

Trening: funkcja kwadratowa w przedziale i optymalizacja

Zestawy krótkich przykładów do lekcji 5.4 Funkcja kwadratowa w przedziale i zadania optymalizacyjne: wartości skrajne w przedziale, odczytywanie zastosowań, układanie funkcji jednej zmiennej i pełne zadania optymalizacyjne. Na końcu zadania w stylu arkusza maturalnego z punktacją. Odpowiedzi są pod każdym zestawem.

POZIOM A · WARTOŚCI W PRZEDZIALE

ZESTAWY A

2 zestawy

1 Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale.



a) $x^2 - 2x - 3$, $[0, 3]$

b) $-x^2 + 4x$, $[0, 5]$

c) $x^2 + 4x + 1$, $[0, 2]$

d) $2x^2 - 8x + 3$, $[-1, 1]$

e) $-(x + 1)^2 + 5$, $[-4, 0]$

f) $\frac{1}{2}x^2 - 3x$, $[2, 8]$

2 Podaj argument, dla którego funkcja przyjmuje w przedziale *największą* wartość.



a) $(x - 1)^2$, $[-2, 3]$

b) $(x - 4)^2 + 2$, $[0, 10]$

c) $-(x - 3)^2 + 1$, $[5, 9]$

d) $-2(x + 2)^2$, $[-5, 1]$

e) $x^2 - 6x$, $[-1, 4]$

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM B · ZASTOSOWANIA I UKŁADANIE FUNKCJI

ZESTAWY B

2 zestawy

1 Wzór jest podany. Odpowiedz: dla jakiego argumentu wartość jest największa i ile wynosi?

a) wysokość

$$h(t) = -5t^2 + 40t \text{ (m, } t \text{ w s)}$$

b) wysokość

$$h(t) = -4,9t^2 + 19,6t \text{ (m)}$$

c) zysk

$$Z(x) = -x^2 + 50x - 400 \text{ (zł)}$$

d) pole $P(x) = x(18 - x)$

e) przychód

$$P(x) = (10 + x)(200 - 5x)$$

zł przy cenie $10 + x$ zł

2 Nie rozwiązuj do końca: zapisz funkcję jednej zmiennej i jej dziedzinę.

a) pole prostokąta o

obwodzie 30, x to jeden bok

b) suma kwadratów dwóch

liczb nieujemnych o sumie 10

c) pole boczne

prostopadłościanu o podstawie kwadratowej o boku x i sumie krawędzi 24

d) pole wybiegu przy

ścianie z 60 m siatki, x to

bok prostopadły do ściany

e) pole boczne walca, w

którym $2r + h = 12$

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM C · PEŁNE ZADANIE OPTIMALIZACYJNE

ZESTAWY C

1 zestaw

1 Dokończ zadania z zestawu B: wyznacz wymiary (albo liczby), dla których wartość jest największa lub najmniejsza, i tę wartość.

a) prostokąt o obwodzie 30, największe pole

b) dwie liczby nieujemne o sumie 10, najmniejsza suma kwadratów

c) prostopadłościan o podstawie kwadratowej, suma krawędzi 24, największe pole boczne

d) wybieg z 60 m siatki, największe pole

e) walec, $2r + h = 12$, największe pole boczne

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

ZADANIA MATURALNE

Formy zadań jak w arkuszu CKE. W zadaniach zamkniętych: dokończ zdanie, wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. W zadaniach „prawda/fałsz” oceniasz dwa stwierdzenia, a punkt

dostajesz tylko za oba poprawne. W zadaniach otwartych zapisz obliczenia: za tabelkę prób bez funkcji nie ma punktów.

 ZADANIA W STYLU ARKUSZA

10 zadań · 19 pkt

- 1 (0–1 pkt) Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 - 8x + 10$ w przedziale $[0, 3]$ jest równa
- A. –6 B. –5 C. 1 D. 10

- 2 (0–1 pkt) Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = -3(x + 1)^2 + 2$ w przedziale $[-3, 0]$ jest równa
- A. –10 B. –1 C. 2 D. –3

- 3 (0–1 pkt) Funkcja $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$ przyjmuje w przedziale $[-1, 4]$ największą wartość dla argumentu
- A. –1 B. 1 C. 4 D. 23

- 4 (0–1 pkt) Dana jest funkcja $f(x) = (x - 3)^2 - 4$. Oceń prawdziwość stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[0, 4]$ jest równa -4 . P / F
2. Największą wartość w przedziale $[0, 4]$ funkcja f przyjmuje dla $x = 4$. P / F

- 5 (0–2 pkt) Piłkę wyrzucono z dachu. Jej wysokość nad ziemią (w metrach) po t sekundach opisuje wzór $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$.
- a) (0–1) Piłka spadła na ziemię po
- A. 1,5 s B. 4 s C. 20 s D. 31,25 s
- b) (0–1) Uzupełnij zdanie. Największa wysokość, na jaką wzniosła się piłka, jest równa m.

- 6 (0–1 pkt) Suma dwóch liczb jest równa 12. Największy możliwy iloczyn tych liczb jest równy
- A. 36 B. 35 C. 72 D. 144

- 7 (0–2 pkt) Kawiarnia przy cenie 12 zł sprzedaje dziennie 200 kaw. Każda podwyżka ceny o 0,50 zł zmniejsza sprzedaż o 5 kaw. Dzienny przychód po x podwyżkach opisuje wzór $P(x) = (12 + 0,5x)(200 - 5x)$, gdzie x jest liczbą całkowitą i $0 \leq x \leq 40$. Oblicz cenę kawy, przy której przychód jest największy. Zapisz obliczenia.

- 8 (0–3 pkt) Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 10. Na bokach AB, BC, CD, DA wybrano odpowiednio punkty E, F, G, H tak, że $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = x$, gdzie $x \in (0, 10)$. Wyznacz wzór funkcji $S(x)$ opisującej pole czworokąta $EFGH$. Oblicz x , dla którego to pole jest najmniejsze, i to najmniejsze pole.
-
- 9 (0–3 pkt) Punkt $P = (x, y)$ leży na prostej $y = -2x + 8$ w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Prostokąt ma wierzchołki $(0, 0), (x, 0), P$ i $(0, y)$. Wyznacz współrzędne punktu P , dla którego pole prostokąta jest największe. Zapisz obliczenia.
-
- 10 (0–4 pkt) Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt, którego jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 64. Niech x oznacza długość krótszej krawędzi podstawy. Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji opisującej pole powierzchni bocznej prostopadłościanu w zależności od x . Oblicz x , dla którego to pole jest największe. Zapisz obliczenia.

■□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze



Odpowiedzi

Zestawy A

1. a) $\min -4, \max 0$ b) $\min -5, \max 4$ c) $\min 1, \max 13$ ($p = -2$ poza przedziałem) d) $\min -3, \max 13$ ($p = 2$ poza przedziałem) e) $\min -4, \max 5$ f) $\min -\frac{9}{2}, \max 8$
2. a) $x = -2$ b) $x = 10$ c) $x = 5$ d) $x = -2$ e) $x = -1$

Zestawy B

1. a) $t = 4$ s, 80 m b) $t = 2$ s, 19,6 m c) $x = 25$, 225 zł d) $x = 9$, 81 e) $x = 15$, cena 25 zł, 3125 zł
2. a) $P(x) = x(15 - x), x \in (0, 15)$ b) $S(x) = x^2 + (10 - x)^2, x \in [0, 10]$ c) $h = 6 - 2x, P(x) = 4x(6 - 2x), x \in (0, 3)$ d) $P(x) = x(60 - 2x), x \in (0, 30)$ e) $P(r) = 2\pi r(12 - 2r), r \in (0, 6)$

Zestawy C

1. a) kwadrat $7,5 \times 7,5$, pole 56,25 b) 5 i 5, suma kwadratów 50 c) $x = 1,5, h = 3$, pole 18 d) 15×30 m, 450 m² e) $r = 3, h = 6$, pole 36π

Zadania w stylu arkusza

1. B.

1. $p = 4 \notin [0, 3]$, funkcja w przedziale maleje: najmniejsza $f(3) = 9 - 24 + 10 = -5$.
2. A to $q = f(4)$ spoza przedziału, D to wartość największa $f(0)$.

2. A.

1. Ramiona w dół, więc $q = 2$ to wartość największa.
2. Najmniejsza jest na końcu dalszym od osi $x = -1$:
3. $f(-3) = -12 + 2 = -10$ (a $f(0) = -1$).

3. C.

1. $p = 1$; koniec 4 jest od osi o 3, koniec -1 o 2.
2. $f(4) = 32 - 16 + 7 = 23$
3. $f(-1) = 13$.
4. D to wartość, nie argument.

4. PF.

1. $p = 3 \in [0, 4]$, więc najmniejsza to $q = -4$.
2. Na końcach: $f(0) = 5$
3. $f(4) = -3$
4. Największa jest dla $x = 0$ (koniec dalszy od osi), a nie dla $x = 4$.

5. a) B.

1. $-5t^2 + 15t + 20 = 0 \iff t^2 - 3t - 4 = 0 \iff (t - 4)(t + 1) = 0$
2. $t = -1$ odrzucamy.
3. A to chwila, w której piłka jest najwyżej.

b) 31,25:

1. $p = 1,5$

2. $h(1,5) = -11,25 + 22,5 + 20 = 31,25$.

6. A.

1. $I(x) = x(12 - x)$

2. $p = 6$

3. $I(6) = 36$.

4. D to 12^2 .

7. 1. **Miejsca zerowe.** $12 + 0,5x = 0 \iff x = -24$ oraz $200 - 5x = 0 \iff x = 40$; ramiona w dół.

2. **Wierzchołek.**

$$p = \frac{-24 + 40}{2} = 8,$$

liczba całkowita z przedziału $[0, 40]$.

3. **Odpowiedź.** cena $12 + 0,5 \cdot 8 = 16$ zł (przychód $16 \cdot 160 = 2560$ zł).

1 pkt za $x = 8$. 2 pkt za cenę 16 zł.

Uwaga: odpowiedź „ $x = 8$ ” bez ceny: 1 pkt.

8. 1. **Trójkąty.** cztery odcięte trójkąty prostokątne mają przyprostokątne x i $10 - x$.

2. **Funkcja.**

$$S(x) = 100 - 4 \cdot \frac{1}{2}x(10 - x) = 2x^2 - 20x + 100.$$

3. **Wierzchołek.** $p = 5 \in (0, 10)$, ramiona w górę.

4. **Odpowiedź.** $x = 5$, najmniejsze pole $S(5) = 50$.

1 pkt za zapisanie pola $EFGH$ jako różnicy pola kwadratu i pól czterech trójkątów ALBO za $|EF|^2 = x^2 + (10 - x)^2$. 2 pkt za wzór $S(x) = 2x^2 - 20x + 100$. 3 pkt za $x = 5$ i pole 50.

9. 1. **Funkcja.** boki prostokąta to x i $y = -2x + 8$, więc $F(x) = x(-2x + 8)$.

2. **Dziedzina.** pierwsza ćwiartka: $x > 0$ i $-2x + 8 > 0$, czyli $x \in (0, 4)$.

3. **Wierzchołek.** miejsca zerowe 0 i 4, więc $p = 2$.

4. **Odpowiedź.** $P = (2, 4)$, pole 8.

1 pkt za wzór $F(x) = x(8 - 2x)$. 2 pkt za wzór i dziedzinę $x \in (0, 4)$ ALBO za wzór i $p = 2$. 3 pkt za $P = (2, 4)$.

10. 1. **Związek.** krawędzie $x, 3x, h$: $4(x + 3x + h) = 64$, stąd $h = 16 - 4x$.

2. **Funkcja.**

$$\begin{aligned}P(x) &= 2(x + 3x)(16 - 4x) \\&= 8x(16 - 4x) \\&= -32x^2 + 128x.\end{aligned}$$

3. **Dziedzina.** $x > 0$ i $16 - 4x > 0$, czyli $x \in (0, 4)$.

4. **Wierzchołek.** miejsca zerowe 0 i 4, więc $p = 2 \in (0, 4)$; ramiona w dół.

5. **Odpowiedź.** $x = 2$ (krawędzie 2, 6, 8; pole boczne 128).

1 pkt za związek $h = 16 - 4x$ ALBO za zakres $x \in (0, 4)$. **2 pkt** za wzór $P(x) = 8x(16 - 4x)$ ALBO za związek i zakres. **3 pkt** za wzór i dziedzinę ALBO za wzór i $p = 2$. **4 pkt** za wzór, dziedzinę i $x = 2$.

Uwagi: przyjęcie, że podstawa jest kwadratem (inny model): co najwyżej 2 pkt. Tabelka wartości: 0 pkt.

Matura z matematyki · Trening do lekcji 5.4 · Zadania autorskie, formy i punktacja wzorowane na arkuszach i zasadach oceniania CKE z lat 2025–2026.
Wszystkie odpowiedzi sprawdzone (tools/verify/mt5_4.py).