

Funkcja i jej wykres: odczytywanie własności

Najczęstsze zadanie z funkcji na maturze podstawowej to funkcja sklejona z dwóch albo trzech odcinków i cztery luki do uzupełnienia: dziedzina, zbiór wartości i zbiory argumentów spełniających podany warunek. Rachunku jest tu mało. Punkty traci się na nawiasach w miejscach, gdzie odcinki się stykają, i na zbiorach, które obejmują kilka odcinków naraz.

CZAS

ok. 35 min
czytania + ok. 50
min zadań

ZADANIA

9 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy: V.1,
V.2, V.3, V.4

W TEJ LEKCJI

- 0 Jedno pytanie, trzy odcinki
- 1 Co jest funkcją
- 2 Wartości ze wzoru i funkcja określona przedziałami
- 3 Odczyt z wykresu
- 4 Zbiory argumentów dla warunku

$$f(x) \geq c$$

- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Jedno pytanie, trzy odcinki

Funkcja f jest określona tak: na przedziale $[-4, -1]$ wzorem $f(x) = x + 4$, na przedziale $(-1, 2)$ jest stale równa 3, a na przedziale $[2, 5)$ jest równa $-2x + 7$. Dla jakich argumentów jej wartości są dodatnie?

Odpowiedzią jest jeden przedział $(-4, \frac{7}{2})$, choć składa się z trzech kawałków: lewy odcinek jest dodatni od $x > -4$, środkowy cały, prawy do $x < \frac{7}{2}$. W $x = -4$ wartość jest równa 0, więc ten koniec jest otwarty. Kawałki stykają się w $x = -1$ i $x = 2$ bez przerwy, więc nawiasy w środku znikają. Te dwa ruchy, czyli sprawdzenie końców i sklejenie kawałków, wystarczają na cztery punkty w typowym zadaniu.

Co jest funkcją

FUNKCJA

Funkcja $f: X \rightarrow Y$ przyporządkowuje **każdemu** elementowi zbioru X (dziedziny) **dokładnie jeden** element zbioru Y . Zapis $f(x)$ oznacza wartość funkcji dla argumentu x .

Funkcję można podać wzorem, tabelą, wykresem albo opisem słownym. Na wykresie: każda prosta pionowa $x = a$, gdzie a należy do dziedziny, przecina wykres w dokładnie jednym punkcie.

Przykład 1.1

Funkcja dana tabelą

Funkcja f jest określona tabelą:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	0	-1	0	2	-1	4

Podaj liczbę miejsc zerowych, zbiór wartości i liczbę argumentów, dla których $f(x) = 4$.

- 1 Miejsca zerowe: $x = -2$ i $x = 0$, czyli dwa.
- 2 Zbiór wartości to wszystkie liczby z drugiego wiersza: $\{-1, 0, 2, 4\}$.
- 3 $f(x) = 4$ dla $x = -3$ i $x = 3$, czyli dla dwóch argumentów.

Wynik: 2 miejsca zerowe; zbiór wartości $\{-1, 0, 2, 4\}$; dwa argumenty. Dziedzina ma tu tylko siedem elementów, więc wykres to siedem punktów, a nie linia.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Czy przyporządkowanie „każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej dzielnik” jest funkcją?

- 2 Czy okrąg $x^2 + y^2 = 4$ jest wykresem funkcji?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

FUNKCJA OKREŚLONA PRZEDZIAŁAMI

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dla } x \leq a \\ h(x) & \text{dla } x > a \end{cases}$$

Wartość liczysz wzorem tej gałęzi, do której należy argument. Miejsce zerowe szukasz w każdej gałęzi osobno i zostawiasz tylko te rozwiązania, które należą do przedziału tej gałęzi.

Przykład 2.1

Miejsca zerowe z odrzucaniem

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$.

- 1 Gałąź $x \leq 1$: $x^2 - 4 = 0$, więc $x = -2$ albo $x = 2$. Warunek $x \leq 1$ spełnia tylko -2 .
- 2 Gałąź $x > 1$: $3 - x = 0$, więc $x = 3$, i $3 > 1 \checkmark$.

Wynik: miejsca zerowe -2 i 3 . Liczba 2 nie jest miejscem zerowym, bo $f(2) = 3 - 2 = 1$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 5 min

- 1 Dla $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 - 3 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$ oblicz $f(-2)$, $f(0)$ i $f(3)$.

- 2 Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{dla } x \geq -1 \\ x - 3 & \text{dla } x < -1 \end{cases}$.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ trudniejsze

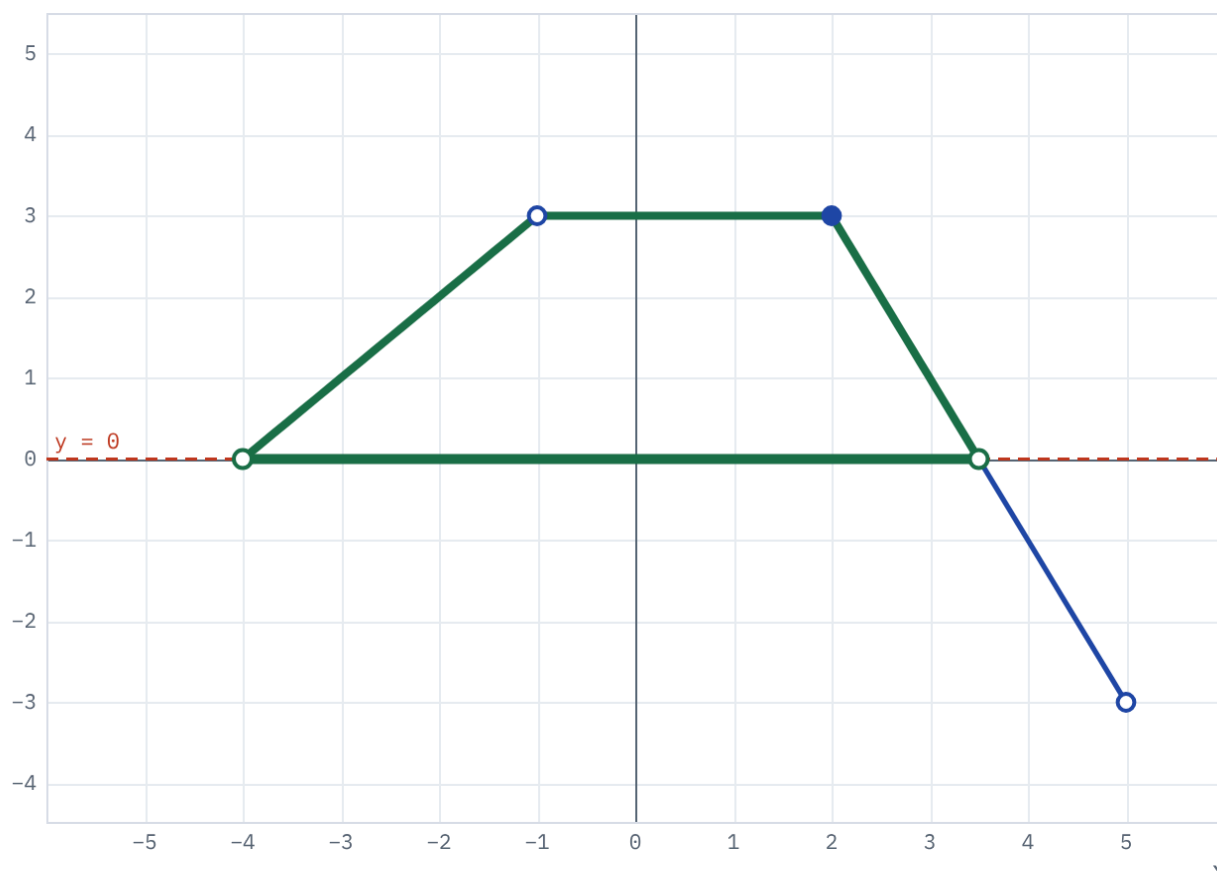
Odczyt z wykresu

CO ODCZYTUJESZ I SKĄD

- **Dziedzina:** rzut wykresu na oś Ox . **Zbiór wartości:** rzut na oś Oy .
- **Miejsca zerowe:** pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu z osią Ox .
- **Monotoniczność:** przedziały, na których wykres idzie w górę (rosnąca), w dół (malejąca) albo poziomo (stała).
- **Wartość największa i najmniejsza:** najwyższy i najniższy punkt wykresu, o ile istnieje. Puste kółko na końcu oznacza, że ta wartość nie jest przyjmowana.
- **Pełne kółko** to punkt należący do wykresu: przy końcu przedziału nawias kwadratowy. **Puste kółko:** nawias okrągły.

SYMULACJA 1

Funkcja przedziałami liniowa i prosta $y = c$. Wybierz funkcję i warunek, przesuwaj c . Na zielono części wykresu spełniające warunek i odpowiadający im zbiór argumentów na osi Ox . Funkcja 2 to funkcja z prologu i z przykładu 3.1. Ustaw $c = 3$ i warunek $f(x) = c$: rozwiązaniem równania jest cały przedział.



— wykres f — prosta $y = c$ — zbiór rozwiązań

dziedzina $[-4, 5)$

zbiór wartości $(-3, 3]$

$f(x) > 0$ $(-4, 7/2)$

Nawias przy końcu przedziału bierzesz z wykresu: kółko pełne to „należy” (nawias kwadratowy), puste to „nie należy” (okrągły). Przy nierówności ostrej punkt, w którym $f(x) = c$, nie należy do rozwiązań.

Stan na rysunku: funkcja 2, warunek $f(x) > 0$; zbiór rozwiązań $(-4, 7/2)$.

Przykład 3.1

Komplet własności

$$\text{Funkcja } f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x \in [-4, -1] \\ 3 & \text{dla } x \in (-1, 2) \\ -2x + 7 & \text{dla } x \in [2, 5) \end{cases} \quad (\text{funkcja 2 w symulacji}). \text{ Odczytaj jej własności.}$$

- 1 Dziedzina: $[-4, 5)$.
- 2 Zbiór wartości: lewa gałąź daje $[0, 3]$, środkowa 3, prawa od $f(2) = 3$ w dół do -3 , ale 5 nie należy do dziedziny, więc -3 nie jest przyjmowane. Razem $(-3, 3]$.
- 3 Miejsca zerowe: $x + 4 = 0$ dla $x = -4$; $-2x + 7 = 0$ dla $x = \frac{7}{2} \in [2, 5)$.
- 4 Monotoniczność: rosnąca w $[-4, -1]$, stała w $[-1, 2]$, malejąca w $[2, 5)$.
- 5 Największa wartość 3, dla każdego $x \in [-1, 2]$. Najmniejszej wartości **nie ma**.

Wynik: $D = [-4, 5)$, $ZW = (-3, 3]$, miejsca zerowe -4 i $\frac{7}{2}$, największa wartość 3, najmniejszej brak.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 6 min

- 1 Funkcja $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [-5, -2) \\ -x & \text{dla } x \in [-2, 1] \\ x - 2 & \text{dla } x \in (1, 4] \end{cases}$ (funkcja 1 w symulacji). Podaj dziedzinę, zbiór wartości i miejsca zerowe.

- 2 Dla tej samej funkcji podaj przedziały monotoniczności oraz najmniejszą wartość i argument, dla którego jest przyjmowana.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Zbiory argumentów dla warunku $f(x) \geq c$

PRZEPIS NA NIERÓWNOŚĆ Z WYKRESU

1. Narysuj prostą $y = c$.
2. Na każdej gałęzi znajdź część wykresu nad prostą (dla $>$) albo pod nią (dla $<$). Punkty przecięcia policz ze wzoru gałęzi.
3. Rzuć te części na oś Ox . Końce: przy nierówności ostrej punkt przecięcia jest wykluczony, przy końcu dziedziny decyduje kółko.
4. Sklej kawałki, które się stykają, i zapisz sumę przedziałów.

Gałąź stała $f(x) = c$ na przedziale daje równanie $f(x) = c$ z **przedziałem** rozwiązań.

Przykład 4.1

Równanie i nierówność dla funkcji 1

Dla funkcji z zadania w części 3 wyznacz zbiór rozwiązań równania $f(x) = 2$ i nierówności $f(x) \geq 1$.

- 1 $f(x) = 2$: na $[-5, -2)$ zawsze; $-x = 2$ daje $x = -2 \in [-2, 1]$; $x - 2 = 2$ daje $x = 4 \in (1, 4]$. Kawałek $[-5, -2)$ i punkt -2 sklejają się w $[-5, -2]$.
- 2 $f(x) \geq 1$: na $[-5, -2)$ zawsze ($2 \geq 1$); $-x \geq 1$ daje $x \leq -1$, czyli $[-2, -1]$; $x - 2 \geq 1$ daje $x \geq 3$, czyli $[3, 4]$.

Wynik: $f(x) = 2$ dla $x \in [-5, -2] \cup \{4\}$; $f(x) \geq 1$ dla $x \in [-5, -1] \cup [3, 4]$.

Sprawdzenie w symulacji: funkcja 1, warunek $f(x) \geq c$, $c = 1$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 10 min

- 1 Dla funkcji 2 (przykład 3.1) wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 1$.

- 2 Ile rozwiązań ma równanie $f(x) = 2$ dla funkcji 2? A równanie $f(x) = 3$?

3

 Funkcja $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dla } x \in [-5, -1) \\ x + 2 & \text{dla } x \in [-1, 2] \\ 1 & \text{dla } x \in (2, 5] \end{cases}$ (funkcja 3 w symulacji) ma skok w $x = -1$.

Podaj jej zbiór wartości i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$.

 podstawowe
  średnie
  trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 44 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WARTOŚCI I MIEJSCA ZEROWE

ZESTAWY A

1

 Oblicz wartość funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{dla } x \leq 1 \\ 4 - 3x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ dla podanego argumentu.

a) $f(-2)$

b) $f(1)$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2

Wyznacz wszystkie miejsca zerowe (albo stwierz, że ich nie ma).

a) $\begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x < 0 \\ x - 5 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ 2x - 6 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe
  średnie
  trudniejsze

POZIOM B · TABELA I PARAMETR

ZESTAWY B

1

 Funkcja f jest określona tabelą: $f(-2) = 3$, $f(-1) = 0$, $f(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$. Odpowiedz.

a) liczba miejsc zerowych

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Wyznacz parametr.



$$a) f(x) = 3x + m,$$

$$f(2) = -1$$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · FUNKCJA PRZEDZIAŁAMI LINIOWA

ZESTAWY C

1



$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla } x \in [-4, -1) \\ 2 & \text{dla } x \in [-1, 1] \\ -x + 3 & \text{dla } x \in (1, 4] \end{cases} \text{ . Podaj.}$$

a) dziedzinę

b) zbiór wartości

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2



$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{dla } x \in [-5, -2] \\ x + 2 & \text{dla } x \in (-2, 2) \\ 4 & \text{dla } x \in [2, 5) \end{cases} \text{ . Podaj.}$$

a) zbiór wartości

b) zbiór rozwiązań $f(x) = 4$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

3



$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{dla } x \in [-5, -2) \\ -x & \text{dla } x \in [-2, 3] \\ 1 & \text{dla } x \in (3, 5] \end{cases} \text{ (ze skokiem). Podaj.}$$

a) zbiór wartości

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (44 przykładów i zadań) →

6

Na maturze

Zadanie „funkcja przedziałami liniowa i cztery luki” pojawia się w większości sesji od 2024 roku i jest warte zwykle 4 punkty. Według sprawozdań CKE w maju 2025 zdający uzyskali średnio 67%

punktów, a w maju 2026 w dwóch częściach 66% i 63%. Od sierpnia 2025 zasady oceniania mówią wprost: zdanie jest poprawne tylko wtedy, gdy krańce przedziału są poprawne i da się jednoznacznie ustalić, czy przedział jest otwarty, czy domknięty. Niestaranny nawias oznacza więc 0 punktów za to zdanie. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 7 pkt · ok. 15 min

1

(0–4 pkt) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dla } x \in [-5, -2] \\ 1 & \text{dla } x \in (-2, 1) \\ 2x - 1 & \text{dla } x \in [1, 3] \end{cases}$. Uzupełnij

zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach.

1. Dziedziną funkcji f jest przedział
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział
3. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 1$ jest przedział
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) > 3$ jest zbiór

2

(0–1 pkt) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{dla } x < 1 \\ 2 - x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$. Zbiorem

wszystkich miejsc zerowych funkcji f jest

- A. $\{-3, 3\}$ B. $\{-3, 2\}$ C. $\{-3, 2, 3\}$ D. $\{2, 3\}$

3

(0–1 pkt) Funkcja f jest określona tabelą:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	-2	0	3	0	-2	2

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1. Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe. P F
2. Największą wartością funkcji f jest $f(3)$. P F

4

(0–1 pkt) Funkcja $f(x) = x^2 + kx - 8$ ma miejsce zerowe $x = 2$. Wtedy

- A. $k = -2$ B. $k = 2$ C. $k = 4$ D. $k = 6$

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Najczęstsze błędy

- × „Kawałki $[-4, -1]$ i $(-1, 2)$ zapisuję jako $[-4, -1] \cup (-1, 2)$.”

Matematycznie to ten sam zbiór. Gdy luka mówi „jest przedział”, zapisz jeden przedział $[-4, 2)$. Przy sklepaniu od razu widać, czy punkt styku należy do zbioru.

- × „Najmniejsza wartość to -3 , bo tam kończy się wykres.”

Jeśli na końcu jest puste koło, ta wartość nie jest przyjmowana i najmniejszej wartości może nie być wcale.

- × „Miejsca zerowe gałęzi $x^2 - 9$ to ± 3 , więc oba są miejscami zerowymi f .”

Tylko te, które należą do przedziału tej gałęzi. Pozostałe odrzucasz.

- × „Równanie $f(x) = c$ ma jedno albo kilka rozwiązań.”

Na gałęzi stałej równej c rozwiązań jest nieskończenie wiele: cały przedział.

- × „Przy $f(x) > 0$ biorę nawias z wykresu.”

W punkcie przecięcia z prostą $y = c$ nierówność ostra nie zachodzi, więc nawias jest okrągły, nawet jeśli koło jest pełne.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jak na wykresie sprawdzić, czy krzywa jest wykresem funkcji?

Każda prosta pionowa przecina ją co najwyżej w jednym punkcie.

- 2 Wykres kończy się pustym kołem w $(5, -3)$. Czy -3 należy do zbioru wartości?

Nie, chyba że -3 jest przyjmowane w innym punkcie wykresu.

- 3 Co oznacza pozioma część wykresu na wysokości c dla równania $f(x) = c$?

Cały przedział rozwiązań.

4 Dlaczego miejsca zerowe gałęzi trzeba sprawdzić z przedziałem?

Wzór gałęzi obowiązuje tylko na jej przedziale; poza nim wartość f liczy się innym wzorem.

ODCZYT

D : rzut na Ox , ZW : rzut na Oy

pełne kółko $[]$, puste $()$

wartość skrajna: o ile istnieje

WARUNEK $f(x) \geq c$

prosta $y = c$, każda gałąź osobno

ostra: punkt przecięcia wykluczony

sklej stykające się kawałki

Broszura CKE „Wybrane wzory matematyczne” nie zawiera nic z tej lekcji: odczyt z wykresu i zapis przedziałów trzeba mieć opanowany.

Dalej: funkcja liniowa (lekcja 5.2 Funkcja liniowa), a potem funkcja kwadratowa (5.3 Funkcja kwadratowa: trzy postacie i wykres).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Nie: liczba 6 ma kilka dzielników (1, 2, 3, 6), więc przyporządkowanie nie jest jednoznaczne.
„Najmniejszy dzielnik większy od 1” (dla liczb większych od 1) byłby już funkcją.
2. Nie: prosta $x = 0$ przecina go w dwóch punktach, $(0, 2)$ i $(0, -2)$.

Zadania • część 2

1. $f(-2) = -4 + 1 = -3$
2. $f(0) = 0 - 3 = -3$ (bo $0 \geq 0$)
3. $f(3) = 9 - 3 = 6$.
2. 1. $2x + 6 = 0$ daje $x = -3$, ale $-3 \not\geq -1$: odrzucamy.
2. $x - 3 = 0$ daje $x = 3$, ale $3 \not\geq -1$: odrzucamy.
3. Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Zadania • część 3

1. 1. $D = [-5, 4]$.
2. $ZW: \{2\}, [-1, 2]$ i $(-1, 2]$, razem $[-1, 2]$.
3. Miejsca zerowe: $-x = 0$ dla $x = 0$; $x - 2 = 0$ dla $x = 2 \in (1, 4]$. Są to 0 i 2.
2. 1. Stała w $[-5, -2]$, malejąca w $[-2, 1]$, rosnąca w $[1, 4]$.
2. Najmniejsza wartość -1 dla $x = 1$ (pełne kółko w $(1, -1)$, bo 1 należy do środkowej gałęzi).

Zadania • część 4

1. 1. $x + 4 < 1$ daje $x < -3$, czyli $[-4, -3)$.
2. Gałąź stała: $3 < 1$ fałsz.
3. $-2x + 7 < 1$ daje $x > 3$, czyli $(3, 5)$.
4. $x \in [-4, -3) \cup (3, 5)$.
2. 1. $f(x) = 2$: $x = -2$ i $x = \frac{5}{2}$, czyli dwa rozwiązania.
2. $f(x) = 3$: każde $x \in [-1, 2]$, czyli nieskończenie wiele.
3. 1. ZW : lewa gałąź $(0, 4]$, środkowa $[1, 4]$, prawa $\{1\}$, razem $(0, 4]$.
2. $-x - 1 > 2$ daje $x < -3$, czyli $[-5, -3)$.
3. $x + 2 > 2$ daje $x > 0$, czyli $(0, 2]$.
4. $x \in [-5, -3) \cup (0, 2]$.

Zestawy A

1. a) 8 b) -1
2. a) $-2, 5$ b) $-1, 3$

Zestawy B

1. a) 2

2. a) $m = -7$

Zestawy C

1. a) $[-4, 4]$ b) $[-1, 2]$

2. a) $[0, 6]$ b) $\{-4\} \cup [2, 5)$

3. a) $[-3, 3)$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Dziedzina. $[-5, 3)$.

2. Zbiór wartości. lewa gałąź od $f(-5) = 4$ do $f(-2) = 1$, czyli $[1, 4]$; środkowa 1; prawa od $f(1) = 1$ do 5 (bez 5), czyli $[1, 5)$. Razem $[1, 5)$.

3. Równanie. $-x - 1 = 1$ dla $x = -2$; gałąź stała na $(-2, 1)$; $2x - 1 = 1$ dla $x = 1$. Razem $[-2, 1]$.

4. Nierówność. $-x - 1 > 3$ dla $x < -4$, czyli $[-5, -4)$; $2x - 1 > 3$ dla $x > 2$, czyli $(2, 3)$. Razem $[-5, -4) \cup (2, 3)$.

1 pkt za każde poprawnie uzupełnione zdanie.

Uwaga: zdanie jest poprawne tylko wtedy, gdy oba krańce i rodzaje nawiasów są poprawne.

2. B.

1. $x^2 - 9 = 0$ daje $x = \pm 3$; warunek $x < 1$ spełnia tylko -3 .

2. $2 - x = 0$ daje $x = 2 \geq 1$ ✓.

3. C to błąd „bez odrzucania”: $f(3) = 2 - 3 = -1 \neq 0$.

3. PF.

1. Zera w $x = -1$ i $x = 1$: dwa.

2. Największa wartość to $f(0) = 3$, a $f(3) = 2$.

4. B.

1. $f(2) = 4 + 2k - 8 = 0$

2. $2k = 4$, więc $k = 2$.

Matura z matematyki · Lekcja 5.1: Funkcja i jej wykres · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości i Uwagi według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt5_1.py).