

Trening: przekształcenia, złożenia, monotoniczność

Zestawy krótkich przykładów do lekcji 5.7 Przekształcenia wykresów, złożenia, dowodzenie monotoniczności: wzory po przekształceniach, dziedzina i zbiór wartości, liczba rozwiązań z parametrem, złożenia funkcji i różnice $f(x_2) - f(x_1)$ w dowodach monotoniczności. Na końcu zadania w stylu arkusza rozszerzonego.

POZIOM A · PRZEKSZTAŁCENIA

ZESTAWY A

2 zestawy

1 Podaj wzór funkcji po przekształceniu wykresu $f(x) = x^2 - 2x$.



- a) przesunięcie o $[1, 0]$ b) przesunięcie o $[0, -3]$ c) symetria względem Ox
d) symetria względem Oy e) przesunięcie o $[-2, 1]$

2 $D_f = [-2, 6]$, $ZW_f = [-1, 3]$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości g .



- a) $g(x) = f(x - 2)$ b) $g(x) = f(x) + 4$ c) $g(x) = -f(x)$
d) $g(x) = f(-x)$ e) $g(x) = |f(x)|$ f) $g(x) = 2 - f(x + 1)$

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ trudniejsze

POZIOM B · PARAMETR I ZŁOŻENIA

ZESTAWY B

2 zestawy

1 Podaj liczbę rozwiązań.



a) $|x^2 - 1| = \frac{1}{2}$

b) $|x^2 - 1| = 1$

c) $|x^2 - 1| = 2$

d) $|x - 2| + 1 = m$ dla
 $m = 1$

e) $x^2 - 4|x| = -4$

f) $x^2 - 4|x| = -3$

2 Wyznacz wzór złożenia i jego dziedzinę.



a) $f(x) = x^2, g(x) = x - 3;$ b) to samo; $g \circ f$
 $f \circ g$

c) $f(x) = \sqrt{x},$
 $g(x) = 2x - 6; f \circ g$

d) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2 - 4;$ e) $f(x) = \frac{1}{x}; f \circ f$
 $f \circ g$

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ trudniejsze

POZIOM C · RÓŻNICA $F(X_2) - F(X_1)$

ZESTAWY C

1 zestaw

1 Zapisz $f(x_2) - f(x_1)$ w postaci iloczynu albo ilorazu i podaj monotoniczność w podanym przedziale.



a) $f(x) = \frac{3}{x+1}, (-1, +\infty)$

b) $f(x) = \frac{x}{x-2}, (2, +\infty)$

c) $f(x) = x^2 + 4x,$
 $[-2, +\infty)$

d) $f(x) = 2x^3 + 5, \mathbb{R}$

e) $f(x) = -x^2 + 6x,$
 $(-\infty, 3]$

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ trudniejsze

ZADANIA MATURALNE

Formy zadań jak w arkuszu rozszerzonym CKE. W dowodach monotoniczności każdy z akceptowanych sposobów (definicja, przesunięcie wykresu, pochodna) ma tę samą skalę punktów.

ZADANIA W STYLU ARKUSZA

4 zadania · 10 pkt

1 (0-3 pkt) Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ jest malejąca w przedziale $(-1, +\infty)$.



2 (0-2 pkt) Funkcja f ma dziedzinę $[-3, 4]$ i zbiór wartości $[-5, 2]$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $g(x) = |f(x - 1)|$.

3 (0-3 pkt) Wyznacz wszystkie wartości m , dla których równanie $x^2 - 6|x| + 5 = m$ ma dokładnie cztery rozwiązania.

4 (0-2 pkt) Dane są $f(x) = 2x - 1$ i $g(x) = x^2 + 1$. Rozwiąż równanie $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze



Odpowiedzi

Zestawy A

1. a) $(x-1)^2 - 2(x-1) = x^2 - 4x + 3$ b) $x^2 - 2x - 3$ c) $-x^2 + 2x$ d) $x^2 + 2x$ e) $x^2 + 2x + 1$
2. a) $[0, 8]; [-1, 3]$ b) $[-2, 6]; [3, 7]$ c) $[-2, 6]; [-3, 1]$ d) $[-6, 2]; [-1, 3]$ e) $[-2, 6]; [0, 3]$ f) $[-3, 5]; [-1, 3]$

Zestawy B

1. a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 2 f) 4
2. a) $(x-3)^2; \mathbb{R}$ b) $x^2 - 3; \mathbb{R}$ c) $\sqrt{2x-6}; [3, +\infty)$ d) $\frac{1}{x^2-4}; \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ e) $x; \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Zestawy C

1. a) $\frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$; malejąca b) $\frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$; malejąca c) $(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 4)$; rosnąca d) $2(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$; rosnąca e) $(x_2 - x_1)(6 - x_1 - x_2)$; rosnąca

Zadania w stylu arkusza

1. 1. Postać. $f(x) = 1 + \frac{3}{x+1}$.
2. Różnica. dla $-1 < x_1 < x_2$: $f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{x_2+1} - \frac{3}{x_1+1} = \frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$.
3. Znak. licznik ujemny, mianownik dodatni.
- 1 pkt za założenie i różnicę (ALBO postać $1 + \frac{3}{x+1}$, ALBO pochodną). 2 pkt za znak różnicy (ALBO opis przesunięcia $y = \frac{3}{x}$ o $[-1, 1]$, ALBO $f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} < 0$). 3 pkt za pełny dowód.
2. 1. Dziedzina. $x-1 \in [-3, 4]$, czyli $x \in [-2, 5]$.
2. Wartości. $||[-5, 2]|| = [0, 5]$.
- 1 pkt za dziedzinę. 2 pkt za oba zbiory.
3. 1. Wykres dla $x \geq 0$. $x^2 - 6x + 5$, wierzchołek $(3, -4)$, $f(0) = 5$.
2. Odbicie. $f(|x|)$: „W” z minimami -4 w $x = \pm 3$ i lokalnym maksimum 5 w $x = 0$.
3. Cztery punkty. prosta $y = m$ przecina „W” w czterech punktach dla $-4 < m < 5$.
- 1 pkt za wykres dla $x \geq 0$. 2 pkt za poprawny wykres $y = x^2 - 6|x| + 5$. 3 pkt za $m \in (-4, 5)$.
4. 1. Wzory. $f(g(x)) = 2x^2 + 1$, $g(f(x)) = (2x-1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$.
2. Równanie. $2x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$, czyli $2x^2 - 4x + 1 = 0$, $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 1 pkt za oba wzory złożień. 2 pkt za rozwiązania $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Matura z matematyki · Trening do lekcji 5.7 · Zadania autorskie, formy i punktacja wzorowane na informatorze i zasadach oceniania CKE dla poziomu rozszerzonego. Wszystkie odpowiedzi sprawdzone (tools/verify/mt5_7.py).