

Funkcja kwadratowa w przedziale i zadania optymalizacyjne

Największa albo najmniejsza wartość funkcji kwadratowej jest w wierzchołku albo na końcu przedziału. Z tej jednej obserwacji biorą się trzy typy zadań maturalnych: wartości w przedziale, odczytywanie zastosowań (rzut, zysk, przychód) i zadanie optymalizacyjne za 3–4 punkty, które pojawia się prawie w każdym arkuszu podstawowym.

CZAS

ok. 40 min
czytania + ok. 1 h
zadań

ZADANIA

9 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 6
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
V.10, V.11, XIII

W TEJ LEKCJI

- 0 40 metrów siatki
- 1 Wartość największa i najmniejsza w przedziale
- 2 Funkcja kwadratowa w zastosowaniach
- 3 Zadanie optymalizacyjne krok po kroku
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

40 metrów siatki

Masz 40 metrów siatki i chcesz ogrodzić prostokątny wybieg dla psa przy ścianie domu. Ściana zastępuje jeden bok, więc siatka idzie tylko wzdłuż trzech. Jakie wymiary dają największy wybieg?

Możesz próbować: 5×30 daje 150 m^2 , 10×20 daje 200 m^2 , 15×10 daje 150 m^2 . Wygląda na to, że 10×20 jest najlepsze, ale skąd pewność, że $9,5 \times 21$ nie daje więcej? Na maturze tabelka prób daje **0 punktów**. Potrzebna jest funkcja: pole jako funkcja kwadratowa jednej zmiennej. Jej wierzchołek odpowiada na pytanie dokładnie. Wróćmy do tego wybiegu w części 3.

Wartość największa i najmniejsza w przedziale

Na całej osi funkcja kwadratowa ma tylko jedną wartość skrajną: w wierzchołku. Dla $a > 0$ jest to wartość najmniejsza, a największej nie ma, bo ramiona rosną bez końca. W przedziale domkniętym $[\alpha, \beta]$ jest inaczej: funkcja ma tam zawsze i wartość największą, i najmniejszą. Kandydatów jest najwyżej trzech.

WARTOŚCI SKRAJNE FUNKCJI KWADRATOWEJ W PRZEDZIALE $[\alpha, \beta]$

1. Oblicz $p = -\frac{b}{2a}$ (albo odczytaj z postaci kanonicznej).
2. Jeśli $p \in [\alpha, \beta]$: porównaj trzy liczby $f(\alpha)$, $f(p)$, $f(\beta)$.
3. Jeśli $p \notin [\alpha, \beta]$: funkcja jest w tym przedziale monotoniczna, więc porównaj tylko $f(\alpha)$ i $f(\beta)$.

Skrót: gdy p leży w przedziale, dla $a > 0$ najmniejsza wartość to $q = f(p)$, a największa jest na końcu położonym *dalej* od osi symetrii $x = p$. Dla $a < 0$ odwrotnie.

Przykład 1.1

Wierzchołek w przedziale

Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 1$ w przedziale $[0, 5]$.

- 1 $p = \frac{4}{2} = 2$, a $2 \in [0, 5]$, więc wierzchołek się liczy.
- 2 $f(0) = 1$, $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$, $f(5) = 25 - 20 + 1 = 6$.

Wynik: najmniejsza wartość -3 (dla $x = 2$), największa 6 (dla $x = 5$).

Sprawdzenie skrótem: $a = 1 > 0$, więc minimum w wierzchołku. Koniec 5 jest dalej od osi $x = 2$ niż koniec 0 (o 3 , a nie o 2), więc tam jest maksimum ✓.

Przykład 1.2

Wierzchołek poza przedziałem

Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$ w przedziale $[3, 5]$.

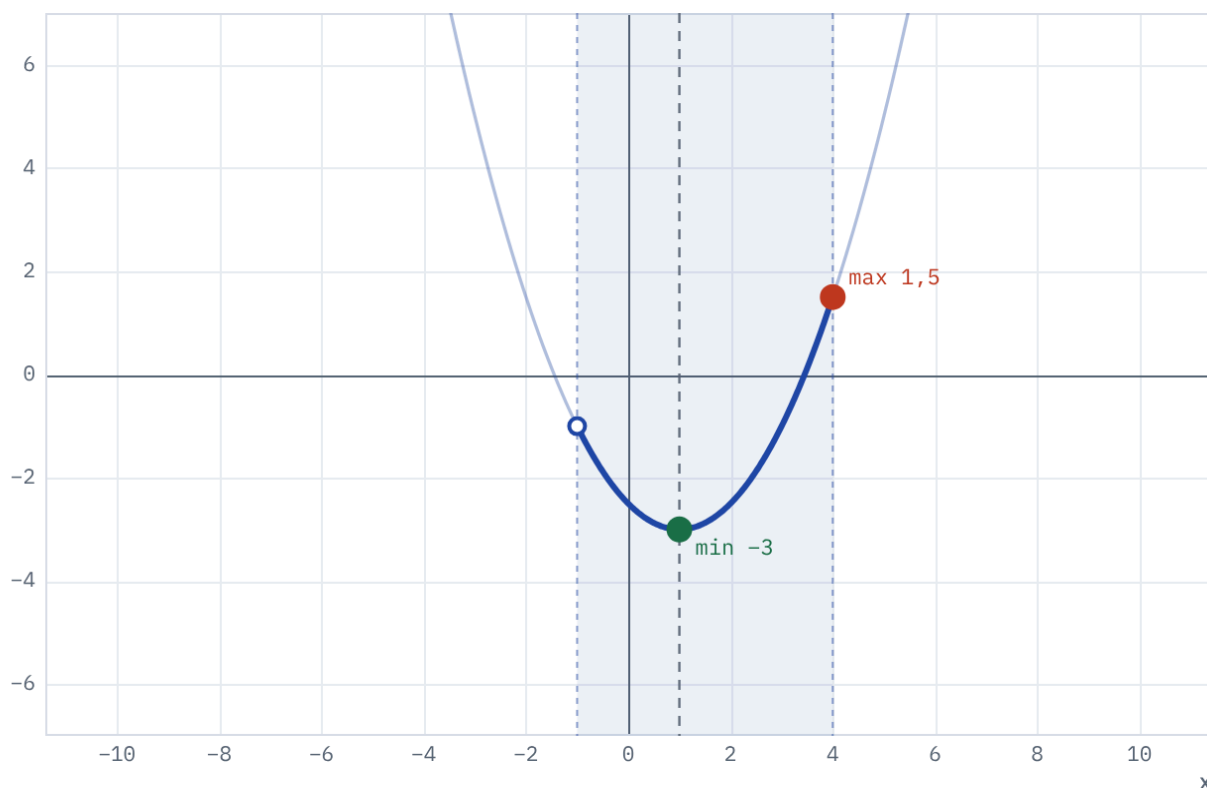
- 1 $p = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2$, a $2 \notin [3, 5]$. Wierzchołka nie liczymy, choć to w nim jest największa wartość na całej osi.
- 2 Ramiona w dół, a przedział leży na prawo od wierzchołka: funkcja w nim maleje.
 $f(3) = -18 + 24 - 3 = 3$, $f(5) = -50 + 40 - 3 = -13$.

Wynik: największa wartość 3 (dla $x = 3$), najmniejsza -13 (dla $x = 5$).

Pułapka: $q = f(2) = 5$ jest większe od 3 , ale $x = 2$ nie należy do przedziału. Kto poda 5 , traci punkt.

SYMULACJA 1 Parabola i przedział $[\alpha, \beta]$. Przesuwaj oś symetrii i końce przedziału.

Kółka to kandydaci na wartości skrajne, a pełne punkty pokazują, który kandydat wygrywa. Wyprowadź oś symetrii poza przedział i zobacz, że wierzchołek przestaje się liczyć.



— wykres w przedziale — wartość największa — wartość najmniejsza — oś symetrii $x = p$

przedział $[-1, 4]$

$f(\alpha)$ -1

$f(\beta)$ 1,5

$f(p)$ -3

największa 1,5 dla $x = 4$

najmniejsza -3 dla $x = 1$

$p = 1$ leży w przedziale, więc najmniejsza wartość to $q = -3$ w wierzchołku. Największa jest na końcu dalszym od osi symetrii (β).

Stan na rysunku: $f(x) = 0,5(x - 1)^2 - 3$, przedział $[-1, 4]$; największa 1,5, najmniejsza -3.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 10 min

1 Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 + 2x - 3$ w przedziale $[-3, 1]$.

2 Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ w przedziale $[0, 2]$.

- 3 Dla $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ w przedziale $[-2, 3]$ ktoś pisze: „największa wartość jest dla $x = 3$, bo to prawy koniec przedziału”. Sprawdź i popraw.

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ trudniejsze

2 Funkcja kwadratowa w zastosowaniach

W zadaniach z kontekstem wzór zwykle jest podany. Trzeba tylko rozpoznać, o który element paraboli pyta treść, i odpowiedzieć w jednostkach zadania.

🔑 SŁOWNIK: PYTANIE → ELEMENT PARABOLI

„kiedy najwyżej / przy jakiej cenie największy zysk” → p (argument wierzchołka);

„jak wysoko / jaki największy zysk” → $q = f(p)$ (wartość w wierzchołku);

„kiedy spadnie / przy jakiej cenie przychód zero” → miejsce zerowe (to, które ma sens w zadaniu);

„z jakiej wysokości / jaki koszt stały” → $f(0) = c$.

Przykład 2.1

Rzut piłki

Wysokość piłki (w metrach) po t sekundach od wyrzutu opisuje wzór $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$. Z jakiej wysokości wyrzucono piłkę? Po jakim czasie i na jakiej wysokości była najwyżej? Kiedy spadła na ziemię?

- 1 Wysokość początkowa: $h(0) = 15$ m.
- 2 Wierzchołek: $p = -\frac{10}{2 \cdot (-5)} = 1$, $q = h(1) = -5 + 10 + 15 = 20$. Najwyżej po 1 s, na wysokości 20 m.
- 3 Ziemia: $-5t^2 + 10t + 15 = 0$, czyli $t^2 - 2t - 3 = 0$, $(t - 3)(t + 1) = 0$. Pierwiastek $t = -1$ nie ma sensu (czas przed wyrzutem), zostaje $t = 3$ s.

Wynik: start z 15 m, najwyżej 20 m po 1 s, upadek po 3 s.

Sprawdzenie: $h(3) = -45 + 30 + 15 = 0$ ✓. Wzór ma sens tylko dla $t \in [0, 3]$: po upadku piłka nie leci dalej pod ziemię.

Przykład 2.2

Cena biletu

Kino sprzedaje bilety po 20 zł i ma 300 widzów. Każda obniżka ceny o 1 zł przyciąga 25 widzów więcej. Przychód przy obniżce o x zł opisuje wzór $P(x) = (20 - x)(300 + 25x)$, gdzie $0 \leq x \leq 20$. Przy jakiej cenie biletu przychód jest największy?

- 1 Wzór jest w postaci iloczynowej: miejsca zerowe $x = 20$ i $x = -12$, ramiona w dół (przy x^2 stoi -25).
- 2 $p = \frac{20+(-12)}{2} = 4$, a $4 \in [0, 20]$.
- 3 Pytanie jest o cenę, nie o obniżkę: $20 - 4 = 16$ zł. Przychód $P(4) = 16 \cdot 400 = 6400$ zł.

Wynik: cena 16 zł (przychód 6400 zł zamiast 6000 zł przy cenie 20 zł).

Pułapka: odpowiedź „ $x = 4$ ” nie odpowiada na pytanie. W zasadach oceniania CKE za takie zadanie samo p daje 1 punkt z 2, a drugi punkt jest za cenę.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 10 min

- 1 Kamień wyrzucony pionowo w górę jest po t sekundach na wysokości $h(t) = -5t^2 + 30t$ (w metrach). Na jaką największą wysokość się wzniósł i kiedy spadł?
- 2 Zysk firmy (w złotych) ze sprzedaży x sztuk towaru dziennie opisuje wzór $Z(x) = -2x^2 + 120x - 1000$. Ile sztuk trzeba sprzedać, żeby zysk był największy, i ile wtedy wynosi?
- 3 Suma dwóch liczb jest równa 14. Jakie to liczby, jeśli ich iloczyn jest największy możliwy?

 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Zadanie optymalizacyjne krok po kroku

W zadaniu optymalizacyjnym wzoru nie ma: trzeba go ułożyć. Zawsze według tego samego przepisu, i właśnie za kolejne kroki tego przepisu są punkty.

PRZEPIS NA ZADANIE OPTIMALIZACYJNE

1. **Zmienna.** Oznacz literą x jedną wielkość (jeśli treść ją wskazuje, weź tę).
2. **Związek.** Z warunku zadania (suma długości, obwód, ilość materiału) wyraż pozostałe wielkości przez x .
3. **Funkcja.** Zapisz badaną wielkość (pole, objętość, przychód) jako funkcję jednej zmiennej x .
4. **Dziedzina.** Wszystkie długości muszą być dodatnie: stąd przedział dla x .
5. **Wierzchołek.** Oblicz p i sprawdź, czy p należy do dziedziny.
6. **Odpowiedź.** Odpowiedz na pytanie z treści: wymiary, cena, wartość, a nie samo p .

Typowa punktacja CKE w zadaniu za 4 punkty: 1 pkt za związek między wielkościami albo za zakres x ; 2 pkt za wzór funkcji; 3 pkt za wzór i dziedzinę (albo wzór i p); 4 pkt za całość. Bez dziedziny najwyżej 3 punkty. Tabelka wartości bez funkcji: 0 punktów.

Przykład 3.1

Wybieg przy ścianie

Z 40 m siatki ogradzamy prostokątny wybieg przy ścianie domu; ściana tworzy jeden bok i nie wymaga siatki. Wyznacz wymiary wybiegu o największym polu.

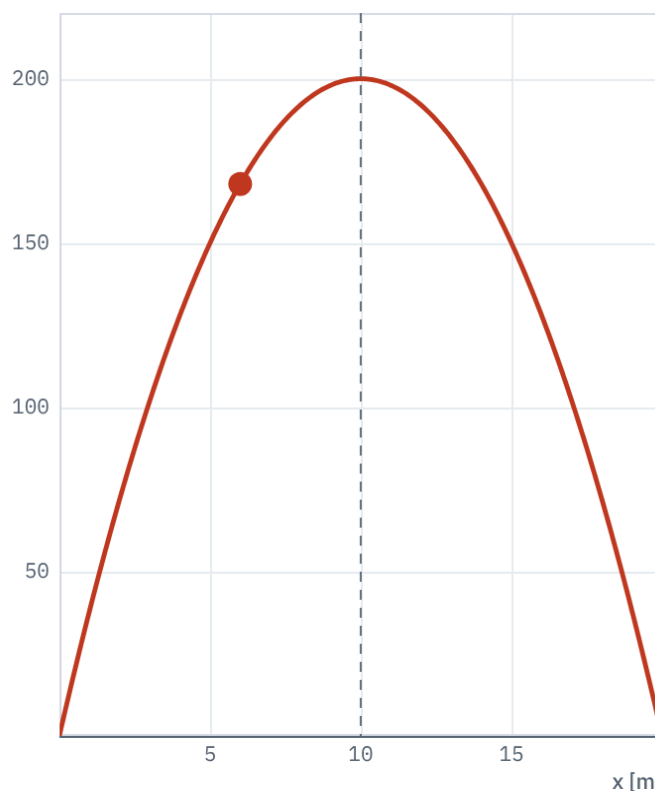
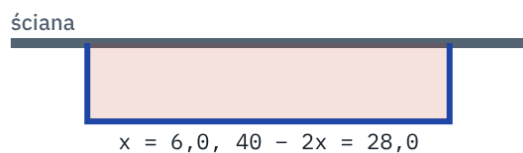
- 1 Zmienna: x to długość każdego z dwóch boków prostopadłych do ściany.
- 2 Związek: na bok równoległy do ściany zostaje $40 - 2x$.
- 3 Funkcja: $P(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$.
- 4 Dziedzina: $x > 0$ i $40 - 2x > 0$, czyli $x \in (0, 20)$.
- 5 Wierzchołek: miejsca zerowe 0 i 20, więc $p = 10 \in (0, 20)$. Ramiona w dół, więc to maksimum.

Wynik: wybieg $10 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ (bok 20 m przy ścianie), pole 200 m^2 .

Sprawdzenie: $10 + 20 + 10 = 40 \text{ m}$ siatki ✓. $P(9,5) = 9,5 \cdot 21 = 199,5 < 200$, zgodnie z wierzchołkiem.

SYMULACJA 2 Wybieg z 40 m siatki. Zmieniaj x , czyli bok prostopadły do ściany.

Schemat pokazuje kształt wybiegu, wykres obok (na telefonie pod spodem) pole $P(x) = x(40 - 2x)$. Ta sama siatka daje bardzo różne pola; największe jest w wierzchołku paraboli.



— siatka — ściana (bez siatki) — pole $P(x)$

wymiary 6,0 m × 28,0 m

$P(x) = x(40 - 2x)$ 168,0 m²

dziedzina $0 < x < 20$

najlepiej $x = 10$ m, $P = 200$ m²

Wybieg jest długi i płytki. Zwiększ x : pole rośnie aż do $x = 10$ m (wierzchołek paraboli P).

Stan na rysunku: $x = 6,0$ m, bok przy ścianie 28,0 m, pole 168,0 m².

Przykład 3.2

Prostopadłościan (typ za 4 punkty)

Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 36. Jedna krawędź podstawy jest dwa razy dłuższa od drugiej. Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji opisującej pole powierzchni bocznej w zależności od krótszej krawędzi podstawy x . Oblicz wymiary prostopadłościanu o największym polu powierzchni bocznej.

- 1 Zmienna: krawędzie podstawy x i $2x$, wysokość h .
- 2 Związek: prostopadłościan ma po 4 krawędzie każdej długości, więc $4(x + 2x + h) = 36$, stąd $h = 9 - 3x$.
- 3 Funkcja: pole boczne to obwód podstawy razy wysokość, $P(x) = 2(x + 2x)(9 - 3x) = 6x(9 - 3x) = -18x^2 + 54x$.
- 4 Dziedzina: $x > 0$ i $h = 9 - 3x > 0$, czyli $x \in (0, 3)$.
- 5 Wierzchołek: miejsca zerowe 0 i 3, $p = \frac{3}{2} \in (0, 3)$, ramiona w dół.

Wynik: krawędzie 1,5, 3 i 4,5; największe pole boczne $P\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} = 40,5$.

Sprawdzenie: $4(1,5 + 3 + 4,5) = 4 \cdot 9 = 36 \checkmark$. W zasadach oceniania podobnego zadania z 2025 roku założenie bez podstaw, że podstawa jest kwadratem, to inny model i co najwyżej 2 punkty.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Różnica dwóch liczb jest równa 8. Wyznacz te liczby, jeśli ich iloczyn jest najmniejszy możliwy.
- 2 Na bokach kwadratu $ABCD$ o boku 6 wybrano punkty $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$, $H \in DA$ tak, że $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = x$. Wyznacz x , dla którego pole czworokąta $EFGH$ jest najmniejsze, i oblicz to pole.
- 3 W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8 wpisano prostokąt tak, że dwa jego boki leżą na przyprostokątnych, a jeden wierzchołek na przeciwprostokątnej. Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 36 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WARTOŚCI W PRZEDZIALE

ZESTAWY A

- 1 Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale.



a) $x^2 - 2x - 3$, $[0, 3]$ b) $x^2 + 4x + 1$, $[0, 2]$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

- 2 Podaj argument, dla którego funkcja przyjmuje w przedziale *największą* wartość.



a) $(x - 4)^2 + 2$, $[0, 10]$ b) $-(x - 3)^2 + 1$, $[5, 9]$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · ZASTOSOWANIA I UKŁADANIE FUNKCJI

ZESTAWY B

- 1 Wzór jest podany. Odpowiedz: dla jakiego argumentu wartość jest największa i ile wynosi?



a) wysokość

b) przychód

$h(t) = -5t^2 + 40t$ (m, t w s) $P(x) = (10 + x)(200 - 5x)$

zł przy cenie $10 + x$ zł

... pozostałe przykłady na stronie treningu

- 2 Nie rozwiązuj do końca: zapisz funkcję jednej zmiennej i jej dziedzinę.



a) pole prostokąta o

b) pole boczne

obwodzie 30, x to jeden bok

prostokąt o

podstawie kwadratowej o

boku x i sumie krawędzi 24

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

 ZESTAWY C

- 1 Dokończ zadania z zestawu B: wyznacz wymiary (albo liczby), dla których wartość jest największa lub najmniejsza, i tę wartość.
- a) prostokąt o obwodzie 30, b) prostopadłościan o
największe pole podstawie kwadratowej,
suma krawędzi 24,
największe pole boczne
- ... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (36 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

W 7 z 8 arkuszy podstawowych pisanych według podstawy z 2024 roku (sesje 2025–2026 i dwie matury próbne) było zadanie optymalizacyjne. W ósmym (próbnym) było zadanie o wartościach w przedziale. Razem z odczytywaniem zastosowań ta lekcja daje średnio około 3,4 z 50 punktów na arkusz. Trzy warianty:

- **za 4 punkty:** bryła (prostopadłościan, walec) z jednym warunkiem na sumę długości; polecenie „wyznacz wzór i dziedzinę funkcji... oblicz..., dla którego... jest największe”. W maju 2025 takie zadanie dało zdającym średnio 38% punktów;
- **za 3 punkty:** figura płaska, dziedzina podana w treści; szukane bywa minimum;
- **za 1–2 punkty:** wzór podany (przychód, rzut), trzeba wskazać p albo q i odpowiedzieć w jednostkach zadania.

Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza; punktacja jest wzorowana na zasadach oceniania CKE.

 ZADANIA W STYLU MATURALNYM

6 zadań · 12 pkt · ok. 25 min

- 1 (0-1 pkt) Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 5$ w przedziale $[4, 7]$ jest równa
- A. -4 B. -3 C. 5 D. 12

- 2 (0–1 pkt) Funkcja $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ przyjmuje w przedziale $[0, 5]$ największą wartość dla argumentu
A. 0 B. 2 C. 5 D. 10
- 3 (0–1 pkt) Piłka po t sekundach od wyrzutu jest na wysokości $h(t) = -5t^2 + 20t$ (w metrach). Największa wysokość, na jaką wzniosła się piłka, jest równa
A. 2 m B. 4 m C. 20 m D. 40 m
- 4 (0–2 pkt) Wypożyczalnia rowerów przy cenie 30 zł za dzień wypożycza 120 rowerów. Każda podwyżka ceny o 1 zł zmniejsza liczbę wypożyczeń o 3. Przychód przy podwyżce o x zł opisuje wzór $P(x) = (30 + x)(120 - 3x)$, gdzie $x \in [0, 40]$. Oblicz cenę wypożyczenia, przy której przychód jest największy. Zapisz obliczenia.
- 5 (0–3 pkt) Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 8$ i $|BC| = 4$. Na boku AB wybrano punkt E , a na boku BC punkt F tak, że $|AE| = |BF| = x$, gdzie $x \in (0, 4)$. Wyznacz wzór funkcji $P(x)$ opisującej pole trójkąta DEF . Oblicz x , dla którego to pole jest najmniejsze.
- 6 (0–4 pkt) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 48. Niech x oznacza długość krawędzi podstawy. Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji opisującej pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa w zależności od x . Oblicz x , dla którego pole powierzchni bocznej jest największe. Zapisz obliczenia.

□□□ podstawowe ▣▣▣ średnie ▤▤▤ trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

× „Najmniejsza wartość w przedziale to zawsze q .”

Tylko gdy p należy do przedziału (i $a > 0$). Najpierw sprawdź, czy wierzchołek w ogóle jest w przedziale.

× „Największa wartość jest na prawym końcu.”

Jest na końcu położonym dalej od osi symetrii (dla $a > 0$), a ten może być lewym.

× „Policzyłem kilka wartości w tabelce i widać, gdzie jest maksimum.”

Tabelka niczego nie dowodzi: między sprawdzonymi liczbami może być lepsza. W zasadach oceniania CKE za takie rozwiązanie jest 0 punktów.

× „Dziedzina to formalność.”

W zadaniu za 4 punkty jest za nią punkt. A bez niej nie wiesz, czy p w ogóle wchodzi w grę.

× „Podstawa prostopadłościanu jest kwadratem.”

Tylko jeśli tak mówi treść. Według sprawozdania CKE z 2025 roku zdający często narzucali ten „najbardziej znany” model, a w zasadach oceniania to najwyżej 2 punkty.

× „Odpowiedź: $x = 5$.”

Pytanie było o cenę, wymiary albo pole. p to krok, nie odpowiedź.

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Ilu kandydatów na wartości skrajne trzeba sprawdzić w przedziale domkniętym?

Dwa końce i wierzchołek, ale wierzchołek tylko wtedy, gdy p należy do przedziału.

2 Gdzie jest największa wartość funkcji z $a > 0$, gdy p leży w przedziale?

Na końcu dalszym od osi $x = p$.

3 Skąd bierze się dziedzina w zadaniu optymalizacyjnym?

Z warunku, że wszystkie długości (albo liczby sztuk, czas) są dodatnie, zapisanego przez x .

4 Wzór przychodu ma postać $(a + x)(b - kx)$. Jak najszybciej znaleźć p ?

To postać iloczynowa: miejsca zerowe $-a$ i $\frac{b}{k}$, a p jest w połowie między nimi.

- 5 Za co nie dostaniesz punktów w zadaniu optymalizacyjnym, nawet przy dobrym wyniku?

Za tabelkę prób bez funkcji i za samo p bez wzoru.

PRZEDZIAŁ $[\alpha, \beta]$

kandydaci: $f(\alpha)$, $f(\beta)$ oraz $f(p)$, gdy $p \in [\alpha, \beta]$

$p \notin [\alpha, \beta]$: funkcja monotoniczna, skrajne na końcach

OPTIMALIZACJA

zmienna $\rightarrow$ związek $\rightarrow$ funkcja $\rightarrow$
dziedzina $\rightarrow p \in D?$ $\rightarrow$ odpowiedź

$$p = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \text{ wartość skrajna } q = f(p)$$

Wzór na wierzchołek jest w tablicach CKE „Wybrane wzory matematyczne”. Przepisu na zadanie optymalizacyjne tam nie ma: ten trzeba mieć w głowie.

Dalej: równania i nierówności kwadratowe (lekcja 3.2 Równania i nierówności kwadratowe, równania wielomianowe w postaci iloczynowej). Na poziomie rozszerzonym optymalizacja wraca z pochodną, gdy badana funkcja nie jest kwadratowa (np. objętość pudełka to wielomian trzeciego stopnia).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $p = -1 \in [-3, 1]$.
 2. $f(-1) = -4$
 3. $f(-3) = 0$
 4. $f(1) = 0$.
 5. Najmniejsza -4 , największa 0 (na obu końcach: są tak samo daleko od osi).
1. $p = 3 \notin [0, 2]$: funkcja w tym przedziale rośnie.
 2. $f(0) = -5$
 3. $f(2) = -4 + 12 - 5 = 3$.
 4. Najmniejsza -5 , największa 3 .
 5. (Nie $q = 4$: wierzchołek jest poza przedziałem.)
1. $p = 1$, $f(1) = -3$ to najmniejsza wartość.
 2. $f(-2) = 2 \cdot 9 - 3 = 15$
 3. $f(3) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$.
 4. Największa jest 15 dla $x = -2$: ten koniec leży dalej od osi $x = 1$ (o 3 , a nie o 2). „Prawy koniec” nie ma tu nic do rzeczy.

Zadania • część 2

1. $p = 3$
 2. $h(3) = -45 + 90 = 45$ m.
 3. $h(t) = -5t(t - 6) = 0$ dla $t = 6$ s (i $t = 0$, czyli chwili wyrzutu).
1. $p = -\frac{120}{-4} = 30$ sztuk
 2. $Z(30) = -1800 + 3600 - 1000 = 800$ zł.
1. Liczby x i $14 - x$, iloczyn $I(x) = x(14 - x)$, miejsca zerowe 0 i 14 .
 2. $p = 7$.
 3. Liczby 7 i 7 , iloczyn 49 .

Zadania • część 3

1. Liczby x i $x - 8$, iloczyn $I(x) = x(x - 8)$, ramiona w górę.
 2. $p = 4$.
 3. Liczby 4 i -4 , iloczyn -16 .
 4. (Dziedzina: wszystkie liczby rzeczywiste.)
1. $S(x) = 36 - 4 \cdot \frac{1}{2}x(6 - x) = 2x^2 - 12x + 36$, dziedzina $x \in (0, 6)$.
 2. $p = 3$
 3. $S(3) = 18$.
 4. Najmniejsze pole 18 , gdy punkty są środkami boków.

3. 1. Boki prostokąta: x i $y = 8 - \frac{4}{3}x$ (to samo daje podobieństwo trójkątów).
2. $P(x) = x(8 - \frac{4}{3}x)$, dziedzina $x \in (0, 6)$, miejsca zerowe 0 i 6.
3. $p = 3$.
4. Prostokąt 3×4 , pole 12, czyli połowa pola trójkąta.

Zestawy A

1. a) min -4 , max 0 b) min 1, max 13 ($p = -2$ poza przedziałem)
2. a) $x = 10$ b) $x = 5$

Zestawy B

1. a) $t = 4$ s, 80 m b) $x = 15$, cena 25 zł, 3125 zł
2. a) $P(x) = x(15 - x)$, $x \in (0, 15)$ b) $h = 6 - 2x$, $P(x) = 4x(6 - 2x)$, $x \in (0, 3)$

Zestawy C

1. a) kwadrat $7,5 \times 7,5$, pole 56,25 b) $x = 1,5$, $h = 3$, pole 18

Zadania w stylu maturalnym

1. B.

1. $p = 3 \notin [4, 7]$, funkcja w przedziale rośnie:
2. $f(4) = 16 - 24 + 5 = -3$.
3. A to $q = f(3)$, czyli wierzchołek spoza przedziału.
4. D to $f(7)$, wartość największa.

2. C.

1. Koniec 5 jest dalej od osi $x = 2$ niż koniec 0:
2. $f(5) = 10$
3. $f(0) = 5$.
4. D to wartość, a pytanie jest o argument.
5. B to argument wartości najmniejszej.

3. C.

1. $p = 2$ s
2. $h(2) = -20 + 40 = 20$ m.
3. A to chwila, a nie wysokość.
4. B to chwila upadku.
4. 1. **Miejsca zerowe.** $P(x) = (30 + x)(120 - 3x)$ zeruje się dla $x = -30$ i $x = 40$; ramiona w dół.
2. **Wierzchołek.**

$$p = \frac{-30 + 40}{2} = 5 \in [0, 40].$$

3. **Odpowiedź.** cena $30 + 5 = 35$ zł (przychód $35 \cdot 105 = 3675$ zł).

1 pkt za $x = 5$ (np. z $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$ albo z $p = -\frac{b}{2a}$ po wymnożeniu). 2 pkt za cenę 35 zł.

Uwaga: odpowiedź „ $x = 5$ ” bez ceny: 1 pkt. Same liczby bez obliczeń: 1 pkt.

5. 1. Trzy trójkąty.

$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 4x = 2x$$

$$P_{EBF} = \frac{1}{2}x(8 - x)$$

$$P_{FCD} = \frac{1}{2} \cdot 8(4 - x) = 16 - 4x.$$

2. Funkcja.

$$\begin{aligned} P(x) &= 32 - 2x - \left(4x - \frac{1}{2}x^2\right) - (16 - 4x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 16. \end{aligned}$$

3. Wierzchołek. $p = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \in (0, 4)$, ramiona w górę.

4. Odpowiedź. najmniejsze pole dla $x = 2$ (równe 14).

1 pkt za zapisanie pola DEF jako różnicy pola prostokąta i pól trzech trójkątów ALBO za pola co najmniej dwóch z tych trójkątów w zależności od x . 2 pkt za wzór $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 16$. 3 pkt za $x = 2$.

Uwaga: dziedziną jest podana w treści, więc nie jest punktowana. Samo „ $x = 2$ ” bez wzoru: 0 pkt.

6. 1. Związek. podstawa to kwadrat o boku x , wysokość h : $8x + 4h = 48$, stąd $h = 12 - 2x$.

2. Funkcja.

$$P(x) = 4xh$$

$$= 4x(12 - 2x)$$

$$= -8x^2 + 48x.$$

3. Dziedzina. $x > 0$ i $12 - 2x > 0$, czyli $x \in (0, 6)$.

4. Wierzchołek. miejsca zerowe 0 i 6, więc $p = 3 \in (0, 6)$; ramiona w dół.

5. Odpowiedź. $x = 3$ (wtedy $h = 6$, pole boczne 72).

1 pkt za związek $h = 12 - 2x$ ALBO za zakres $x \in (0, 6)$. 2 pkt za wzór $P(x) = 4x(12 - 2x)$ ALBO za związek i zakres. 3 pkt za wzór i dziedzinę ALBO za wzór i $p = 3$. 4 pkt za wzór, dziedzinę i $x = 3$.

Uwagi: tabelka wartości bez funkcji: 0 pkt. Liczenie pochodnej bez uzasadnienia, że w $x = 3$ jest maksimum: co najwyżej 3 pkt.

Matura z matematyki · Lekcja 5.4: Funkcja kwadratowa w przedziale i zadania optymalizacyjne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań i punktacja według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2025–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt5_4.py).