

Trening: funkcja kwadratowa, trzy postacie i wykres

Zestawy krótkich przykładów do lekcji 5.3 Funkcja kwadratowa: trzy postacie i wykres, od odczytywania przez przekształcanie do wyznaczania wzoru, a na końcu zadania w stylu arkusza maturalnego z punktacją. Odpowiedzi są pod każdym zestawem. Nie trzeba robić wszystkiego naraz: po kilka przykładów z zestawu na sesję wystarczy.

POZIOM A · ODCZYTYWANIE

ZESTAWY A

4 zestawy

1 Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = x^2 + 2x - 8$

c) $y = -x^2 + 6x$

d) $y = 2x^2 + 8x + 5$

e) $y = -3x^2 + 6x - 1$

f) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$

2 Odczytaj wierzchołek, zbiór wartości i przedział, w którym funkcja jest rosnąca.

a) $f(x) = (x - 4)^2 + 1$

b) $f(x) = -(x + 2)^2 + 5$

c) $f(x) = 3(x - 1)^2 - 6$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)^2$

e) $f(x) = (x + 5)^2 - 2$

3 Podaj miejsca zerowe i pierwszą współrzędną wierzchołka.

a) $f(x) = (x - 2)(x + 6)$

b) $f(x) = -3(x + 1)(x - 7)$

c) $f(x) = 2x(x - 5)$

d) $f(x) = -(x + 4)^2$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)(x + 3)$

- 4 Skorzystaj z symetrii paraboli: podaj liczbę t różną od danego argumentu, dla której funkcja przyjmuje tę samą wartość.

a) oś symetrii $x = 2$,
 $f(-1) = 7; f(t) = 7$

b) oś symetrii $x = -3$,
 $f(0) = 4; f(t) = 4$

c) wierzchołek $W(1, -2)$,
 -4 jest miejscem zerowym;
drugie miejsce zerowe

d) oś symetrii $x = \frac{1}{2}$,
 $f(3) = 0$; drugie miejsce
zerowe

e) wierzchołek $W(-2, 5)$,
 $f(1) = -4; f(t) = -4$

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · PRZEKSZTAŁCANIE

ZESTAWY B

4 zestawy

- 1 Zapisz funkcję w postaci kanonicznej.

a) $x^2 - 6x + 11$

b) $x^2 + 4x - 1$

c) $2x^2 - 12x + 13$

d) $-x^2 - 2x + 3$

e) $3x^2 + 6x$

f) $x^2 - x + 1$

- 2 Zapisz funkcję w postaci iloczynowej albo uzasadnij, że się nie da.

a) $x^2 - 5x + 6$

b) $x^2 + x - 12$

c) $2x^2 - 8$

d) $-x^2 + 4x - 4$

e) $x^2 - 2x + 3$

f) $3x^2 - 3x - 6$

- 3 Zapisz funkcję w postaci ogólnej.

a) $2(x - 1)^2 + 3$

b) $-(x + 2)^2 + 1$

c) $(x - 3)(x + 5)$

d) $-2(x + 1)(x - 4)$

- 4 Dana jest funkcja $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. Podaj współrzędne wierzchołka wykresu funkcji g .

a) $g(x) = f(x + 3)$

b) $g(x) = f(x - 1)$

c) $g(x) = f(x) - 4$

d) $g(x) = f(x + 2) + 5$

e) $g(x) = f(x - 4) - 1$

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · WZÓR Z INFORMACJI I PARAMETRY

1 Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.



a) wierzchołek $W(-2, 3)$,
wykres przechodzi przez
 $(0, -1)$

b) miejsca zerowe 2 i 6,
zbiór wartości $(-\infty, 8]$

c) $f(0) = 4$, oś symetrii
 $x = 1$, $f(1) = 2$

d) wykres przechodzi przez
 $(1, 0)$, $(3, 0)$ i $(2, -2)$

2 Wyznacz parametry.



a) Dla jakiego m
wierzchołek paraboli
 $y = x^2 - 2mx + 5$ leży na
prostej $x = 3$?

b) Dla jakich b wykres
 $y = x^2 + bx + 9$ ma z osią x
dokładnie jeden punkt
wspólny?

c) Funkcja
 $f(x) = x^2 + bx + c$ ma
wierzchołek $W(2, -5)$.
Wyznacz b i c .

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

ZADANIA MATURALNE

Formy zadań jak w arkuszu CKE. W zadaniach zamkniętych: dokończ zdanie, wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. W zadaniach „prawda/fałsz” oceniasz dwa stwierdzenia, a punkt dostajesz tylko za oba poprawne. Zadania otwarte rozwiązuj z obliczeniami: punkty są za kolejne kroki, a sam wynik bez rachunku zwykle daje mniej.

ZADANIA W STYLU ARKUSZA

17 zadań · 31 pkt

1 (0–1 pkt) Funkcja $f(x) = (x - 2)(x + 4)$ przyjmuje najmniejszą wartość dla x równego



A. -4

B. -1

C. 1

D. 2

2 (0–1 pkt) Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 1$ jest równa



A. -8

B. -3

C. 1

D. 3

3 (0–1 pkt) Wykres funkcji $f(x) = a(x - 1)^2 + 3$ przechodzi przez punkt $(0, 5)$. Wtedy



A. $a = 2$

B. $a = -2$

C. $a = 8$

D. $a = 5$

4 (0-1 pkt) Funkcja $f(x) = -2x^2 + bx + 3$ jest rosnąca w $(-\infty, 2]$ i malejąca w $[2, +\infty)$.
Wtedy

- A. $b = -8$ B. $b = -2$ C. $b = 2$ D. $b = 8$

5 (0-1 pkt) Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2(x + 3)(x - 1)$ jest

- A. $[-8, +\infty)$ B. $(-\infty, -8]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[-3, 1]$

6 (0-1 pkt) Postać kanoniczna funkcji $f(x) = x^2 + 8x + 10$ to

- A. $(x + 4)^2 - 6$ B. $(x - 4)^2 - 6$ C. $(x + 4)^2 + 10$ D. $(x + 8)^2 - 54$

7 (0-1 pkt) Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ są -3 i 5 . Wtedy

- A. $b = -2$ B. $b = 2$ C. $b = -15$ D. $b = 8$

8 (0-1 pkt) Wykres funkcji $y = -x^2 + 4x - 5$ ma z osią x

- A. 0 punktów wspólnych B. 1 punkt wspólny
C. 2 punkty wspólne D. nieskończenie wiele punktów wspólnych

9 (0-1 pkt) Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f , ma współrzędne $(1, -3)$. Liczba $t \neq -5$ spełnia warunek $f(t) = f(-5)$. Liczba t jest równa

- A. 5 B. 7 C. -3 D. 11

10 (0-3 pkt) Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W = (2, -5)$, która przecina oś y w punkcie $(0, 3)$.

a) (0-1) Funkcja f jest malejąca w przedziale

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $(-\infty, -5]$ D. $[-5, +\infty)$

b) (0-1) Oceń prawdziwość stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1. $f(-1) = f(5)$. P / F

2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, -5]$. P / F

c) (0-1) Uzupełnij zdanie. Równanie $f(x) = 3$ ma dwa rozwiązania: 0 oraz

- 11 (0–2 pkt) Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f , ma współrzędne $(-1, 4)$, a punkt $(1, 0)$ należy do tej paraboli. Wybierz dwa wzory, którymi można opisać funkcję f .
- A. $-(x+1)^2 + 4$ B. $-(x-1)^2 + 4$ C. $-x^2 - 2x + 3$
D. $-x^2 + 2x + 3$ E. $(x-1)(x+3)$ F. $(x+1)^2 + 4$
-
- 12 (0–2 pkt) Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są 0 i 4, a zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 8]$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.
-
- 13 (0–3 pkt) Funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ ma wierzchołek $W(-1, -4)$. Oblicz b i c , a następnie wyznacz miejsca zerowe funkcji f .
-
- 14 (0–2 pkt) Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = f(x+1) + 2$. Wyznacz wzór funkcji g w postaci ogólnej i podaj współrzędne wierzchołka jej wykresu.
-
- 15 (0–3 pkt) Funkcja kwadratowa f ma oś symetrii $x = 3$, a ponadto $f(0) = 5$ i $f(1) = 0$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.
-
- 16 (0–3 pkt) Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 2x + 8$. Punkty A i B to punkty przecięcia wykresu funkcji f z osią x , a punkt C to wierzchołek paraboli. Oblicz pole trójkąta ABC .
-
- 17 (0–4 pkt) Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f , ma współrzędne $(-2, 8)$. Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = f(x-3)$, a liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji g . Wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze



Odpowiedzi

Zestawy A

- a) $W(2, -1)$ b) $W(-1, -9)$ c) $W(3, 9)$ d) $W(-2, -3)$ e) $W(1, 2)$ f) $W(1, \frac{5}{2})$
- a) $W(4, 1), [1, +\infty)$, rosnąca w $[4, +\infty)$ b) $W(-2, 5), (-\infty, 5]$, rosnąca w $(-\infty, -2]$ c) $W(1, -6), [-6, +\infty)$, rosnąca w $[1, +\infty)$ d) $W(-3, 0), (-\infty, 0]$, rosnąca w $(-\infty, -3]$ e) $W(-5, -2), [-2, +\infty)$, rosnąca w $[-5, +\infty)$
- a) $2i - 6, p = -2$ b) $-1i + 7, p = 3$ c) $0i + 5, p = \frac{5}{2}$ d) tylko $-4, p = -4$ e) $3i - 3, p = 0$
- a) $t = 5$ b) $t = -6$ c) 6 d) -2 e) $t = -5$

Zestawy B

- a) $(x - 3)^2 + 2$ b) $(x + 2)^2 - 5$ c) $2(x - 3)^2 - 5$ d) $-(x + 1)^2 + 4$ e) $3(x + 1)^2 - 3$ f) $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$
- a) $(x - 2)(x - 3)$ b) $(x + 4)(x - 3)$ c) $2(x - 2)(x + 2)$ d) $-(x - 2)^2$ e) nie da się: $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ f) $3(x - 2)(x + 1)$
- a) $2x^2 - 4x + 5$ b) $-x^2 - 4x - 3$ c) $x^2 + 2x - 15$ d) $-2x^2 + 6x + 8$
- a) $(-1, 1)$ b) $(3, 1)$ c) $(2, -3)$ d) $(0, 6)$ e) $(6, 0)$

Zestawy C

- a) $-(x + 2)^2 + 3 = -x^2 - 4x - 1$ b) $p = 4, f(4) = -4a = 8, a = -2: -2x^2 + 16x - 24$ c) $W(1, 2), a + 2 = 4, a = 2: 2x^2 - 4x + 4$ d) $a(x - 1)(x - 3), f(2) = -a = -2, a = 2: 2x^2 - 8x + 6$
- a) $p = m = 3$ b) $\Delta = b^2 - 36 = 0: b = 6$ albo $b = -6$ c) $-\frac{b}{2} = 2$, więc $b = -4; f(2) = 4 - 8 + c = -5$, więc $c = -1$

Zadania w stylu arkusza

1. B.

1. Wierzchołek w połowie między miejscami zerowymi 2 i -4:

2. $p = -1$.

3. D i A to same miejsca zerowe.

2. A.

1. $p = 3$

2. $q = f(3) = 9 - 18 + 1 = -8$.

3. D to p zamiast q , C to c .

3. A. $f(0) = a + 3 = 5$.

4. D. $p = -\frac{b}{2(-2)} = \frac{b}{4} = 2$, więc $b = 8$. Znak a w mianowniku to częsta pułapka.

5. A. $p = -1, q = 2 \cdot 2 \cdot (-2) = -8$, ramiona w górę. C myli zbiór wartości z p , D to przedział między miejscami zerowymi.

6. A. $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$, więc $f(x) = (x + 4)^2 - 6$.

7. A. $f(x) = (x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$. C to wartość c .

8. A. $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$. (Wierzchołek $W(2, -1)$ leży pod osią, a ramiona idą w dół.)

9. B.

1. -5 i t leżą symetrycznie względem osi $x = 1$:

2. $t = 2 \cdot 1 - (-5) = 7$.

3. A to odbicie względem zera, C to druga współrzędna wierzchołka.

10. a) A. Z punktu $(0, 3)$: $3 = 4a - 5$, więc $a = 2 > 0$, ramiona w górę i funkcja maleje na lewo od wierzchołka. C i D mylą przedział argumentów z wartością q .

b) PF. -1 i 5 leżą symetrycznie względem osi $x = 2$. Przy $a > 0$ zbiór wartości to $[-5, +\infty)$.

c) 4, odbicie 0 względem osi $x = 2$.

11. A, C.

1. Postać kanoniczna. z wierzchołka: $f(x) = a(x + 1)^2 + 4$.

2. Współczynnik a . $f(1) = 4a + 4 = 0$, więc $a = -1$.

3. Postać ogólna. $-(x + 1)^2 + 4 = -x^2 - 2x + 3$.

4. Pozostałe. B i D to wierzchołek z błędem znaku; E ma dobre miejsca zerowe, ale $a = 1$; F ma ramiona w górę.

2 pkt za dwie poprawne litery, 1 pkt za jedną poprawną (gdy wybrano jedną albo dwie litery). Trzy litery lub więcej: 0 pkt.

12. 1. Wierzchołek. $p = \frac{0+4}{2} = 2$, a zbiór wartości $(-\infty, 8]$ daje $q = 8$.

2. Postać kanoniczna. $f(x) = a(x - 2)^2 + 8$.

3. Współczynnik a . z miejsca zerowego 0: $f(0) = 4a + 8 = 0$, więc $a = -2$.

4. Postać ogólna.

$$f(x) = -2(x - 2)^2 + 8 = -2x^2 + 8x.$$

1 pkt za zapisanie $f(x) = a(x - 2)^2 + 8$ ALBO $f(x) = ax(x - 4)$ z warunkiem $f(2) = 8$. 2 pkt za wzór $f(x) = -2x^2 + 8x$.

Uwaga: samo $a = -2$ „odczytane” bez rachunku: 1 pkt.

13. 1. Współczynnik b . $p = -\frac{b}{2} = -1$, więc $b = 2$.

2. Współczynnik c . $f(-1) = 1 - 2 + c = -4$, więc $c = -3$.

3. Miejsca zerowe.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 &= (x + 3)(x - 1) = 0 \\x &= -3 \text{ lub } x = 1.\end{aligned}$$

1 pkt za $b = 2$ ALBO za zapisanie $f(x) = (x + 1)^2 - 4$. 2 pkt za $b = 2$ i $c = -3$ (albo za postać $x^2 + 2x - 3$). 3 pkt za miejsca zerowe -3 i 1 .

Uwaga: błąd rachunkowy przy poprawnej metodzie i konsekwentne dokończenie: co najwyżej 2 pkt.

14. 1. Wierzchołek f . $f(x) = (x - 2)^2 - 1$, więc $(2, -1)$.
2. Przesunięcie. $f(x + 1)$: o 1 w lewo; +2: o 2 w górę. Wierzchołek g : $(1, 1)$.
3. Wzór g .

$$g(x) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

1 pkt za wierzchołek $(1, 1)$ ALBO za podstawienie $g(x) = (x + 1)^2 - 4(x + 1) + 3 + 2$. 2 pkt za wzór $g(x) = x^2 - 2x + 2$ i wierzchołek.

Uwaga: przesunięcie w złą stronę (wierzchołek $(3, 1)$) i konsekwentny wzór: co najwyżej 1 pkt.

15. 1. Postać kanoniczna. oś $x = 3$ daje $f(x) = a(x - 3)^2 + q$.
2. Układ równań.

$$\begin{cases} f(0) = 9a + q = 5 \\ f(1) = 4a + q = 0 \end{cases} \Rightarrow 5a = 5, a = 1, q = -4.$$

3. Postać ogólna.

$$f(x) = (x - 3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5.$$

1 pkt za postać $a(x - 3)^2 + q$ z układem równań na a i q ALBO za drugie miejsce zerowe 5 (odbicie 1 względem osi) i postać $a(x - 1)(x - 5)$. 2 pkt za $a = 1$ (i $q = -4$). 3 pkt za wzór $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

16. 1. Miejsca zerowe. $-x^2 + 2x + 8 = -(x - 4)(x + 2)$, więc $A = (-2, 0)$, $B = (4, 0)$ i $|AB| = 6$.
2. Wierzchołek. $p = 1$, $q = f(1) = 9$: $C = (1, 9)$, wysokość trójkąta to 9.
3. Pole.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27.$$

1 pkt za miejsca zerowe ALBO za wierzchołek $C = (1, 9)$. 2 pkt za miejsca zerowe i wierzchołek. 3 pkt za pole 27.

17. 1. Miejsce zerowe f . $g(3) = f(3 - 3) = f(0) = 0$, więc 0 jest miejscem zerowym f .
2. Współczynnik a . $f(x) = a(x + 2)^2 + 8$ i $f(0) = 4a + 8 = 0$, więc $a = -2$.
3. Drugie miejsce zerowe. odbicie 0 względem osi $x = -2$: -4 .
4. Postać iloczynowa.

$$f(x) = -2x(x + 4).$$

1 pkt za jedno z: miejsce zerowe f równe 0; wierzchołek wykresu g w punkcie $(1, 8)$; postać $f(x) = a(x + 2)^2 + 8$. 2 pkt za postać kanoniczną z warunkiem $f(0) = 0$ (równanie $4a + 8 = 0$) ALBO za $f(x) = ax(x + 4)$. 3 pkt za $a = -2$. 4 pkt za wzór $f(x) = -2x(x + 4)$.

Uwaga: zły kierunek przesunięcia (np. miejsce zerowe f równe 6) i konsekwentne dokończenie: co najwyżej 2 pkt.