

Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność

Ciąg to funkcja określona na liczbach naturalnych: n -temu miejscu przyporządkowuje liczbę a_n . Policzenie wyrazu ze wzoru albo z rekurencji jest na maturze łatwe (75%). Trudniej idzie rozstrzygnięcie, czy ciąg jest arytmetyczny, geometryczny, rosnący (47%). Ta lekcja pokazuje, jak to rozstrzygać jednym rachunkiem: różnicą albo ilorazem kolejnych wyrazów.

CZAS

ok. 25 min
czytania + ok. 40
min zadań

ZADANIA

7 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
VI.1, VI.2, VI.3

W TEJ LEKCJI

- 0 Trzy wyrazy wystarczą do „nie”
- 1 Wzór ogólny
- 2 Rekurencja
- 3 Monotoniczność: znak
 $a_{n+1} - a_n$
- 4 Czy ciąg jest arytmetyczny albo geometryczny?
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Trzy wyrazy wystarczą do „nie”

Ciąg $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n - 1$ ma wyrazy 1, 2, 5, 14, ... Czy jest arytmetyczny? Różnice 1 i 3 są różne, więc nie. Czy geometryczny? Ilorazy 2 i $\frac{5}{2}$ są różne, więc nie. Do odpowiedzi „nie” wystarczą trzy wyrazy, bo jeden kontrprzykład obala własność. Do odpowiedzi „tak” trzeba pokazać, że różnica (albo iloraz) jest stała dla **każdego** n , czyli policzyć ją ogólnie.

Wzór ogólny

CIĄG LICZBOWY

Ciąg (a_n) to funkcja, która każdej liczbie naturalnej $n \geq 1$ przyporządkowuje liczbę a_n . Wzór ogólny pozwala obliczyć dowolny wyraz bez liczenia poprzednich: podstaw n .

Pytanie „który wyraz ciągu jest równy c ?” to równanie $a_n = c$ z warunkiem, że n jest liczbą naturalną.

Przykład 1.1

Wyraz i numer wyrazu

Dany jest ciąg $a_n = n^2 - 6n$. Oblicz a_4 i ustal, które wyrazy są równe 16.

- 1 $a_4 = 16 - 24 = -8$.
- 2 $n^2 - 6n = 16 \iff n^2 - 6n - 16 = 0 \iff (n - 8)(n + 2) = 0$.
- 3 $n = -2$ nie jest numerem wyrazu; zostaje $n = 8$.

Wynik: $a_4 = -8$; równy 16 jest tylko wyraz a_8 .

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

1 Oblicz a_5 dla $a_n = \frac{(-1)^n \cdot 64}{2^n}$.

2 Ile wyrazów ciągu $a_n = 50 - 3n$ jest dodatnich?

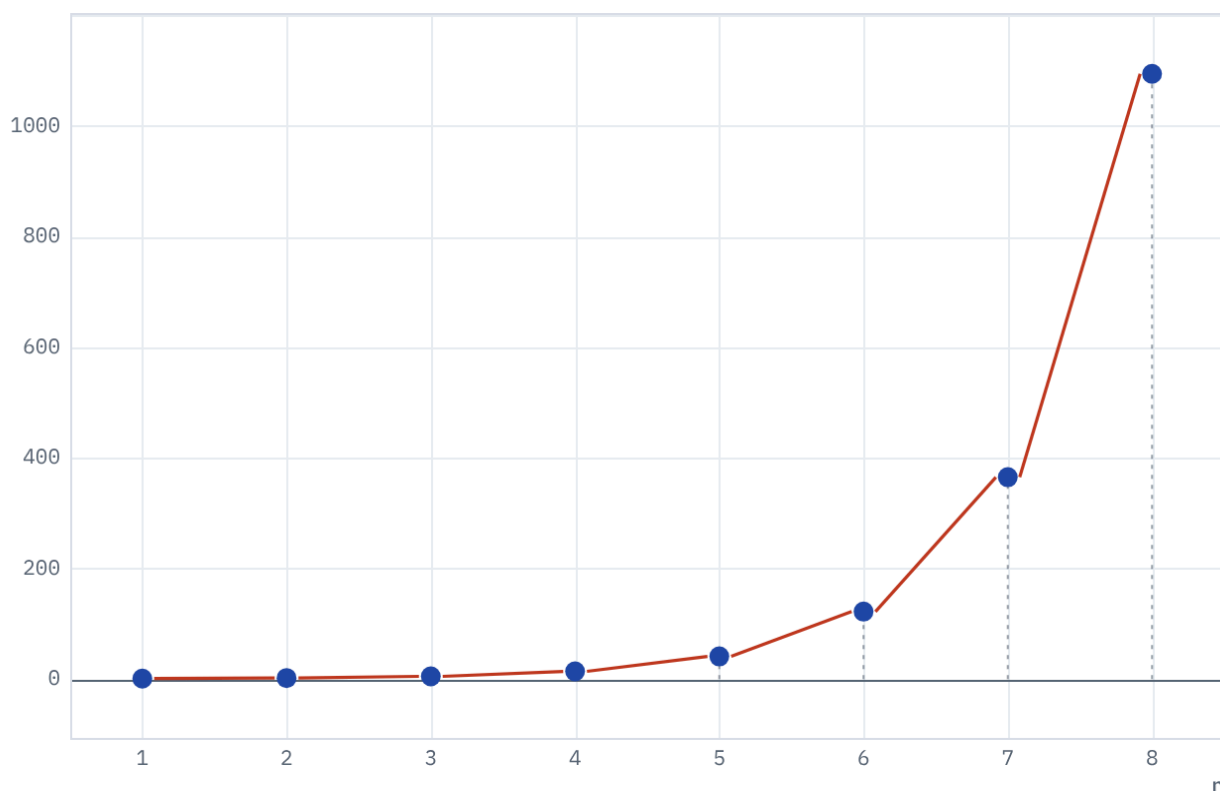
□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

2 Rekurencja

CIĄG OKREŚLONY REKURENCYJNIE

Podany jest pierwszy wyraz i przepis na następny z poprzedniego (czasem z dwóch poprzednich). Wyrazy liczy się po kolei; nie ma skrótu do a_{100} bez wzoru ogólnego.

SYMULACJA 1 Pierwsze wyrazy ciągu na wykresie. Kreski łączą kolejne wyrazy: rosną, gdy ciąg rośnie. W odczycie są różnice i ilorazy kolejnych wyrazów. Stała różnica oznacza ciąg arytmetyczny, stały iloraz geometryczny. Porównaj $3 \cdot (-1)^n + 5$ (skacze, nie jest monotoniczny) z $(2n + 6)/(n + 1)$ (maleje).



— wyrazy a_n — różnica $a_{n+1} - a_n$

ciąg $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n - 1$

$a_1 \dots a_6$ 1; 2; 5; 14; 41; 122

różnice 1; 3; 9; 27; 81

ilorazy 2; 5/2; 14/5; 2,929; 2,976

arytmetyczny / geometryczny **nie / nie**

monotoniczność rosnący

Ani różnice, ani ilorazy nie są stałe: ciąg nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny. Żeby to wykazać, wystarczą trzy pierwsze wyrazy: $1 \neq 3$ i $2 \neq 5/2$.

Stan na rysunku: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n - 1; a_1 \dots a_6 = 1; 2; 5; 14; 41; 122$.

Przykład 2.1

Rekurencja z

n

$a_1 = -1, a_{n+1} = n \cdot a_n + 3$. Oblicz $a_2 + a_3 + a_4$.

1 $a_2 = 1 \cdot (-1) + 3 = 2$.

2 $a_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$.

3 $a_4 = 3 \cdot 7 + 3 = 24$.

Wynik: $2 + 7 + 24 = 33$. Uwaga: przy liczeniu a_{n+1} mnożysz przez n , nie przez $n + 1$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 4 min

1 $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n - 4$. Oblicz a_6 .

2 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. Oblicz a_5 .

 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Monotoniczność: znak $a_{n+1} - a_n$

ROSNĄCY, MALEJĄCY, STAŁY

Ciąg jest rosnący, gdy $a_{n+1} - a_n > 0$ dla **każdego** n ; malejący, gdy $a_{n+1} - a_n < 0$ dla każdego n ; stały, gdy różnica jest zawsze zerem. Wystarczy policzyć różnicę ogólnie i ustalić jej znak.

Przykład 3.1

Ciąg wymierny

Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = \frac{2n+6}{n+1}$.

- 1 $a_n = 2 + \frac{4}{n+1}$.
- 2 $a_{n+1} - a_n = \frac{4}{n+2} - \frac{4}{n+1} = \frac{4(n+1) - 4(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-4}{(n+1)(n+2)}$.
- 3 Mianownik dodatni dla każdego $n \geq 1$, więc różnica ujemna.

Wynik: ciąg malejący.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 5 min

- 1 Wykaż, że ciąg $a_n = n^2 + n$ jest rosnący.

- 2 Czy ciąg $a_n = n^2 - 6n$ jest monotoniczny?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

4 Czy ciąg jest arytmetyczny albo geometryczny?

TEST

- **Arytmetyczny** $\iff a_{n+1} - a_n$ nie zależy od n (to różnica r).
- **Geometryczny** (o wyrazach niezerowych) $\iff \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie zależy od n (to iloraz q).
- Żeby wykazać „nie”, wystarczy kontrprzykład z trzech kolejnych wyrazów.

Przykład 4.1

Ciąg z

$$(-1)^n$$

Ciąg $a_n = 3 \cdot (-1)^n + 5$. Czy jest geometryczny? Oblicz sumę jego ośmiu początkowych wyrazów.

- 1 Wyrazy: 2, 8, 2, 8, ... Ilorazy 4 i $\frac{1}{4}$: nie jest geometryczny.
- 2 Cztery pary 2 + 8: suma $4 \cdot 10 = 40$.

Wynik: nie jest geometryczny; $S_8 = 40$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 3 min

- 1 Wykaż, że ciąg $a_n = 7 - 2n$ jest arytmetyczny.



 podstawowe  średnie  trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 31 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WYRAZY

 ZESTAWY A

- 1 Oblicz wskazany wyraz.



a) $a_n = 2n^2 - n$, a_3

b) $a_n = 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, a_5

... pozostałe przykłady na stronie treningu

- 2 Ciąg określony rekurencyjnie: oblicz wskazany wyraz.



a) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 5$; a_4 b) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = n - a_n$; a_5

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe  średnie  trudniejsze

ZESTAWY B

1 Odpowiedz.



a) który wyraz

$$a_n = 3n - 14 \text{ jest równy } 25$$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

ZESTAWY C

1 Oblicz $a_{n+1} - a_n$ i podaj monotoniczność.

a) $a_n = 5 - 4n$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Arytmetyczny (A), geometryczny (G), żaden (Ż)?



a) $a_n = 3 \cdot 2^n$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

Pełny trening (31 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach z lat 2024–2026 ten dział to głównie zadania za 1 punkt: obliczenie wyrazu ze wzoru albo rekurencji i P/F o typie lub monotoniczności ciągu. Według sprawozdania CKE w maju 2025 obliczenie trzeciego wyrazu ciągu rekurencyjnego rozwiązało 75% zdających, a rozstrzygnięcie, czy ten sam ciąg jest arytmetyczny i geometryczny, tylko 47%. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 7 pkt · ok. 15 min

1 (0–1 pkt) Ciąg (a_n) jest określony wzorami $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 4$ dla $n \geq 1$. Wyraz a_4 jest równy

A. -12

B. -4

C. 0

D. 2

2 (0–1 pkt) Dla ciągu z poprzedniego zadania oceń prawdziwość zdań.

1. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny. P F

2. Ciąg (a_n) jest malejący. P F

3 (0–1 pkt) Dany jest ciąg $a_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 81}{3^{n-1}}$. Wyraz a_5 jest równy

A. -1

B. 1

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

4 (0–1 pkt) Liczba 40 jest wyrazem ciągu $a_n = n^2 - 3n$ o numerze

A. 5

B. 8

C. 10

D. 40

5 (0–3 pkt) Ciąg jest określony wzorami $a_1 = 2$, $a_{n+1} = n \cdot a_n - 1$ dla $n \geq 1$. Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

✗ „ a_1, a_2, a_3 rosną, więc ciąg jest rosnący.”

Monotoniczność dotyczy wszystkich n . Trzeba policzyć $a_{n+1} - a_n$ ogólnie.

✗ „ $a_{n+1} = n \cdot a_n + 3$; dla a_3 mnożę przez 3.”

Dla $a_3 = a_{2+1}$ jest $n = 2$: mnożysz przez 2.

✗ „Równanie $a_n = 16$ ma rozwiązania 8 i -2 , więc dwa wyrazy.”

Numer wyrazu jest liczbą naturalną: $n = -2$ odpada.

✗ „Ciąg 2, 8, 2, 8, ... jest geometryczny, bo co drugi wyraz się powtarza.”

Iloraz musi być stały między kolejnymi wyrazami: 4 i $\frac{1}{4}$ to nie to samo.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jak wykazać, że ciąg nie jest arytmetyczny?

Wskazać trzy kolejne wyrazy o różnych różnicach.

- 2 Jaki jest a_3 , jeśli $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$?

1.

- 3 Czy ciąg $a_n = -3n + 1$ jest malejący?

Tak: $a_{n+1} - a_n = -3 < 0$.

- 4 Ile wynosi $(-1)^n$ dla n parzystych?

1.

CIĄGI

wzór ogólny: podstaw n

rekurencja: wyraz po wyrazie

numer wyrazu $\in \mathbb{N}_+$

TESTY

rosnący $\iff a_{n+1} - a_n > 0$ arytmetyczny $\iff a_{n+1} - a_n = \text{const}$ geometryczny $\iff \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{const}$

Broszura CKE „Wybrane wzory matematyczne” zawiera wzory ciągów arytmetycznego i geometrycznego, ale nie definicję monotoniczności ciągu.

Dalej: ciąg arytmetyczny (lekcja 6.2 Ciąg arytmetyczny) i geometryczny (6.3 Ciąg geometryczny).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $a_5 = \frac{-64}{32} = -2.$

2. $1. 50 - 3n > 0 \iff n < \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}.$

2. Wyrazy $a_1, \dots, a_{16}$: szesnaście.

Zadania • część 2

1. $5, 1, -3, -7, -11, -15: a_6 = -15.$

2. $a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 11.$

Zadania • część 3

1. $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = 2n + 2 > 0.$

2. 1. $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$: ujemne dla $n \leq 2$, dodatnie dla $n \geq 3$.

2. Nie: $a_1 = -5 > a_2 = -8 > a_3 = -9 < a_4 = -8.$

Zadania • część 4

1. $a_{n+1} - a_n = 7 - 2(n+1) - 7 + 2n = -2$: stała, nie zależy od n .

Zestawy A

1. a) 15 b) 3

2. a) 18 b) 2

Zestawy B

1. a) a_{13}

Zestawy C

1. a) -4 ; malejący

2. a) $G (q = 2)$

Zadania w stylu maturalnym

1. B. $a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = -4.$

2. FP.

1. Różnice $-1, -2, -4$: nie arytmetyczny.

2. $a_{n+1} - a_n = a_n - 4$; ponieważ $a_1 = 3 < 4$ i kolejne wyrazy maleją, zawsze $a_n < 4$, więc różnica ujemna: malejący.

3. B. $(-1)^6 \cdot \frac{81}{81} = 1.$

4. B. $n^2 - 3n - 40 = (n - 8)(n + 5) = 0, n = 8.$

5. 1. **Wyrazy.** $a_2 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$, $a_3 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $a_4 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $a_5 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$.

2. **Suma.** $2 + 1 + 1 + 2 + 7 = 13$.

1 pkt za a_2 , a_3 . 2 pkt za a_4 , a_5 . 3 pkt za sumę 13.

Matura z matematyki · Lekcja 6.1: Ciągi · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań i łatwości według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt6_1.py).