

Układy równań z równaniem kwadratowym

Na poziomie rozszerzonym układ z równaniem kwadratowym rzadko jest zadaniem samym w sobie. Pojawia się w środku zadań z geometrii analitycznej (punkty wspólne prostej i okręgu, dwóch okręgów, punkt na prostej w danej odległości) i z ciągów (dwa warunki na wyrazy). Technika jest jedna: podstawienie, które daje równanie kwadratowe z jedną niewiadomą. Za samo zapisanie takiego równania klucz zwykle daje większość punktów.

CZAS

ok. 25 min
czytania + ok. 50
min zadań

ZADANIA

5 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 3
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
dział IV;
zastosowania w
działach VI i VIII

W TEJ LEKCJI

- 0 Prosta i okrąg
- 1 Podstawienie
- 2 Układy symetryczne: suma i iloczyn
- 3 Dwa okręgi: odejmowanie równań
- 4 Trening rachunkowy
- 5 Na maturze
- 6 Najczęstsze błędy
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Prosta i okrąg

Ile punktów wspólnych mają okrąg $x^2 + y^2 = 25$ i prosta $y = x + 1$? Wstawiamy y do równania okręgu: $x^2 + (x + 1)^2 = 25$, czyli $2x^2 + 2x - 24 = 0$, $x^2 + x - 12 = 0$, $x = 3$ albo $x = -4$. Punkty $(3, 4)$ i $(-4, -3)$. Liczba rozwiązań układu to liczba pierwiastków jednego równania kwadratowego, więc o wszystkim decyduje jego Δ .

Podstawienie

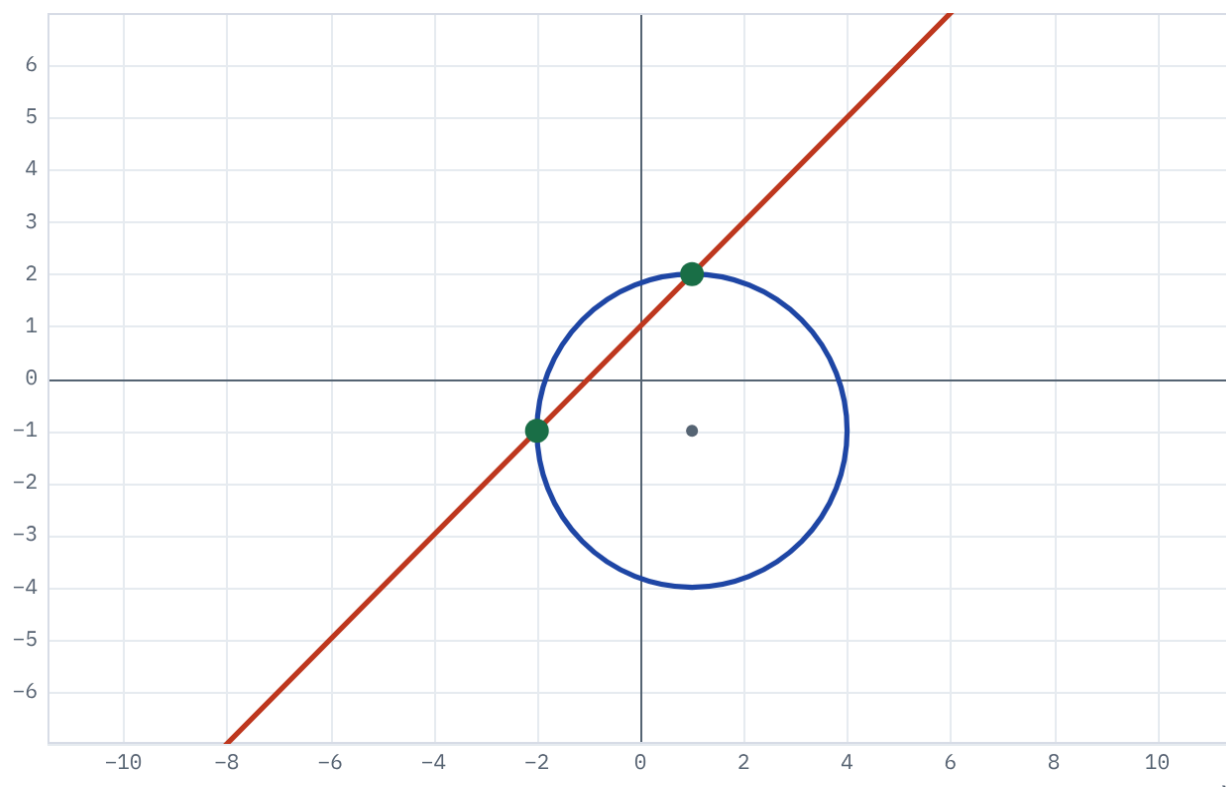
UKŁAD: RÓWNANIE LINIOWE I KWADRATOWE

1. Z równania liniowego wyznacz jedną niewiadomą.
2. Wstaw do równania kwadratowego: dostajesz równanie kwadratowe z jedną niewiadomą.
3. Rozwiąż je i dla każdego pierwiastka wylicz drugą niewiadomą z równania liniowego.
4. Zapisz rozwiązania jako pary.

$\Delta > 0$: dwie pary, $\Delta = 0$: jedna (prosta styczna), $\Delta < 0$: brak.

SYMULACJA 1

Okrąg i prosta. Zmieniaj środek, promień i prostą. W odczycie jest równanie kwadratowe po podstawieniu i jego Δ . Przesuń prostą tak, żeby była styczna: Δ spada do zera, a odległość środka od prostej zrównuje się z promieniem.



— okrąg $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — prosta $y = mx + k$ — punkty wspólne

po podstawieniu $2x^2 + 2x - 4 = 0$

Δ 36

odległość środka od prostej 2,12 ($r = 3$)

położenie sieczna (2 punkty)

punkty $(-2; -1), (1; 2)$

Wstawiamy $y = mx + k$ do równania okręgu i dostajemy równanie kwadratowe w x . Każdy jego pierwiastek to jeden punkt wspólny: $\Delta > 0$ dwa punkty, $\Delta = 0$ styczność, $\Delta < 0$ brak. To samo mówi porównanie odległości środka od prostej z promieniem.

Stan na rysunku: okrąg $(1; -1)$, $r = 3$; prosta $y = 1x + 1$; sieczna (2 punkty).

Przykład 1.1

Punkt na prostej w danej odległości

Punkt C leży na prostej $y = 2x - 1$ i jest odległy od punktu $A = (1, 1)$ o $\sqrt{20}$. Wyznacz współrzędne C .

- 1 $C = (x, 2x - 1)$; $|AC|^2 = (x - 1)^2 + (2x - 2)^2 = 20$.
- 2 $5(x - 1)^2 = 20$, czyli $(x - 1)^2 = 4$, $x = 3$ albo $x = -1$.

Wynik: $C = (3, 5)$ albo $C = (-1, -3)$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 8 min

1 Rozwiąż układ $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

2 Dla jakich k prosta $y = k$ ma z parabolą $y = x^2 - 4x + 1$ dokładnie jeden punkt wspólny?

 podstawowe  średnie  trudniejsze

2 Układy symetryczne: suma i iloczyn

 GDY DANE SĄ $u + v$ I $u^2 + v^2$

$uv = \frac{(u + v)^2 - (u^2 + v^2)}{2}$. Znając $s = u + v$ i $p = uv$, liczby u, v są pierwiastkami $t^2 - st + p = 0$ (wzory Viète'a odwrotnie, lekcja 3.6 Wzory Viète'a i równania z parametrem).

Przykład 2.1

Wyrazy ciągu

W ciągu geometrycznym $a_1 + a_3 = 15$ i $a_1^2 + a_3^2 = 153$. Wyznacz a_1 i a_3 .

1 $a_1 a_3 = \frac{225 - 153}{2} = 36.$

2 $t^2 - 15t + 36 = 0$: $t = 3$ albo $t = 12$.

Wynik: $(a_1, a_3) = (3, 12)$ albo $(12, 3)$. W obu przypadkach $a_2^2 = a_1 a_3 = 36$; dalsza część zadania zwykle rozróżnia te przypadki.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

1 zadanie · ok. 5 min

1 Rozwiąż układ $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$

 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Dwa okręgi: odejmowanie równań

PUNKTY WSPÓLNE DWÓCH OKRĘGÓW

Po rozwinięciu oba równania mają ten sam fragment $x^2 + y^2$. Odejmując je stronami, dostajesz **równanie liniowe** (prostą przez punkty wspólne). Dalej jak w sekcji 1: podstawienie do jednego z okręgów.

Przykład 3.1

Odejmowanie

Wyznacz punkty wspólne okręgów $x^2 + y^2 = 10$ i $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

- 1 Drugie po rozwinięciu: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$. Odejmujemy od pierwszego ($x^2 + y^2 - 10 = 0$): $4x + 4y - 16 = 0$, czyli $y = 4 - x$.
- 2 $x^2 + (4 - x)^2 = 10$: $2x^2 - 8x + 6 = 0$, $x = 1$ albo $x = 3$.

Wynik: (1, 3) i (3, 1).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 10 min

- 1 Wyznacz punkty wspólne okręgu $x^2 + y^2 = 5$ i okręgu $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.

- 2 Wyznacz punkty wspólne paraboli $y = x^2 - 2$ i prostej $y = x$; oblicz długość odcinka między nimi.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

4 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 17 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · PODSTAWIANIE

ZESTAWY A

- 1 Rozwiąż układ.

a) $y = x + 2$, $x^2 + y^2 = 10$ b) $y = x^2 - 3$, $y = 2x$
... pozostałe przykłady na stronie treningu

 podstawowe  średnie  trudniejsze

POZIOM B · LICZBA ROZWIĄZAŃ

ZESTAWY B

1 Podaj liczbę punktów wspólnych (albo parametr).



a) $x^2 + y^2 = 4$ i $y = x + 3$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

POZIOM C · OKRĘGI I CIĄGI

ZESTAWY C

1 Oblicz.



a) punkty wspólne

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ i}$$

$$x^2 + y^2 - 8x = 9$$

b) $a_1 + a_3 = 10,$

$$a_1^2 + a_3^2 = 68 \text{ (ciąg}$$

geometryczny, wyrazy
dodatnie); a_2

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

Pełny trening (17 przykładów i zadań) →

5 Na maturze

Informator CKE dla poziomu rozszerzonego w dziale IV cytuje tylko układy liniowe, a w arkuszach 2024–2026 nie było osobnego zadania z układem nieliniowym. Takie układy były jednak etapem zadań z ciągów (maj 2025: $a_1 + a_3$ i $a_1^2 + a_3^2$; średnio 46% punktów) i z geometrii analitycznej (maj 2025: punkty wspólne dwóch okręgów; 23%; próbny arkusz z grudnia 2024: punkt na prostej w danej odległości). W kluczu punkt przyznaje się zwykle za równanie z jedną niewiadomą po podstawieniu. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

3 zadania · 11 pkt · ok. 35 min

1 (0–4 pkt) Punkt C leży na prostej $y = -x + 4$, a jego odległość od punktu $A = (2, 5)$ jest równa $\sqrt{13}$. Wyznacz współrzędne punktu C .

- 2 (0–4 pkt) Okręgi $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ i $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ przecinają się w punktach A i B . Wyznacz współrzędne tych punktów i długość odcinka AB .

- 3 (0–3 pkt) Pierwszy i trzeci wyraz ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich spełniają $a_1 + a_3 = 26$ oraz $a_1^2 + a_3^2 = 388$. Wyznacz a_2 i wszystkie możliwe ilorazy q .

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

6 Najczęstsze błędy

- × „ $x = 3$ albo $x = -4$, koniec.”

Rozwiązaniem układu są pary. Dla każdego x trzeba wyliczyć y .

- × „ y liczę z równania kwadratowego: $y^2 = \dots$, więc $y = \pm \dots$ ”

Wtedy pojawiają się pary, które nie spełniają równania liniowego. Drugą niewiadomą liczy z równania liniowego.

- × „Zgadłem $(2, 5)$ i się zgadza.”

Zgadnięcie bez wykazania, że innych rozwiązań nie ma, to w kluczu co najwyżej 1 punkt.

- × „Przy odejmowaniu okręgów znika $x^2 + y^2$, więc znikają też wyrazy liniowe.”

Znikają tylko kwadraty. Wyrazy liniowe zostają i dają równanie prostej.

7 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Ile rozwiązań może mieć układ prostej i okręgu?

0, 1 albo 2.

- 2 Jak obliczyć uv , znając $u + v$ i $u^2 + v^2$?

$$uv = \frac{(u+v)^2 - (u^2 + v^2)}{2}.$$

3 Co daje odjęcie równań dwóch okręgów?

Równanie prostej przez ich punkty wspólne.

4 Kiedy prosta jest styczna do okręgu?

Gdy równanie po podstawieniu ma $\Delta = 0$ (odległość środka od prostej równa promieniowi).

METODA

liniowe → podstaw do kwadratowego
dwa okręgi → odejmij, potem podstaw
rozwiązanie = pary

SYMETRYCZNE

$$uv = \frac{(u+v)^2 - (u^2 + v^2)}{2}$$

u, v : pierwiastki $t^2 - st + p$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” jest równanie okręgu i wzór na odległość punktu od prostej; metody rozwiązywania układów broszura nie podaje.

Dalej: ciągi (lekcja 6.1 Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność) i geometria analityczna (8.1 Okrąg: cięciwy, styczne, kąty wpisane i środkowe, wycinek koła).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $x = y + 1$: $(y + 1)^2 + y^2 = 13$, $2y^2 + 2y - 12 = 0$.
2. $y = 2$ albo $y = -3$.
3. $(3, 2)$, $(-2, -3)$.
1. $x^2 - 4x + 1 - k = 0$, $\Delta = 16 - 4(1 - k) = 12 + 4k = 0$.
2. $k = -3$ (wierzchołek paraboli).

Zadania • część 2

- $t^2 - 7t + 10 = 0$: $t = 2$ albo 5 . Pary $(2, 5)$ i $(5, 2)$.

Zadania • część 3

1. Odejmujemy: $-6x + 5 = -5$, $x = \frac{5}{3}$.
2. $y^2 = 5 - \frac{25}{9} = \frac{20}{9}$, $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{3}$.
3. $(\frac{5}{3}, \pm \frac{2\sqrt{5}}{3})$.
1. $x^2 - x - 2 = 0$: $x = 2$ albo $x = -1$.
2. Punkty $(2, 2)$ i $(-1, -1)$.
3. Długość $\sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$.

Zestawy A

- a) $(1, 3)$, $(-3, -1)$ b) $(3, 6)$, $(-1, -2)$

Zestawy B

- a) 0

Zestawy C

- a) $(2, \pm\sqrt{21})$ b) 4

Zadania w stylu maturalnym

1. Parametryzacja. $C = (x, 4 - x)$.
2. Równanie. $(x - 2)^2 + (-1 - x)^2 = 13$, czyli $2x^2 - 2x + 5 = 13$, $x^2 - x - 4 = 0$.
3. Pierwiastki. $x = \frac{1 \mp \sqrt{17}}{2}$.
4. Punkty. $C = (\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2})$ albo $C = (\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{7-\sqrt{17}}{2})$.

1 pkt za zapis C zależnie od jednej zmiennej. 2 pkt za równanie $(x - 2)^2 + (x + 1)^2 = 13$. 3 pkt za rozwiązanie x . 4 pkt za oba punkty.

1. Odejmowanie. $(-2x - 8) - (4x - 6y + 4) = 0$, czyli $-6x + 6y - 12 = 0$, $y = x + 2$.
2. Podstawienie. $x^2 + (x + 2)^2 - 2x - 8 = 0$: $2x^2 + 2x - 4 = 0$, $x = 1$ albo $x = -2$.
3. Punkty. $A = (1, 3)$, $B = (-2, 0)$.
4. Długość. $|AB| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$.

1 pkt za równanie prostej AB (albo inne równanie z jedną niewiadomą). **2 pkt** za równanie kwadratowe w x . **3 pkt** za punkty A, B . **4 pkt** za $3\sqrt{2}$.

3. 1. **Iloczyn.** $a_1 a_3 = \frac{676-388}{2} = 144$, więc $a_2 = 12$ (wyraży dodatnie).

2. **Pary.** $t^2 - 26t + 144 = 0$: $t = 8$ albo $t = 18$.

3. **Iloraz.** $(a_1, a_3) = (8, 18)$: $q = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$; $(18, 8)$: $q = \frac{2}{3}$.

1 pkt za $a_1 a_3 = 144$ (albo układ z jedną niewiadomą). **2 pkt** za obie pary. **3 pkt** za $a_2 = 12$ i $q \in \{\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\}$.

Matura z matematyki · Lekcja 4.2: Układy równań z równaniem kwadratowym · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze, zasady oceniania i sprawozdania CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt4_2.py).