia.**  $\frac{a_1 + (a_1 + 3r) + (a_1 + 6r)}{3} = a_1 + 3r = 1$ .  
3. **Układ.**  $a_1 = 1 - 3r$ :  $2 - 6r + 9r = -10$ ,  $r = -4$ ,  $a_1 = 13$ .  
**1 pkt** za jedno z równań. **2 pkt** za układ. **3 pkt** za  $a_1 = 13$ ,  $r = -4$ .

Uwaga: błędna interpretacja (np.  $-50$  jako  $a_{10}$  albo średnia dzielona przez 2) daje co najwyżej 1 pkt.

---

Matura z matematyki · Lekcja 6.2: Ciąg arytmetyczny · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości i Uwagi według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt6\_2.py).