

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Funkcja wykładnicza opisuje wszystko, co w równych odstępach czasu zmienia się o ten sam procent: lokatę, populację, rozpad promieniotwórczy, stygnięcie. Na maturze najczęściej trzeba z dwóch pomiarów odczytać czynnik wzrostu i dobrze go zinterpretować. Logarytm służy wtedy do znalezienia czasu, po którym wartość osiągnie zadany poziom.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy: V.14

W TEJ LEKCJI

- 0 Dwa pomiary, jeden procent
- 1 Funkcje
 a^x i
 $\log_a x$
- 2 Model
 $N(t) =$
 $N_0 \cdot$
 k^t
- 3 Parametry z pomiarów
- 4 Ile czasu? Logarytm i połowienie
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Dwa pomiary, jeden procent

Na początku doświadczenia w hodowli było 5000 bakterii, po dwóch godzinach 7200. Liczba bakterii co godzinę rośnie o ten sam procent. O jaki? Po godzinie jest $5000k$, po dwóch $5000k^2 = 7200$, więc $k^2 = 1,44$ i $k = 1,2$. Co godzinę liczba bakterii mnoży się przez 1,2, czyli rośnie o 20%. Odpowiedź „o 1,2%” albo „o 120%” to dwa typowe błędy interpretacji.

Funkcje a^x i $\log_a x$

WŁASNOŚCI ($a > 0$, $a \neq 1$)

- $f(x) = a^x$: dziedzina $\mathbb{R}$, zbiór wartości $(0, +\infty)$, $f(0) = 1$. Rosnąca dla $a > 1$, malejąca dla $0 < a < 1$. Nie ma miejsc zerowych.
- $g(x) = \log_a x$: dziedzina $(0, +\infty)$, zbiór wartości $\mathbb{R}$, $g(1) = 0$, $g(a) = 1$. Rosnąca dla $a > 1$, malejąca dla $0 < a < 1$.
- $\log_a x = y \iff a^y = x$: wykresy są symetryczne względem prostej $y = x$.

Przykład 1.1

Wartości i monotoniczność

Dana jest funkcja $f(x) = \log_4 x$. Oblicz $f(64)$ i $f(\frac{1}{2})$ oraz ustal, czy f jest rosnąca.

- 1 $4^3 = 64$, więc $f(64) = 3$.
- 2 $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$, więc $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.
- 3 Podstawa $4 > 1$, więc f jest rosnąca.

Wynik: $f(64) = 3$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, funkcja rosnąca.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Wykres funkcji $f(x) = a^x$ przechodzi przez punkt $(2, \frac{1}{9})$. Wyznacz a i ustal monotoniczność.

- 2 Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = 2^x - 3$.

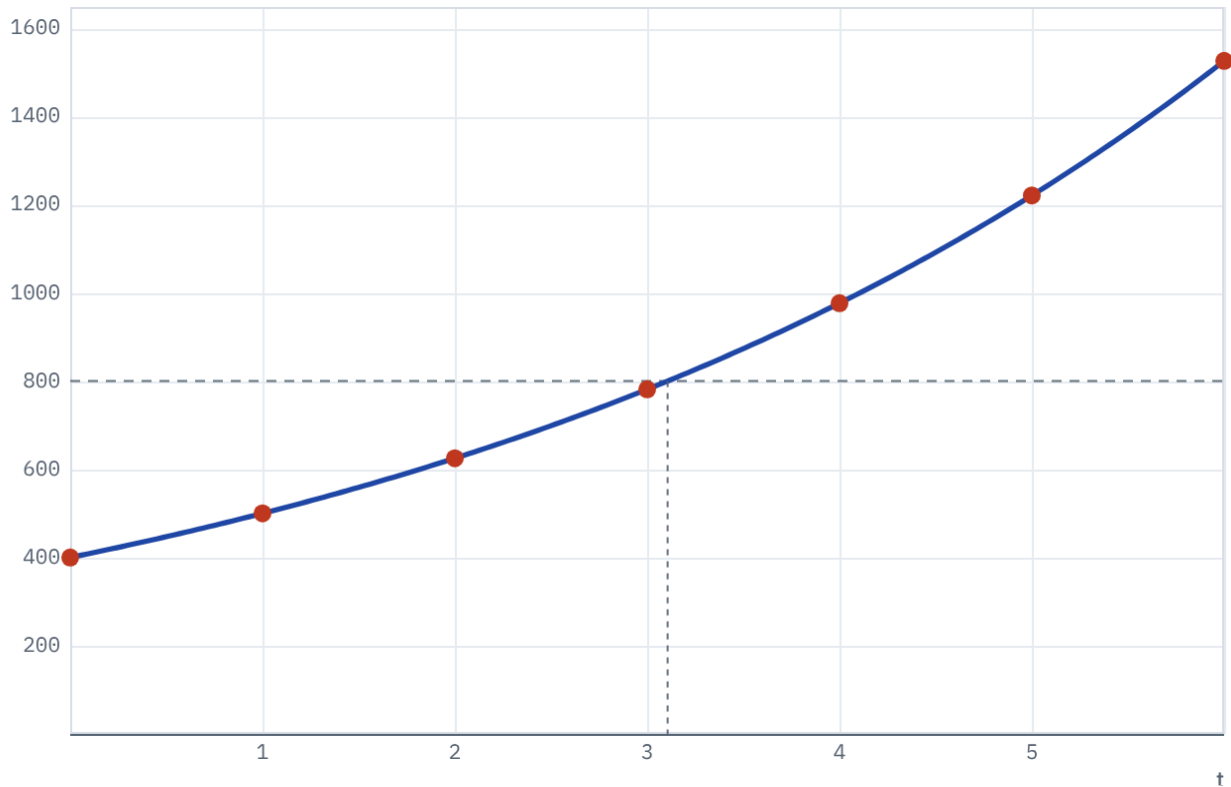
2 Model $N(t) = N_0 \cdot k^t$

WZROST I SPADEK PROCENTOWY

Jeśli wielkość w każdej jednostce czasu zmienia się o $p\%$, to $N(t) = N_0 \cdot k^t$, gdzie $N_0 = N(0)$ i $k = 1 + \frac{p}{100}$ (dla spadku p jest ujemne, $0 < k < 1$).

Czas połowienia T (rozpad): $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$. Po T zostaje połowa, po $2T$ ćwiartka, po nT część $\frac{1}{2^n}$.

SYMULACJA 1 Model $N(t) = N_0 \cdot k^t$. Ustaw zmianę procentową na jednostkę czasu. Punkty pokazują wartości co jedną jednostkę: każdy powstaje z poprzedniego przez pomnożenie przez k , czyli tworzą ciąg geometryczny. Przerywane linie pokazują, po jakim czasie wartość się podwaja (albo połowi).



— $N(t) = N_0 \cdot k^t$ ● wartości co 1 jednostkę czasu — $N_0/2$ albo $2N_0$

$k = 1 + p/100$ 1,25

$N(0); N(1); N(2); N(3)$ 400; 500; 625; 781,3; ...

iloraz kolejnych 1,25

czas podwojenia $\approx 3,11$

W każdej jednostce czasu N mnoży się przez $k = 1,25$, czyli rośnie o 25% (a nie o 125%). Wartości w równych odstępach czasu tworzą ciąg geometryczny o ilorazie k , więc środkowa jest średnią geometryczną sąsiednich: $N(1)^2 = N(0) \cdot N(2)$. Podwojenie następuje po $t = \log_k(2) \approx 3,11$.

Stan na rysunku: $N_0 = 400$, $k = 1,25$; $N(0..3) = 400; 500; 625; 781,3$.

Przykład 2.1

Spadek o stały procent

Wartość samochodu co roku spada o 15%. Dziś wynosi 80 000 zł. Ile będzie warty za 3 lata?

- 1 $k = 1 - 0,15 = 0,85$.
- 2 $N(3) = 80\,000 \cdot 0,85^3 = 80\,000 \cdot 0,614125 = 49\,130$.

Wynik: 49 130 zł. Spadek łączny to ok. 38,6%, a nie 45%: procent liczy się za każdym razem od nowej, mniejszej wartości.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 5 min

- 1 Populacja liczy 2000 osobników i co roku rośnie o 10%. Zapisz wzór $N(t)$ i oblicz $N(2)$.

- 2 Izotop ma czas połowienia 6 godzin. Jaka część początkowej masy zostanie po dobie?

 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Parametry z pomiarów

DWA POMIARY WYSTARCZĄ

Z $N(t_1)$ i $N(t_2)$: $\frac{N(t_2)}{N(t_1)} = k^{t_2-t_1}$. Potem $N_0 = \frac{N(t_1)}{k^{t_1}}$.

Skrót: wartości w równych odstępach czasu tworzą ciąg geometryczny, więc

$$N(t)^2 = N(t-h) \cdot N(t+h).$$

Przykład 3.1

Wartość pośrodku bez liczenia

k

Wielkość zmienia się według $Q(t) = Q_0 \cdot k^t$. Wiadomo, że $Q(3) = 4$ i $Q(5) = 36$. Oblicz $Q(4)$, k i Q_0 .

1 $Q(4)^2 = Q(3) \cdot Q(5) = 144$, a $Q(4) > 0$, więc $Q(4) = 12$.

2 $k = \frac{Q(4)}{Q(3)} = 3$.

3 $Q_0 = \frac{Q(3)}{k^3} = \frac{4}{27}$.

Wynik: $Q(4) = 12$, $k = 3$, $Q_0 = \frac{4}{27}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 6 min

1 Kapitał na lokacie po roku wynosił 10 400 zł, a po dwóch latach 10 816 zł (kapitalizacja roczna). Oblicz oprocentowanie i kapitał początkowy.

2 Różnica temperatur herbaty i otoczenia maleje wykładniczo. Po 10 min różnica wynosiła 48°C , po 20 min 36°C . Jaka była na początku?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

4 Ile czasu? Logarytm i połowienie

⚡ CZAS Z RÓWNANIA WYKŁADNICZEGO

$$N_0 \cdot k^t = N_1 \iff k^t = \frac{N_1}{N_0} \iff t = \log_k \frac{N_1}{N_0}.$$

Gdy iloraz jest potęgą k (np. $\frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$), wynik odczytujesz bez kalkulatora. W pozostałych przypadkach zostaw logarytm albo oszacuj go między kolejnymi potęgami.

Przykład 4.1

Ile okresów połowienia?

Czas połowienia jodu-131 wynosi ok. 8 dni. Po ilu dniach zostanie $\frac{1}{32}$ początkowej ilości?

- 1 $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/8} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$.
- 2 $\frac{t}{8} = 5$, więc $t = 40$.

Wynik: po ok. 40 dniach.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 6 min

- 1 Po ilu pełnych latach wartość lokaty $N(t) = 1000 \cdot 2^{t/9}$ przekroczy 8000 zł?
■■■
- 2 Wskaż dwie kolejne liczby całkowite, między którymi leży rozwiązanie równania $3^t = 50$.
■■■

■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 37 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WŁASNOŚCI FUNKCJI

ZESTAWY A

- 1 Oblicz wartość funkcji.
■■■
a) $f(x) = 3^x$, $f(-2)$ b) $g(x) = \log_2 x$, $g\left(\frac{1}{8}\right)$
... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Podaj monotoniczność i zbiór wartości (albo dziedzinę dla logarytmu).



a) $y = 0,7^x$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · MODEL $N_0 K^T$

ZESTAWY B

1 Podaj k i zinterpretuj.



a) wzrost o 6% rocznie b) $k = 1,35$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Oblicz.



a) $N(t) = 500 \cdot 1,2^t$, $N(2)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · POMIARY I CZAS

ZESTAWY C

1 Model $N(t) = N_0 k^t$, $k > 0$. Oblicz brakujące wielkości.



a) $N(0) = 200$, $N(2) = 288$; b) $N(3) = 16$, $N(5) = 4$;
 k $N(4)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Wyznacz t (albo dwie kolejne liczby całkowite, między którymi leży).



a) $2^t = 64$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (37 przykładów i zadań) →

W arkuszach z lat 2024–2026 i w informatorze są tu cztery typy: P/F z wartością i monotonicznością logarytmu, wybór wykresu zaniku wykładniczego, zadanie otwarte z czasem połowienia oraz wyznaczanie czynnika wzrostu z dwóch pomiarów (na poziomie rozszerzonym). To ostatnie, w maju 2025, okazało się najłatwiejszym zadaniem arkusza rozszerzonego: według sprawozdania CKE zdający uzyskali średnio 77% punktów. Sprawozdanie zwraca uwagę, że część osób poprawnie obliczyła $k = 1,25$, ale błędnie podała wzrost o 125%. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 8 pkt · ok. 20 min

- 1 (0–1 pkt) Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Oceń prawdziwość zdań.

1. $f(9) = -2$. P F
 2. Funkcja f jest rosnąca. P F
- 2 (0–1 pkt) Masa substancji maleje według $m(t) = 240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5}$, t w dniach. Po 15 dniach masa jest równa

A. 80 B. 30 C. 16 D. 7,5
- 3 (0–3 pkt) Czas połowienia pewnego izotopu wynosi 12 lat. Oblicz, po ilu latach z próbki o masie 400 mg zostanie 25 mg. Zapisz obliczenia.
- 4 (0–3 pkt) Liczba użytkowników aplikacji rośnie co miesiąc o ten sam procent. Po 2 miesiącach od startu było 7200 użytkowników, a po 4 miesiącach 10 368. Oblicz, o ile procent co miesiąc rośnie liczba użytkowników, oraz ilu ich było na starcie.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Najczęstsze błędy

✗ „ $k = 1,25$, więc wzrost o 125%.”

$k = 1 + \frac{p}{100}$: wzrost o 25%. O 125% byłoby przy $k = 2,25$.

✗ „Trzy lata po 15% to 45% spadku.”

Spadki się mnożą: $0,85^3 \approx 0,614$, czyli ok. 38,6% spadku.

× „Po trzech okresach połowienia zostaje $\frac{1}{3}$.”

Zostaje $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

× „ $\log_{\frac{1}{2}} x$ jest rosnąca, bo logarytm rośnie.”

Dla podstawy mniejszej od 1 logarytm (i funkcja wykładnicza) są malejące.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Jaki jest zbiór wartości funkcji $y = 5^x$?

$(0, +\infty)$.

2 Wartość maleje co roku o 8%. Jakie jest k ?

$k = 0,92$.

3 $N(2) = 9$ i $N(4) = 25$ w modelu wykładniczym. Ile wynosi $N(3)$?

$\sqrt{9 \cdot 25} = 15$.

4 Po ilu okresach połowienia zostaje $\frac{1}{64}$?

Po sześciu.

FUNKCJE

$$a^x: ZW = (0, +\infty), \log_a x: D = (0, +\infty)$$

$a > 1$ rosnące, $0 < a < 1$ malejące

MODEL

$$N(t) = N_0 k^t, \quad k = 1 + \frac{p}{100}$$

$$N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}, \quad N(t)^2 = N(t-h)N(t+h)$$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są własności potęg i logarytmów oraz wzór na procent składany. Modelu z czasem połowienia ani wzoru $k = 1 + \frac{p}{100}$ w postaci ogólnej broszura nie zawiera.

Dalej: dla zakresu rozszerzonego przekształcenia wykresów i dowody monotoniczności (lekcja 5.7 Przekształcenia wykresów, złożenia, dowodzenie monotoniczności); ciągi geometryczne, które stoją za modelem wykładniczym, w lekcji 6.3 Ciąg geometryczny.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $a^2 = \frac{1}{9}$, $a > 0$, więc $a = \frac{1}{3}$.
2. $0 < a < 1$: malejąca.
2. $2^x > 0$, więc $2^x - 3 > -3$: zbiór wartości $(-3, +\infty)$.

Zadania • część 2

1. $N(t) = 2000 \cdot 1,1^t$
2. $N(2) = 2000 \cdot 1,21 = 2420$.
1. $24 : 6 = 4$ okresy połowienia.
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Zadania • część 3

1. $k = \frac{10\,816}{10\,400} = 1,04$: oprocentowanie 4%.
2. $N_0 = 10\,400 : 1,04 = 10\,000$ zł.
1. Co 10 min mnożnik $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$.
2. Na początku $48 : \frac{3}{4} = 64^\circ\text{C}$.

Zadania • część 4

1. $2^{t/9} > 8 = 2^3$
2. $\frac{t}{9} > 3$, więc $t > 27$: po 28 pełnych latach (dokładnie po 27 wartość wynosi 8000).
1. $3^3 = 27 < 50 < 81 = 3^4$
2. $t = \log_3 50 \in (3, 4)$.

Zestawy A

1. a) $\frac{1}{9}$ b) -3
2. a) malejąca; $(0, +\infty)$

Zestawy B

1. a) $k = 1,06$ b) wzrost o 35%
2. a) 720

Zestawy C

1. a) 1,2 b) 8
2. a) 6

Zadania w stylu maturalnym

1. PF.

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9 \checkmark$.

2. Podstawa $\frac{1}{3} < 1$: funkcja malejąca.

2. B.

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

2. $240 : 8 = 30$.

3. A to błąd „ $15 : 5 = 3$, więc dzielę przez 3”.

3. 1. **Model.** $m(t) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/12}$.

2. **Równanie.** $400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/12} = 25$, czyli $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/12} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

3. **Wynik.** $\frac{t}{12} = 4$, $t = 48$ lat.

1 pkt za zapis modelu albo równania. **2 pkt** za $\frac{t}{12} = 4$ (albo za stwierdzenie, że potrzeba czterech okresów połowienia). **3 pkt** za $t = 48$ lat.

Uwaga: akceptowane jest też rozwiązanie przez kolejne połowienia: $400 \rightarrow 200 \rightarrow 100 \rightarrow 50 \rightarrow 25$, czyli $4 \cdot 12 = 48$.

4. 1. **Iloraz.** $k^2 = \frac{10\,368}{7200} = 1,44$, $k > 0$, więc $k = 1,2$.

2. **Interpretacja.** wzrost o 20% miesięcznie.

3. **Start.** $N_0 = \frac{7200}{1,2^2} = \frac{7200}{1,44} = 5000$.

1 pkt za równanie $7200k^2 = 10\,368$. **2 pkt** za $k = 1,2$ i odpowiedź 20%. **3 pkt** za 5000 użytkowników na starcie.

Uwaga: odpowiedź „o 120%” przy poprawnym k to błąd interpretacji, a nie błąd rachunkowy.

Matura z matematyki · Lekcja 5.6: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna · Na podstawie: Informatory o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości i uwagi według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt5_6.py).