

Funkcja liniowa

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ ma tylko dwa współczynniki, ale na maturze pyta się o nie na kilka sposobów: o znak a i b z rysunku, o warunek monotoniczności z parametrem, o równoległość prostych, o przesunięcie wykresu i o kąt nachylenia. Ta lekcja zbiera te pytania i pokazuje, jak z dwóch informacji odtworzyć wzór.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 45
min zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy: V.5,
V.6

W TEJ LEKCJI

- 0 Dwie liczby, cały wykres
- 1 Co znaczą
 a i
 b
- 2 Wzór z dwóch informacji
- 3 Parametr: monotoniczność, miejsce zerowe, równoległość
- 4 Przesunięcie wykresu
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Dwie liczby, cały wykres

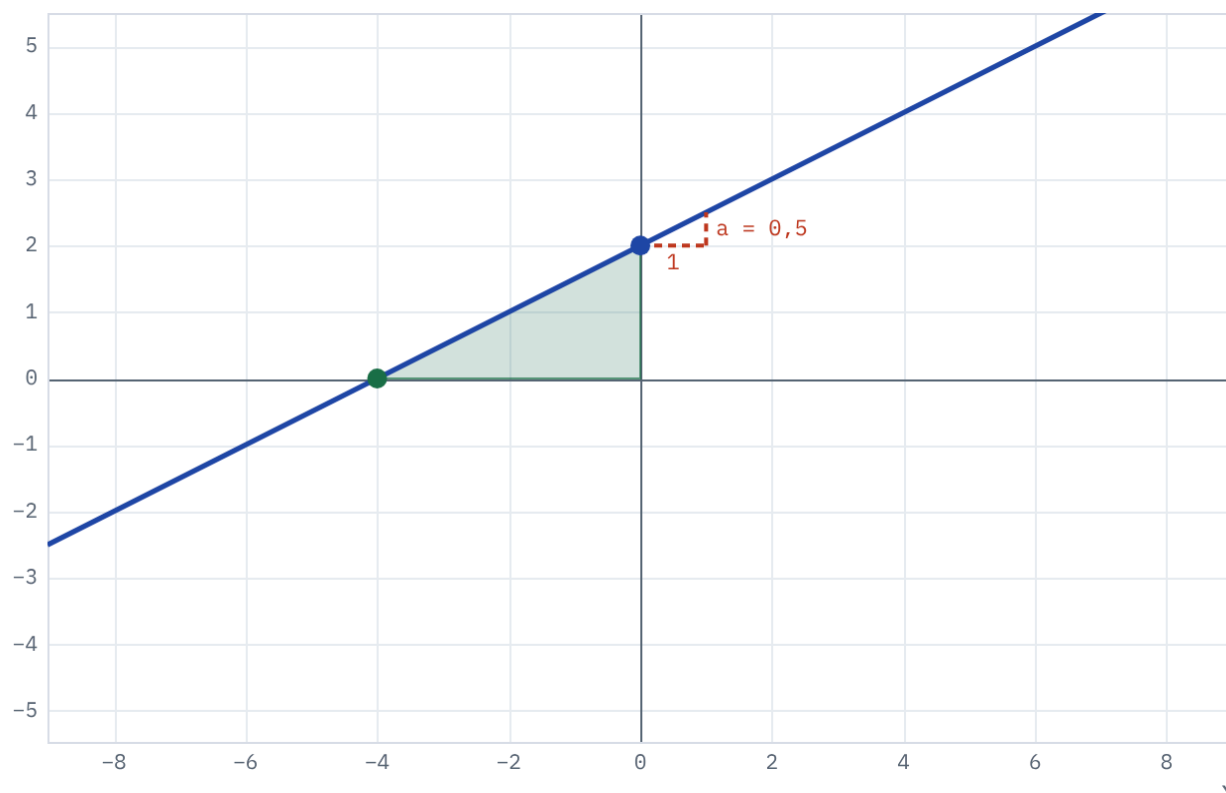
Taksówka liczy 8 zł za wejście i 3 zł za każdy kilometr: $f(x) = 3x + 8$. Liczba 8 to cena przy $x = 0$, czyli punkt $(0, 8)$ na osi Oy . Liczba 3 mówi, o ile rośnie cena, gdy przejedziesz kilometr dalej. Każde pytanie o funkcję liniową sprowadza się do tych dwóch ról: b to **start** na osi Oy , a to **zmiana** na jednostkę.

Co znaczą a i b

 FUNKCJA LINIOWA $f(x) = ax + b$

- Wykres to prosta przecinająca oś Oy w punkcie $(0, b)$.
- a to **współczynnik kierunkowy**: $a > 0$ rosnąca, $a < 0$ malejąca, $a = 0$ stała.
- $a = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α to kąt nachylenia prostej do osi Ox (dla $a < 0$ kąt jest rozwarty).
- Miejsce zerowe dla $a \neq 0$: $x_0 = -\frac{b}{a}$. Dla $a = 0$: brak miejsca zerowego, gdy $b \neq 0$, każda liczba, gdy $b = 0$.
- Przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , $x_1 \neq x_2$: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

SYMULACJA 1 Prosta $y = ax + b$. Zmieniaj a i b . Przerywany trójkąt to krok o 1 w prawo i o a w górę (albo w dół). Zielony trójkąt odcinają osie układu; jego pole to częste pytanie w zadaniach P/F. Ustaw $a = 0$ i zobacz, kiedy znika miejsce zerowe.



— $y = ax + b$ — trójkąt nachylenia (1 w prawo, a w górę) — trójkąt odcięty przez osie

wzór $y = 0,5x + 2$

monotoniczność **rosnąca**

miejsce zerowe $-b/a$ -4

przecięcie z Oy $(0, 2)$

kąt nachylenia α $26,6^\circ$, $\tan \alpha = 0,5$

pole trójkąta 4

Krok o 1 w prawo zmienia y o $a = 0,5$. Kąt nachylenia do osi Ox ma $\tan \alpha = a$. Miejsce zerowe $x = -b/a = -4$.

Stan na rysunku: $a = 0,5$, $b = 2$; miejsce zerowe -4 , kąt nachylenia $26,6^\circ$.

Przykład 1.1

Znaki z rysunku

Prosta jest wykresem funkcji $f(x) = ax + b$, opada w prawo i przecina oś Oy poniżej zera. Jakie są znaki a i b ? Czy miejsce zerowe jest dodatnie?

- 1 Opada, więc $a < 0$. Przecina Oy poniżej zera, więc $b < 0$.
- 2 $x_0 = -\frac{b}{a}$: iloraz dwóch liczb ujemnych jest dodatni, z minusem ujemny.

Wynik: $a < 0$, $b < 0$, miejsce zerowe ujemne (prosta przecina Ox na lewo od zera, co widać też na rysunku).

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Podaj miejsce zerowe i punkt przecięcia z osią Oy wykresu $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$.

- 2 Prosta $y = ax + b$ jest nachylona do osi Ox pod kątem 60° i przechodzi przez punkt $(0, -2)$. Podaj jej wzór.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

2 Wzór z dwóch informacji

Dwa nieznanne współczynniki wymagają dwóch informacji: dwóch punktów, punktu i kąta, miejsca zerowego i wartości w zerze. Każda informacja to jedno równanie.

Przykład 2.1

Prosta przez dwa punkty

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $A = (-2, 7)$ i $B = (4, -2)$.

- 1 $a = \frac{-2 - 7}{4 - (-2)} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$.
- 2 Z punktu A : $7 = -\frac{3}{2} \cdot (-2) + b = 3 + b$, więc $b = 4$.

Wynik: $f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$.

Sprawdzenie: $f(4) = -6 + 4 = -2 \checkmark$.

Przykład 2.2

Miejsce zerowe i wartość w zerze

Funkcja liniowa ma miejsce zerowe 4, a $f(0) = 2$. Podaj wzór.

- 1 $f(0) = b = 2$.
- 2 $f(4) = 4a + 2 = 0$, więc $a = -\frac{1}{2}$.

Wynik: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 6 min

- 1 Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez $(1, 1)$ i $(3, 7)$.

- 2 Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt $(2, 5)$ i jest równoległy do wykresu $y = -3x + 1$. Podaj wzór.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

Parametr: monotoniczność, miejsce zerowe, równoległość

🔑 WARUNKI DLA $f(x) = ax + b$, GDY a I b ZALEŻĄ OD PARAMETRU

- rosnąca $\iff a > 0$; malejąca $\iff a < 0$; stała $\iff a = 0$;
- brak miejsca zerowego $\iff a = 0$ i $b \neq 0$;
- wykresy $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe $\iff a_1 = a_2$; nie mają punktów wspólnych $\iff a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$.

Przykład 3.1

Malejąca dla jakich

k

?

Funkcja $f(x) = (2k - 6)x + k$ jest malejąca. Wyznacz k .

- 1 Warunek dotyczy tylko a : $2k - 6 < 0$.
- 2 $k < 3$. Wyraz wolny k nie ma wpływu na monotoniczność.

Wynik: $k \in (-\infty, 3)$.

🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 6 min

- 1 Dla jakiej wartości m funkcja $f(x) = (m + 4)x - 2$ nie ma miejsca zerowego?
■ ■ ■
- 2 Dla jakiej wartości m wykresy $y = (3m - 1)x + 2$ i $y = 5x - 4$ nie mają punktów wspólnych?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

Przesunięcie wykresu

PRZESUNIĘCIA

Wykres $y = f(x - p) + q$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ przez przesunięcie o p w prawo i o q w górę. Dla funkcji liniowej: $f(x - p) = a(x - p) + b = ax - ap + b$. Współczynnik kierunkowy się nie zmienia, zmienia się tylko wyraz wolny.

Przykład 4.1

Przesunięcie w prawo

Wykres $f(x) = 4x$ przesunięto o 2 jednostki w prawo. Podaj wzór funkcji g .

- 1 $g(x) = f(x - 2) = 4(x - 2)$.
- 2 $g(x) = 4x - 8$.

Wynik: $g(x) = 4x - 8$. Częsty błąd to $4x - 2$: odjęcie 2 od wartości przesuwającego wykres w dół, a nie w prawo.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Wykres $f(x) = -2x + 1$ przesunięto o 3 jednostki w górę. Podaj wzór i miejsce zerowe nowej funkcji.

- 2 Wykres $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ przesunięto o 4 jednostki w lewo. Podaj wzór.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 38 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · ODCZYT ZE WZORU

ZESTAWY A

1 Podaj miejsce zerowe i punkt przecięcia wykresu z osią Oy .



a) $f(x) = 2x - 8$

b) $f(x) = -\frac{3}{4}x - 3$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Podaj kąt nachylenia wykresu do osi Ox .



a) $y = x + 2$

b) $y = -x + 4$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe  średnie  trudniejsze

POZIOM B · WZÓR Z DWÓCH INFORMACJI

ZESTAWY B

1 Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez podane punkty.



a) $(0, 3)$ i $(2, 7)$

b) $(-3, 5)$ i $(3, -3)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Wyznacz wzór funkcji liniowej spełniającej warunki.



a) miejsce zerowe -4 ,

$f(0) = -2$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe  średnie  trudniejsze

POZIOM C · PARAMETR I PRZESUNIĘCIA

ZESTAWY C

1 Wyznacz wszystkie wartości parametru.



a) $f(x) = (m - 5)x + 2$ jest
rosnąca

b) $f(x) = (2m + 1)x + 7$ nie
ma miejsca zerowego

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Podaj wzór funkcji g po przesunięciu wykresu f .



- a) $f(x) = 2x$, o 3 w prawo b) $f(x) = 4x + 1$, o 1 w lewo
i o 2 w dół

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ trudniejsze

Pełny trening (38 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

Funkcja liniowa to w arkuszach z lat 2024–2026 prawie wyłącznie zadania za 1 punkt: zamknięte i P/F. Według sprawozdań CKE w maju 2025 zadanie o parametrze, dla którego funkcja nie ma miejsca zerowego, rozwiązało 72% zdających, tyle samo co odczyt znaków a i b z rysunku w maju 2026. Wyrażnie słabiej (55%) wypadło w 2026 zadanie z kątem nachylenia, czyli z równością $a = \tan \alpha$. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 5 pkt · ok. 10 min

1 (0–1 pkt) Funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x - k$ ma miejsce zerowe większe od 6. Wynika stąd, że



- A. $k \in (-\infty, 2)$ B. $k \in (2, +\infty)$ C. $k \in (-\infty, 18)$ D. $k \in (18, +\infty)$

2 (0–1 pkt) Wykres funkcji $f(x) = -3x$ przesunięto o 2 jednostki w lewo. Otrzymano wykres funkcji



- A. $g(x) = -3x - 6$ B. $g(x) = -3x + 6$ C. $g(x) = -3x + 2$ D. $g(x) = -3x - 2$

3 (0–1 pkt) Dana jest funkcja $f(x) = (k - 1)x + (k + 4)$. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P albo F.



1. Funkcja f jest rosnąca dla każdego $k \in (-4, +\infty)$. P F
2. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $(0, 6)$ dla $k = 2$. P F

4 (0–2 pkt) Wykres funkcji $f(x) = 2x + m^2 - 4m$ przecina oś Oy w punkcie $(0, -4)$. Oblicz m . Zapisz obliczenia.



▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ trudniejsze

Najczęstsze błędy

- × „ $f(x) = (k + 2)x + (k - 3)$ maleje dla $k < 3$.”

O monotoniczności decyduje tylko $a = k + 2$: maleje dla $k < -2$.

- × „Przesunięcie o 2 w prawo to $f(x) - 2$.”

$f(x) - 2$ to przesunięcie w dół. W prawo: $f(x - 2)$.

- × „Kąt nachylenia $y = -x + 3$ to -45° .”

Kąt nachylenia do osi Ox mierzy się od dodatniej półosi przeciwnie do ruchu wskazówek zegara: $\text{tg } \alpha = -1$, $\alpha = 135^\circ$.

- × „Proste równoległe to te z tym samym b .”

Równoległość to równe a . Równe b oznacza wspólny punkt na osi Oy .

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Gdzie wykres $y = 5x - 7$ przecina oś Oy ?

W $(0, -7)$.

- 2 Kiedy funkcja liniowa nie ma miejsca zerowego?

Gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.

- 3 Jaki jest współczynnik kierunkowy prostej nachylonej pod kątem 30° ?

$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- 4 Co się dzieje z a po przesunięciu wykresu?

Nic: zmienia się tylko wyraz wolny.

WSPÓŁCZYNNIKI

$(0, b)$ na osi Oy , $x_0 = -\frac{b}{a}$

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$a > 0$ rośnie, $a < 0$ maleje

WARUNKI

równoległe: $a_1 = a_2$

brak zera: $a = 0, b \neq 0$

w prawo o p : $f(x - p)$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne”, w części o prostych w układzie współrzędnych, są: równanie $y = ax + b$ z $a = \operatorname{tg} \alpha$, punkt $(0, b)$, prosta przez punkt i przez dwa punkty oraz warunek równoległości $a_1 = a_2$. Nie ma w niej wzoru na miejsce zerowe ani warunków z parametrem. Przesunięcie jest podane tylko dla punktu: wektor $[a, b]$ przenosi (x, y) na $(x + a, y + b)$. Regułę $y = f(x - p) + q$ trzeba z tego wyprowadzić samodzielnie.

Dalej: funkcja kwadratowa (lekcja 5.3 Funkcja kwadratowa: trzy postacie i wykres), a z rachunku: układy równań liniowych (3.2 Równania i nierówności kwadratowe, równania wielomianowe w postaci iloczynowej).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $-\frac{2}{3}x + 4 = 0$, więc $x = 6$.
2. Przecięcie z Oy : $(0, 4)$.
1. $a = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $b = -2$.
2. $y = \sqrt{3}x - 2$.

Zadania • część 2

1. $a = \frac{7-1}{3-1} = 3$
2. $1 = 3 + b$, więc $b = -2$.
3. $f(x) = 3x - 2$.
1. Równoległe: $a = -3$.
2. $5 = -6 + b$, więc $b = 11$.
3. $f(x) = -3x + 11$.

Zadania • część 3

1. Potrzeba $a = 0$ i $b \neq 0$: $m + 4 = 0$, a $b = -2 \neq 0 \checkmark$.
2. $m = -4$.
1. $3m - 1 = 5$, więc $m = 2$.
2. Wyrazy wolne $2 \neq -4$, więc proste są równoległe i różne.

Zadania • część 4

1. $g(x) = -2x + 4$
2. miejsce zerowe 2.
1. $g(x) = f(x + 4) = \frac{1}{2}(x + 4) - 3$
2. $= \frac{1}{2}x - 1$.

Zestawy A

- a) 4 ; $(0, -8)$ b) -4 ; $(0, -3)$
- a) 45° b) 135°

Zestawy B

- a) $y = 2x + 3$ b) $y = -\frac{4}{3}x + 1$
- a) $y = -\frac{1}{2}x - 2$

Zestawy C

- a) $m > 5$ b) $m = -\frac{1}{2}$
- a) $g(x) = 2x - 6$ b) $g(x) = 4x + 3$

Zadania w stylu maturalnym

1. B.

1. $\frac{1}{3}x - k = 0$, więc $x_0 = 3k$.

2. $3k > 6$, więc $k > 2$.

2. A.

1. $g(x) = f(x + 2) = -3(x + 2)$

2. $= -3x - 6$.

3. FP.

1. Rosnąca $\iff k - 1 > 0$, czyli $k > 1$; np. dla $k = 0$ funkcja maleje. Liczba -4 pochodzi z wyrazu wolnego, który nie decyduje o monotoniczności.

2. $f(0) = k + 4 = 6$ dla $k = 2$.

4. 1. **Warunek.** $f(0) = m^2 - 4m = -4$.

2. **Równanie.** $m^2 - 4m + 4 = 0$, czyli $(m - 2)^2 = 0$.

3. **Wynik.** $m = 2$ (jedyne rozwiązanie).

1 pkt za równanie $m^2 - 4m = -4$. **2 pkt** za $m = 2$ z uzasadnieniem, że innych rozwiązań nie ma.

Uwaga: samo podanie $m = 2$ (np. zgadnięte) bez rozwiązania równania daje 1 pkt.

Matura z matematyki · Lekcja 5.2: Funkcja liniowa · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości i Uwagi według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt5_2.py).