

Przekształcenia wykresów, złożenia, dowodzenie monotoniczności

Na poziomie rozszerzonym od funkcji oczekuje się dwóch rzeczy więcej niż na podstawowym. Pierwsza to swobodne przekształcanie wykresów: przesunięcia, symetrie i wartość bezwzględna, często po to, żeby policzyć rozwiązania równania z parametrem. Druga to dowód, że funkcja jest rosnąca albo malejąca, przeprowadzony z definicji, a nie odczytany z rysunku.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 50
min zadań

ZADANIA

7 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
V.R1, V.R2, V.R3

W TEJ LEKCJI

- 0 Jedna funkcja, trzy dowody
- 1 Przekształcenia wykresu
- 2 Liczba rozwiązań równania z parametrem
- 3 Złożenie funkcji
- 4 Dowód monotoniczności
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Jedna funkcja, trzy dowody

Funkcja $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ na przedziale $(-2, +\infty)$ jest rosnąca. Można to wykazać na trzy sposoby. Z definicji: dla $x_1 < x_2$ różnica $f(x_2) - f(x_1)$ jest dodatnia. Z wykresu: $f(x) = 2 - \frac{5}{x+2}$ to hiperbola $y = -\frac{5}{x}$ (rosnąca na $(0, +\infty)$) przesunięta o wektor $[-2, 2]$. Z pochodnej: $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$. Zasady oceniania CKE akceptują każdy z tych sposobów. Ta lekcja uczy dwóch pierwszych; pochodna jest w lekcji 13.3 Monotoniczność i ekstrema funkcji.

Przekształcenia wykresu

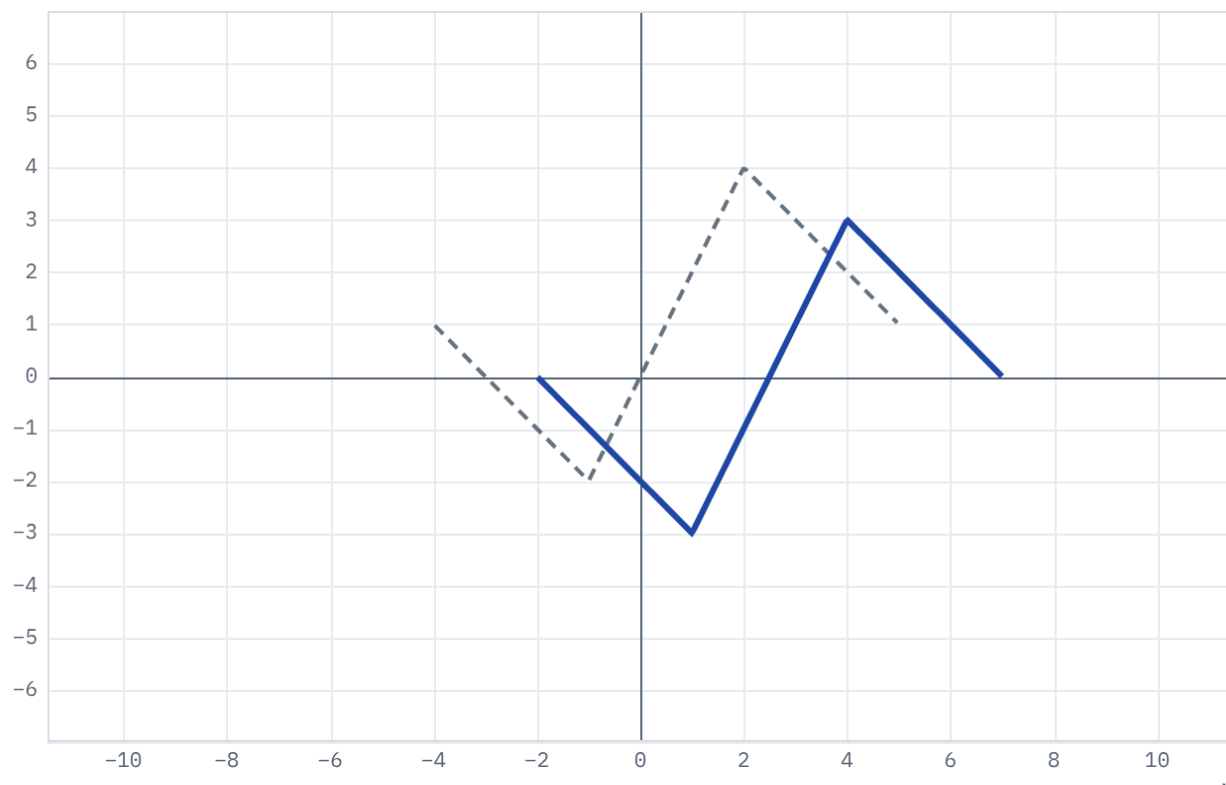
PIĘĆ PRZEKSZTAŁCEŃ

- $y = f(x - p) + q$: przesunięcie o wektor $[p, q]$, czyli $(x, y) \rightarrow (x + p, y + q)$.
- $y = -f(x)$: symetria względem osi Ox , $(x, y) \rightarrow (x, -y)$.
- $y = f(-x)$: symetria względem osi Oy , $(x, y) \rightarrow (-x, y)$.
- $y = |f(x)|$: część wykresu pod osią Ox odbijamy nad oś.
- $y = f(|x|)$: zostawiamy część dla $x \geq 0$ i dorysowujemy jej odbicie względem Oy .

Dziedzina i zbiór wartości przekształcają się razem z wykresem: przesunięcie o $[p, q]$ przesuwa dziedzinę o p , a zbiór wartości o q .

SYMULACJA 1

Wykres f (przerywany) i wykres po przekształceniu. Wybierz funkcję i przekształcenie. Dla przesunięcia ustaw p i q i sprawdź znak: $f(x - 2)$ to przesunięcie w prawo. Przy $|f(x)|$ i $f(|x|)$ porównaj, która część wykresu znika, a która się odbija.



— $y = f(x)$ — wykres po przekształceniu

f łamana przez $(-4, 1)$, $(-1, -2)$, $(2, 4)$, $(5, 1)$

nowy wykres $y = f(x - 2) - 1$

Każdy punkt (x, y) przechodzi na $(x + 2, y - 1)$: przesunięcie o wektor $[2, -1]$. Uwaga na znak: $f(x - p)$ przesuwa w prawo dla $p > 0$.

Stan na rysunku: f to łamana przez $(-4, 1)$, $(-1, -2)$, $(2, 4)$, $(5, 1)$; narysowano $y = f(x - 2) - 1$.

Przykład 1.1

Dziedzina i zbiór wartości po przekształceniu

Funkcja f ma dziedzinę $[-4, 5]$ i zbiór wartości $[-2, 4]$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $g(x) = -f(x + 3) + 1$.

- 1 $f(x + 3)$: przesunięcie o 3 w lewo, dziedzina $[-7, 2]$, wartości bez zmian.
- 2 $-f(x + 3)$: wartości $[-4, 2]$.
- 3 $+1$: wartości $[-3, 3]$.

Wynik: $D_g = [-7, 2]$, $ZW_g = [-3, 3]$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 5 min

- 1 Wykres $f(x) = x^2$ przesunięto o wektor $[-3, 2]$, a potem odbito symetrycznie względem osi Ox . Podaj wzór otrzymanej funkcji.
- 2 Funkcja f ma zbiór wartości $[-3, 2]$. Podaj zbiór wartości funkcji $|f(x)|$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

2 Liczba rozwiązań równania z parametrem

METODA GRAFICZNA

Liczba rozwiązań równania $g(x) = m$ to liczba punktów wspólnych wykresu g z prostą poziomą $y = m$. Narysuj g (zwykle przez przekształcenia), a potem przesuwaj prostą od dołu do góry i zapisz, dla jakich m liczba punktów się zmienia.

Przykład 2.1

Równanie

$$|x^2 - 4x| = m$$

W zależności od parametru m podaj liczbę rozwiązań równania $|x^2 - 4x| = m$.

- 1 Wykres $y = x^2 - 4x$: parabola z wierzchołkiem $(2, -4)$ i miejscami zerowymi 0 i 4 .
- 2 $|x^2 - 4x|$: część między 0 a 4 odbijamy nad oś; wierzchołek przechodzi na $(2, 4)$.
- 3 Prosta $y = m$: dla $m < 0$ brak punktów; $m = 0$ dwa ($x = 0, x = 4$); $0 < m < 4$ cztery; $m = 4$ trzy; $m > 4$ dwa.

Wynik: 0 rozwiązań dla $m < 0$; 2 dla $m = 0$ i $m > 4$; 4 dla $m \in (0, 4)$; 3 dla $m = 4$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 8 min

- 1 Dla jakich m równanie $|x + 1| - 2 = m$ ma dokładnie dwa rozwiązania?



- 2 Ile rozwiązań ma równanie $||x| - 3| = 1$?



 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Złożenie funkcji

ZŁOŻENIE

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Dziedzina: te x z dziedziny g , dla których $g(x)$ należy do dziedziny f . Złożenie nie jest przemienne: na ogół $f \circ g \neq g \circ f$.

Przykład 3.1

Wzór i dziedzina złożenia

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 9 - x^2$. Wyznacz wzór i dziedzinę $f \circ g$ oraz $g \circ f$.

- 1 $(f \circ g)(x) = \sqrt{9 - x^2}$; warunek $9 - x^2 \geq 0$, czyli $x \in [-3, 3]$.
- 2 $(g \circ f)(x) = 9 - (\sqrt{x})^2 = 9 - x$, ale tylko dla $x \geq 0$ (dziedzina f).

Wynik: $f \circ g: \sqrt{9 - x^2}$ na $[-3, 3]$; $g \circ f: 9 - x$ na $[0, +\infty)$. Uproszczony wzór $9 - x$ nie niesie informacji o dziedzinie: trzeba ją dopisać.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

1 zadanie · ok. 4 min

- 1 $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = 2x + 3$. Wyznacz $(f \circ g)(x)$ i jego dziedzinę.

▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀▀ trudniejsze

4

Dowód monotoniczności

DEFINICJA I SCHEMAT DOWODU

f jest rosnąca w zbiorze A , gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

1. Weź dowolne $x_1 < x_2$ z A (napisz to!).
2. Oblicz różnicę $f(x_2) - f(x_1)$ i doprowadź ją do postaci iloczynu albo ilorazu.
3. Ustal znak każdego czynnika z założeń i napisz wniosek.

Przykład 4.1

Funkcja wymierna

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ jest rosnąca w przedziale $(-2, +\infty)$.

- 1 Niech $-2 < x_1 < x_2$.
- 2
$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(2x_2 - 1)(x_1 + 2) - (2x_1 - 1)(x_2 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}.$$
- 3 Licznik: $2x_1x_2 + 4x_2 - x_1 - 2 - 2x_1x_2 - 4x_1 + x_2 + 2 = 5(x_2 - x_1)$.
- 4 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 + 2 > 0$, $x_2 + 2 > 0$, więc różnica jest dodatnia.

Wniosek: $f(x_2) > f(x_1)$, czyli f jest rosnąca w $(-2, +\infty)$.

Przykład 4.2

Wielomian i wzór na różnicę sześcianów

Wykaż, że $f(x) = x^3 + x$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$.

- 1 Niech $x_1 < x_2$. $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^3 - x_1^3) + (x_2 - x_1)$.
- 2 $= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 1)$.
- 3 $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 = (x_2 + \frac{x_1}{2})^2 + \frac{3}{4}x_1^2 \geq 0$, więc drugi czynnik jest $\geq 1 > 0$.

Wniosek: iloczyn dwóch liczb dodatnich, więc $f(x_2) > f(x_1)$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 10 min

1 Wykaż z definicji, że $f(x) = \frac{4}{x-3}$ jest malejąca w przedziale $(3, +\infty)$.

2 Wykaż, że $f(x) = x^2 - 6x$ jest rosnąca w przedziale $[3, +\infty)$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 31 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · PRZEKSZTAŁCENIA

ZESTAWY A

- 1 Podaj wzór funkcji po przekształceniu wykresu $f(x) = x^2 - 2x$.



- a) przesunięcie o $[1, 0]$ b) symetria względem Oy

... pozostałe przykłady na stronie treningu

- 2 $D_f = [-2, 6]$, $ZW_f = [-1, 3]$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości g .



- a) $g(x) = f(x - 2)$ b) $g(x) = |f(x)|$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · PARAMETR I ZŁOŻENIA

ZESTAWY B

- 1 Podaj liczbę rozwiązań.



- a) $|x^2 - 1| = \frac{1}{2}$ b) $x^2 - 4|x| = -4$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

- 2 Wyznacz wzór złożenia i jego dziedzinę.



- a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 3$;
 $f \circ g$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · RÓŻNICA $F(X_2) - F(X_1)$

- 1 Zapisz $f(x_2) - f(x_1)$ w postaci iloczynu albo ilorazu i podaj monotoniczność w podanym przedziale.

a) $f(x) = \frac{3}{x+1}, (-1, +\infty)$ b) $f(x) = 2x^3 + 5, \mathbb{R}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Pełny trening (31 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach rozszerzonych z lat 2024–2026 nie znaleźliśmy osobnego zadania z dowodem monotoniczności. Jest za to zadanie w informatorze CKE (3 punkty, funkcja wymierna) z pięcioma akceptowanymi sposobami: z definicji, łańcuchem nierówności, przez przesunięcie hiperboli, przez pochodną i przez porównanie ułamków. Przekształcenia wykresów i metoda graficzna wracają w zadaniach z parametrem. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

- 1 (0–3 pkt) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{5x}{x+2}$ dla każdego $x \in (-2, +\infty)$. Wykaż, że f jest funkcją rosnącą.

- 2 (0–3 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $|x^2 - 2x - 3| = m$ ma dokładnie trzy rozwiązania, oraz te, dla których ma dokładnie dwa rozwiązania.

- 3 (0–2 pkt) Funkcje f i g są określone wzorami $f(x) = x^2 - 1$ oraz $g(x) = \sqrt{x-2}$. Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji $h = f \circ g$ oraz rozwiąż równanie $h(x) = 4$.

- 4 (0–3 pkt) Wykaż, że funkcja $f(x) = x^3 - 3x$ jest malejąca w przedziale $[-1, 1]$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „ $f(x + 3)$ to przesunięcie w prawo.”

$f(x + 3) = f(x - (-3))$: wektor $[-3, 0]$, czyli w lewo.

× „ $|f(x)|$ i $f(|x|)$ to to samo.”

Pierwsze odbija części pod osią Ox do góry. Drugie zastępuje lewą połowę wykresu odbiciem prawej.

× „Sprawdziłem $f(0) < f(1) < f(2)$, więc funkcja jest rosnąca.”

To przykład, a nie dowód. Dowód działa dla dowolnych $x_1 < x_2$ z przedziału.

× „ $g \circ f$ ma wzór $9 - x$, więc dziedzina to $\mathbb{R}$.”

Dziedzina złożenia jest ograniczona dziedziną funkcji wewnętrznej; uproszczenie wzoru jej nie zmienia.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 O jaki wektor przesunięto $y = f(x)$, żeby otrzymać $y = f(x + 1) - 4$?

$[-1, -4]$.

2 Jaki jest zbiór wartości $|f|$, jeśli $ZW_f = [-5, 1]$?

$[0, 5]$.

3 Od czego zaczyna się dowód monotoniczności z definicji?

Od napisania „niech $x_1 < x_2$ należą do przedziału”.

4 Czy $f \circ g = g \circ f$ dla $f(x) = x + 1$ i $g(x) = 2x$?

Nie: $2x + 1 \neq 2x + 2$.

PRZEKSZTAŁCENIA $f(x - p) + q$: wektor $[p, q]$ $-f(x)$: Ox , $f(-x)$: Oy $|f(x)|$: dół do góry, $f(|x|)$: prawa strona w lewo**MONOTONICZNOŚĆ** $x_1 < x_2$, znak $f(x_2) - f(x_1)$ $\frac{a}{x-p}$: znak $-a(x_2 - x_1)$ w liczniku

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są przekształcenia punktu: przesunięcie o wektor i symetrie względem osi i punktu. Reguł dla wykresów $f(x - p) + q$, $|f(x)|$, $f(|x|)$ ani definicji monotoniczności broszura nie podaje.

Dalej: ciągi (lekcja 6.1 Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność), a pochodna jako trzeci sposób dowodu monotoniczności w lekcji 13.3 Monotoniczność i ekstrema funkcji.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Po przesunięciu $(x + 3)^2 + 2$.
2. Po symetrii $-(x + 3)^2 - 2$.
- Wartości ujemne $[-3, 0)$ przechodzą na $(0, 3]$, a $[0, 2]$ zostaje. Razem $[0, 3]$.

Zadania • część 2

1. Wykres: litera V z wierzchołkiem $(-1, -2)$.
2. Dwa punkty wspólne dla $m > -2$.
1. $|x| - 3 = 1$ albo $|x| - 3 = -1$.
2. $|x| = 4$ albo $|x| = 2$.
3. Cztery rozwiązania: $\pm 2, \pm 4$.

Zadania • część 3

1. $f(2x + 3) = \frac{1}{2x + 2}$
2. $2x + 2 \neq 0$, więc $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Zadania • część 4

1. $3 < x_1 < x_2$.
2. $f(x_2) - f(x_1) = \frac{4(x_1 - 3) - 4(x_2 - 3)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)} = \frac{4(x_1 - x_2)}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)}$.
3. Licznik ujemny, mianownik dodatni: różnica ujemna, f malejąca.
1. $3 \leq x_1 < x_2$.
2. $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^2 - x_1^2) - 6(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 6)$.
3. $x_2 - x_1 > 0$; $x_1 + x_2 > 6$, bo $x_1 \geq 3$ i $x_2 > 3$. Iloczyn dodatni.

Zestawy A

- a) $(x - 1)^2 - 2(x - 1) = x^2 - 4x + 3$ b) $x^2 + 2x$
- a) $[0, 8]$; $[-1, 3]$ b) $[-2, 6]$; $[0, 3]$

Zestawy B

- a) 4 b) 2
- a) $(x - 3)^2$; $\mathbb{R}$

Zestawy C

- a) $\frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$; malejąca b) $2(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$; rosnąca

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. **Założenie.** $-2 < x_1 < x_2$.

2. **Różnica.** $f(x_2) - f(x_1) = \frac{5x_2(x_1 + 2) - 5x_1(x_2 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{10(x_2 - x_1)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$.

3. **Znak.** licznik dodatni, oba czynniki mianownika dodatnie, więc różnica dodatnia.

1 pkt za założenie $x_1 < x_2$ w dziedzinie i obliczenie różnicy (ALBO za pochodną, ALBO za postać $5 - \frac{10}{x+2}$). **2 pkt** za ustalenie znaku różnicy (ALBO znaku pochodnej, ALBO za opis przesunięcia hiperboli $y = -\frac{10}{x}$ o wektor $[-2, 5]$). **3 pkt** za pełny dowód z wnioskiem.

2. 1. **Parabola.** $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, wierzchołek $(1, -4)$.

2. **Odbicie.** $|x^2 - 2x - 3|$ ma „garb” z wierzchołkiem $(1, 4)$ między -1 a 3 .

3. **Odpowiedź.** trzy rozwiązania dla $m = 4$; dwa dla $m = 0$ i dla $m > 4$.

1 pkt za poprawny szkic wykresu $|x^2 - 2x - 3|$ z wierzchołkiem $(1, 4)$. **2 pkt** za $m = 4$. **3 pkt** za $m \in \{0\} \cup (4, +\infty)$.

3. 1. **Wzór.** $h(x) = (\sqrt{x-2})^2 - 1 = x - 3$ dla $x \geq 2$.

2. **Równanie.** $x - 3 = 4$, $x = 7 \geq 2$ ✓.

1 pkt za wzór $x - 3$ z dziedziną $[2, +\infty)$. **2 pkt** za $x = 7$.

4. 1. **Założenie.** $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$.

2. **Różnica.** $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3)$.

3. **Szacowanie.** $x_1^2 \leq 1$, $x_2^2 \leq 1$, $x_1x_2 \leq 1$, a równość we wszystkich trzech naraz wymagałaby $x_1 = x_2 = \pm 1$, co przeczy $x_1 < x_2$. Zatem $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 < 3$.

4. **Znak.** pierwszy czynnik dodatni, drugi ujemny: różnica ujemna.

1 pkt za rozkład różnicy na $(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3)$ (ALBO za pochodną $3x^2 - 3$). **2 pkt** za oszacowanie drugiego czynnika (ALBO $f'(x) \leq 0$ na $[-1, 1]$ z równością tylko na końcach). **3 pkt** za pełny dowód.

Matura z matematyki · Lekcja 5.7: Przekształcenia wykresów, złożenia, dowodzenie monotoniczności · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE), zadanie 7 i jego zasady oceniania. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt5_7.py).