

Proporcjonalność odwrotna

Dwie wielkości są odwrotnie proporcjonalne, gdy ich iloczyn jest stały: dwa razy więcej pracowników, dwa razy krócej. Na maturze podstawowej to zwykle jedno zadanie zamknięte z tabelą albo kontekstem. Na rozszerzonej funkcja $\frac{a}{x-p} + q$ wraca w zadaniach o punktach o współrzędnych całkowitych i w dowodach monotoniczności.

CZAS

ok. 25 min
czytania + ok. 35
min zadań

ZADANIA

7 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
V.13; sekcja 4 dla
zakresu
rozszerzonego

W TEJ LEKCJI

- 0 Więcej koparek, mniej dni
- 1 Stały iloczyn
- 2 Wykres

$$y = \frac{a}{x}$$

- 3 Zadania z treścią
- 4 R: przesunięta hiperbola i punkty kratowe
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Więcej koparek, mniej dni

Cztery koparki wykopują rów w 15 dni. Ile dni zajmie to sześciu koparkom pracującym tak samo? Praca to „koparko-dni”: $4 \cdot 15 = 60$. Sześć koparek potrzebuje $60 : 6 = 10$ dni. Odpowiedź „22,5 dnia” z proporcji $\frac{4}{15} = \frac{6}{x}$ jest typowym błędem: więcej koparek nie może oznaczać dłuższej pracy. Pytanie kontrolne zawsze brzmi: czy stały jest iloraz, czy iloczyn?

Stały iloczyn

PROPORCJONALNOŚĆ ODWROTNA

Wielkości x i y (różne od zera) są odwrotnie proporcjonalne, gdy $x \cdot y = a$ dla stałej $a \neq 0$, czyli $y = \frac{a}{x}$. Liczba a to współczynnik proporcjonalności.

Test w tabeli: wszystkie iloczyny $x \cdot y$ są równe. Dla proporcjonalności prostej równe są ilorazy $\frac{y}{x}$.

Przykład 1.1

Brakująca wartość w tabeli

Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Dla $x = 20$ jest $y = 15$. Oblicz y dla $x = 25$.

1 $a = 20 \cdot 15 = 300$.

2 $y = \frac{300}{25} = 12$.

Wynik: $y = 12$. Z proporcji prostej wyszłoby 18,75: rośnie x , więc w proporcjonalności odwrotnej y musi zmaleć.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

1 Czy wielkości z tabeli są odwrotnie proporcjonalne? x : 2, 3, 8; y : 12, 8, 3.

2 x i y są odwrotnie proporcjonalne, $y = 6$ dla $x = \frac{1}{2}$. Podaj wzór $y(x)$ i oblicz $y(4)$.

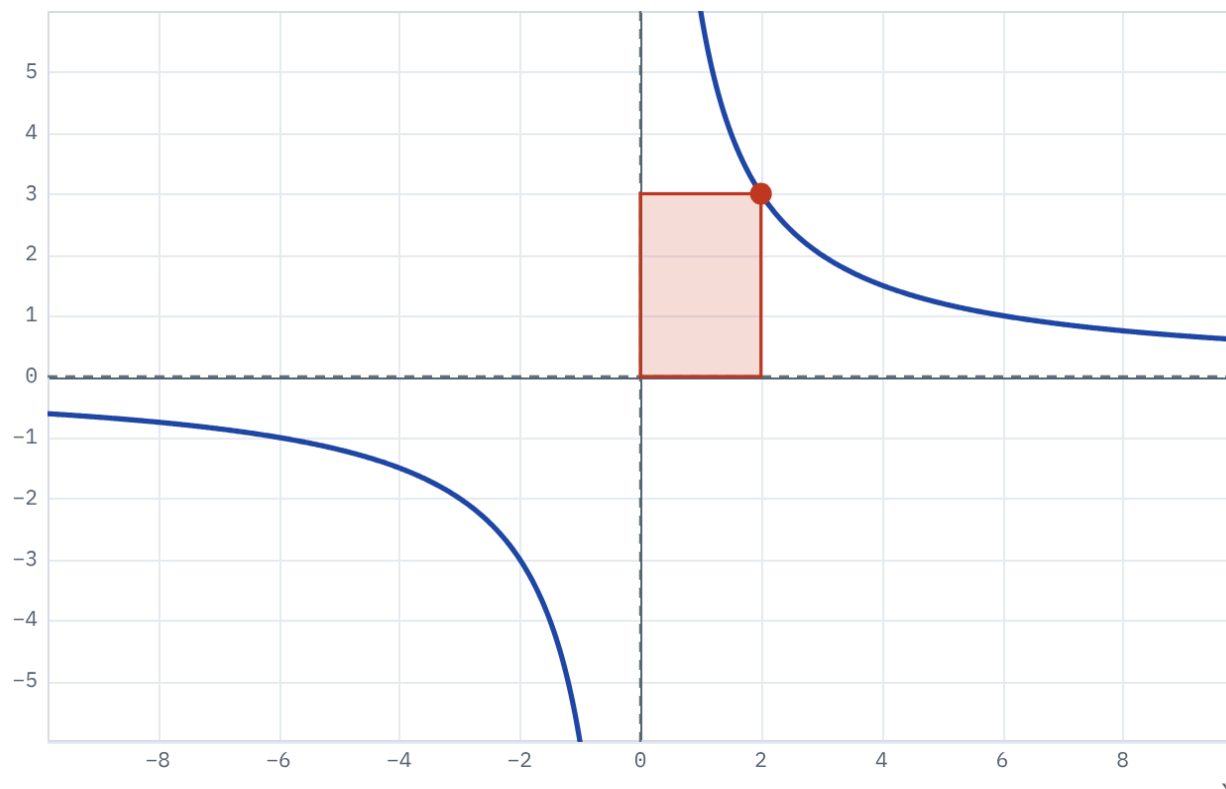
▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

 HIPERBOLA

- Dziedzina i zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Asymptoty: osie układu.
- $a > 0$: gałęzie w ćwiartkach I i III, funkcja malejąca w $(-\infty, 0)$ i osobno w $(0, +\infty)$.
- $a < 0$: gałęzie w ćwiartkach II i IV, funkcja rosnąca w każdym z tych przedziałów.
- Funkcja **nie jest** malejąca w całej dziedzinie: dla $a > 0$ mamy $-1 < 1$, ale $f(-1) < f(1)$.
- Punkt (x_0, y_0) leży na wykresie $\iff x_0 y_0 = a$.

SYMULACJA 1

Hiperbola $y = \frac{a}{x-p} + q$. Przy $p = q = 0$ to zwykle $y = \frac{a}{x}$. Przesuwaj punkt po wykresie: prostokąt od asymptot do punktu ma zawsze pole $|a|$. Potem zmień p i q (to część dla zakresu rozszerzonego): cały wykres razem z asymptotami przesuwają się o wektor $[p, q]$.



— $y = a/(x - p) + q$ — prostokąt o polu $|a|$ — asymptoty $x = p, y = q$

wzór $y = 6/(x)$

punkt $x = 2, y = 3$

$(x - p)(y - q) 2 \cdot 3 = 6$

dziedzina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

zbiór wartości $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dla $y = a/x$ iloczyn $x \cdot y$ jest stały i równy $a = 6$: ile razy rośnie x , tyle razy maleje y . Każdy prostokąt od osi do punktu wykresu ma to samo pole $|a|$. Dla $a > 0$ gałęzie leżą w ćwiartkach I i III (względem asymptot).

Stan na rysunku: $y = 6/(x)$; punkt $x = 2, y = 3$.

Przykład 2.1

Współczynnik z punktu

Punkt $P = (-3, 4)$ leży na wykresie $y = \frac{a}{x}$. Wyznacz a i sprawdź, czy punkt $Q = (6, -2)$ też na nim leży.

1 $a = (-3) \cdot 4 = -12.$

2 $6 \cdot (-2) = -12 \checkmark.$

Wynik: $a = -12$; Q leży na wykresie. Gałęzie są w ćwiartkach II i IV.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 4 min

1 Wykres $y = \frac{a}{x}$ przechodzi przez $(2, 5)$. Oblicz wartość funkcji dla $x = -4$.

2 Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ jest rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$ i $f(2) = -3$. Wyznacz a i rozwiąż nierówność $f(x) > -1$ dla $x > 0$.

■□□ podstawowe ■■□ średnie ■■■ trudniejsze

3 Zadania z treścią

Typowe pary odwrotnie proporcjonalne przy stałej trzeciej wielkości: prędkość i czas (stała droga), liczba pracowników i czas (stała praca), liczba osób i udział każdej osoby (stała kwota), długość i szerokość prostokąta (stałe pole).

Przykład 3.1

Prędkość i czas

Pociąg pokonuje trasę w 3 h, jadąc ze średnią prędkością 80 km/h. O ile procent musiałby zwiększyć prędkość, żeby przejechać tę trasę w 2,5 h?

1 Droga: $80 \cdot 3 = 240$ km. Nowa prędkość: $240 : 2,5 = 96$ km/h.

2 $\frac{96 - 80}{80} = 0,2$.

Wynik: o 20%. Czas skrócił się o $\frac{1}{6} \approx 16,7\%$, a prędkość wzrosła o 20%: przy proporcjonalności odwrotnej procenty nie są symetryczne.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

1 zadanie · ok. 3 min

- 1 Kwotę nagrody podzielono równo między 8 osób i każda dostała 450 zł. Ile dostałaby każda osoba, gdyby nagrodę podzielono między 12 osób?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

4 R: przesunięta hiperbola i punkty kratowe

FUNKCJA $y = \frac{a}{x-p} + q$

Wykres powstaje z $y = \frac{a}{x}$ przez przesunięcie o wektor $[p, q]$; asymptoty $x = p$ i $y = q$.

Funkcję postaci $\frac{mx+n}{x-p}$ sprowadza się do tej postaci, wydzielając część całkowitą: $mx + n = m(x-p) + (mp+n)$.

Punkty kratowe (o obu współrzędnych całkowitych) dla $y = q + \frac{a}{x-p}$ z całkowitymi a, p, q : y jest całkowite $\iff (x-p)$ dzieli a .

Przykład 4.1

Wszystkie punkty kratowe

Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych leżące na wykresie $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

- 1 $2x+1 = 2(x-3) + 7$, więc $f(x) = 2 + \frac{7}{x-3}$.
- 2 $x-3 \in \{-7, -1, 1, 7\}$, czyli $x \in \{-4, 2, 4, 10\}$.
- 3 $f(-4) = 2 - 1 = 1$, $f(2) = 2 - 7 = -5$, $f(4) = 9$, $f(10) = 3$.

Wynik: $(-4, 1)$, $(2, -5)$, $(4, 9)$, $(10, 3)$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4 (R)

2 zadania · ok. 8 min

- 1 Zapisz $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ w postaci $q + \frac{a}{x-p}$ i podaj asymptoty wykresu.

- 2 Ile punktów kratowych leży na wykresie $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 27 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · TABELA I WSPÓŁCZYNNIK

ZESTAWY A

- 1 x i y są odwrotnie proporcjonalne. Oblicz brakującą wartość.
a) $x = 4, y = 9$; y dla $x = 6$ b) $x = \frac{2}{3}, y = 6$; y dla $x = 2$
... pozostałe przykłady na stronie treningu

- 2 Wykres $y = \frac{a}{x}$ przechodzi przez podany punkt. Podaj a i ćwiartki, w których leży wykres.

a) $(3, -2)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM B · ZADANIA Z TREŚCIĄ

ZESTAWY B

- 1 Oblicz.

a) 6 pomp opróżnia zbiornik w 10 h; ile godzin zajmie to 4 pompom? b) czas skrócono o 20%; o ile procent wzrosła prędkość?

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM C · R: POSTAĆ $Q + \frac{A}{x-p}$

ZESTAWY C

- 1 Zapisz w postaci $q + \frac{a}{x-p}$ i podaj asymptoty.

a) $\frac{x+3}{x-1}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

- 2 Ile punktów kratowych leży na wykresie?

a) $y = 1 + \frac{6}{x-2}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

Pełny trening (27 przykładów i zadań) →



W arkuszach z lat 2024–2026 proporcjonalność odwrotna pojawiła się rzadko: na poziomie podstawowym jako zadanie zamknięte z tabelą (pułapką była w nim proporcja prosta), a w informatorze dla poziomu rozszerzonego jako zadanie za 3 punkty o punktach kratowych na wykresie funkcji $\frac{mx+n}{x-p}$. Sprawozdania CKE nie podają dla nich danych, bo nie pochodziły z sesji majowych. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 6 pkt · ok. 15 min

- 1 (0–1 pkt) Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Dla $x = 16$ jest $y = 12$. Dla $x = 24$ wartość y jest równa

A. 4 B. 8 C. 18 D. 32

- 2 (0–1 pkt) Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przechodzi przez punkt $(-2, -6)$. Oceń prawdziwość zdań.

1. Punkt $(4, 3)$ należy do wykresu funkcji f . P F

2. Funkcja f jest malejąca w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. P F

- 3 (0–1 pkt) Pięciu malarzy pomalowałoby halę w 12 dni. Ośmiu malarzy, pracujących w tym samym tempie, pomaluje ją w

A. 6 dni B. 7,5 dnia C. 9 dni D. 19,2 dnia

- 4 (0–3 pkt, R) Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych, które należą do wykresu funkcji $f(x) = \frac{-2x + 11}{x - 4}$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Najczęstsze błędy

× „Więcej pracowników, więc liczę z proporcji $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$.”

To proporcja prosta. Przy odwrotnej: $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

× „ $y = \frac{6}{x}$ jest malejąca.”

Jest malejąca w $(-\infty, 0)$ i osobno w $(0, +\infty)$; w sumie tych przedziałów nie.

× „Czas skrócił się o 20%, więc prędkość wzrosła o 20%.”

Czas razy 0,8 oznacza prędkość razy 1,25, czyli wzrost o 25%.

× „Przy dzielnikach liczby 7 biorę tylko 1 i 7.”

Dzielniki ujemne też dają punkty kratowe: -1 i -7 .

8

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Jak sprawdzić w tabeli proporcjonalność odwrotną?

Wszystkie iloczyny $x \cdot y$ muszą być równe.

2 W których ćwiartkach leży wykres $y = -\frac{5}{x}$?

W II i IV.

3 Jakie asymptoty ma wykres $y = \frac{2}{x+1} - 3$?

$x = -1$ i $y = -3$.

4 Czy punkt $(0, a)$ leży na wykresie $y = \frac{a}{x}$?

Nie: 0 nie należy do dziedziny.

ODWROTNA PROPORCJONALNOŚĆ

$$xy = a, \quad y = \frac{a}{x}$$

$$a > 0: \text{I i III}, \quad a < 0: \text{II i IV}$$

monotoniczna w każdym przedziale osobno

R: PRZESUNIĘCIE

$$\frac{a}{x-p} + q: \text{asymptoty } x = p, y = q$$

$$\frac{mx+n}{x-p} = m + \frac{mp+n}{x-p}$$

Broszura CKE „Wybrane wzory matematyczne” nie zawiera wzorów z tej lekcji (jest w niej tylko przesunięcie punktu o wektor).

Dalej: funkcja wykładnicza i logarytmiczna (lekcja 5.6 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna), a dla rozszerzenia przekształcenia wykresów i dowody monotoniczności (5.7 Przekształcenia wykresów, złożenia, dowodzenie monotoniczności).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Tak: $2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 8 \cdot 3 = 24$.

2. 1. $a = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$, więc $y = \frac{3}{x}$.

2. $y(4) = \frac{3}{4}$.

Zadania • część 2

1. 1. $a = 10$

2. $y(-4) = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$.

2. 1. $a = 2 \cdot (-3) = -6 < 0 \checkmark$ (rosnąca).

2. $-\frac{6}{x} > -1$; dla $x > 0$ mnożymy przez x : $-6 > -x$, czyli $x > 6$.

Zadania • część 3

1. 1. Kwota $8 \cdot 450 = 3600$ zł.

2. $3600 : 12 = 300$ zł.

Zadania • część 4 (R)

1. 1. $3x - 1 = 3(x + 2) - 7$

2. $f(x) = 3 - \frac{7}{x+2}$

3. asymptoty $x = -2, y = 3$.

2. 1. $f(x) = 1 + \frac{4}{x+1}$.

2. $x + 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$: sześć wartości.

3. Sześć punktów: $(0, 5), (-2, -3), (1, 3), (-3, -1), (3, 2), (-5, 0)$.

Zestawy A

1. a) 6 b) 2

2. a) $a = -6$; II i IV

Zestawy B

1. a) 15 h b) 25%

Zestawy C

1. a) $1 + \frac{4}{x-1}$; $x = 1, y = 1$

2. a) 8

Zadania w stylu maturalnym

1. B.

1. $16 \cdot 12 = 192$

2. $192 : 24 = 8$.

3. C to wynik proporcji prostej.

2. PF.

1. $a = 12, 4 \cdot 3 = 12 \checkmark$.

2. Malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$ osobno, ale nie w całej dziedzinie: $f(-1) = -12 < f(1) = 12$.

3. B.

1. $5 \cdot 12 = 60$ malarzo-dni

2. $60 : 8 = 7,5$.

4. 1. **Postać.** $-2x + 11 = -2(x - 4) + 3$, więc $f(x) = -2 + \frac{3}{x-4}$.

2. **Dzielniki.** $x - 4 \in \{-3, -1, 1, 3\}$, więc $x \in \{1, 3, 5, 7\}$.

3. **Wartości.** $f(1) = -3, f(3) = -5, f(5) = 1, f(7) = -1$.

1 pkt za postać $-2 + \frac{3}{x-4}$ (albo równoważne spostrzeżenie, że $x - 4$ musi dzielić 3). **2 pkt** za co najmniej dwa z czterech przypadków z punktami. **3 pkt** za wszystkie cztery punkty: $(1, -3), (3, -5), (5, 1), (7, -1)$.

Matura z matematyki · Lekcja 5.5: Proporcjonalność odwrotna · Na podstawie: Informatory o egzaminie maturalnym z matematyki (poziom podstawowy i rozszerzony) od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań według arkuszy i zasad oceniania CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt5_5.py).