

Układy równań liniowych i zadania tekstowe

Układ dwóch równań rozwiąże prawie każdy. Zadanie tekstowe za 2 punkty, które w każdej sesji sprowadza się do takiego układu, należy jednak do najtrudniejszych zadań arkusza podstawowego: w 2025 roku zdający uzyskali za nie średnio 30% punktów. Trudność nie leży w rachunku, tylko w przełożeniu zdań na równania, zwłaszcza gdy w treści są procenty. Ta lekcja to głównie ćwiczenie tego przekładu.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 60
min zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 5
zadań w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
podstawowy:
IV.1, IV.2

W TEJ LEKCJI

- 0 Jedno zdanie, jedno równanie
- 1 Podstawianie i przeciwne współczynniki
- 2 Interpretacja geometryczna
- 3 Zadania tekstowe: przepis
- 4 Zadania z procentami
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Jedno zdanie, jedno równanie

„Do kina sprzedano 180 biletów: normalne po 30 zł i ulgowe po 20 zł. Utarg wyniósł 4700 zł.” Dwie niewiadome: n normalnych i u ulgowych. Dwa zdania z liczbami: „sprzedano 180” to $n + u = 180$; „utarg 4700” to $30n + 20u = 4700$. Każde zdanie z liczbą daje jedno równanie, a nazwanie niewiadomych słowami („ n – liczba biletów normalnych”) jest połową pracy. Rozwiązanie: $n = 110$, $u = 70$.

Podstawianie i przeciwne współczynniki

DWIE METODY

- **Podstawianie:** z jednego równania wyznacz niewiadomą (najlepiej tę ze współczynnikiem ± 1) i wstaw do drugiego.
- **Przeciwne współczynniki:** pomnóż równania przez liczby, tak żeby przy jednej niewiadomej stały liczby przeciwne, i dodaj stronami.

Na końcu zawsze sprawdź rozwiązanie w **obu** równaniach.

Przykład 1.1

Przeciwne współczynniki

Rozwiąż układ
$$\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

- 1 Drugie razy 2: $10x - 4y = 8$. Dodajemy do pierwszego: $13x = 26$, $x = 2$.
- 2 $3 \cdot 2 + 4y = 18$, więc $y = 3$.

Wynik: $x = 2$, $y = 3$.

Sprawdzenie: $5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 4 \checkmark$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

1 Rozwiąż układ
$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

2

Para $(2, -1)$ jest rozwiązaniem układu $\begin{cases} ax + 3y = 5 \\ 4x - by = 11 \end{cases}$ Oblicz $a + b$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

2

Interpretacja geometryczna

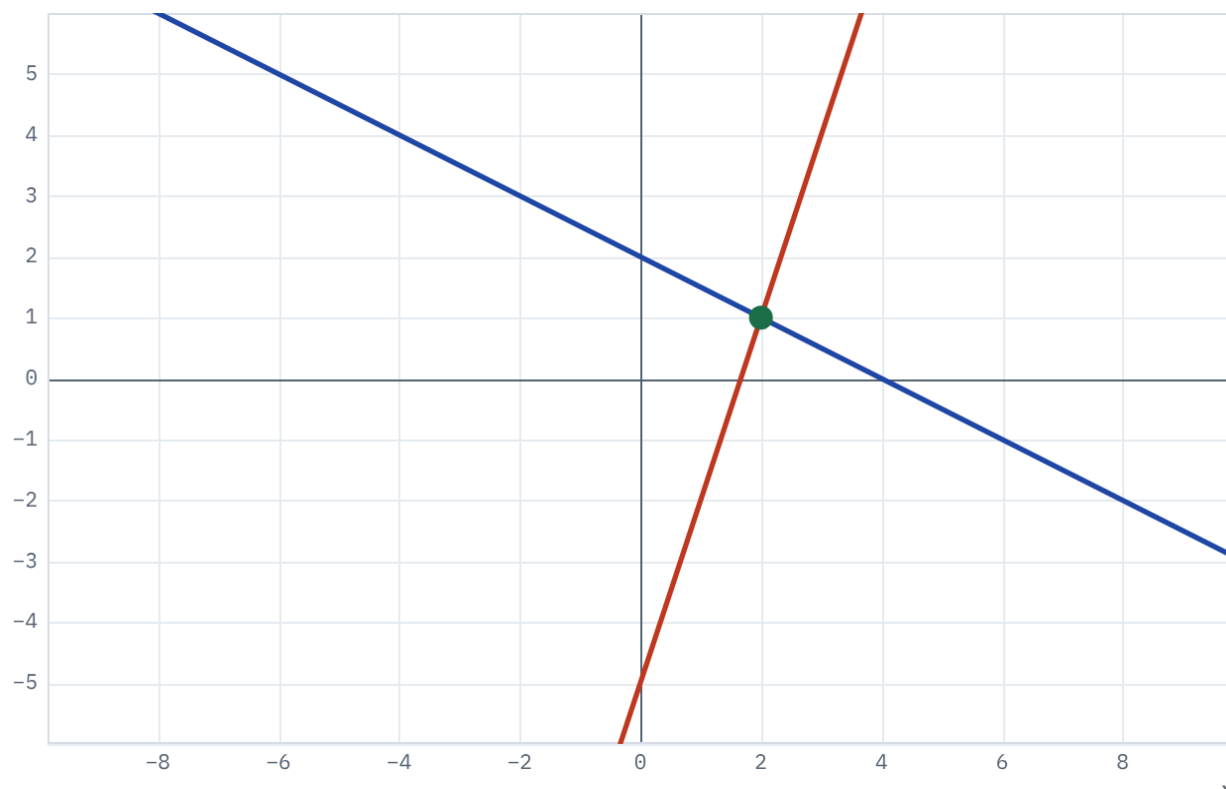
TRZY RODZAJE UKŁADÓW

- **Oznaczony:** proste się przecinają, jedno rozwiązanie.
- **Sprzeczny:** proste równoległe i różne, brak rozwiązań (np. $x + 2y = 3$ i $2x + 4y = 5$).
- **Nieoznaczony:** ta sama prosta, nieskończenie wiele rozwiązań (np. $x + 2y = 3$ i $-3x - 6y = -9$).

Sprawdzian: jeśli współczynniki przy x i y są proporcjonalne, układ jest sprzeczny albo nieoznaczony; decyduje, czy wyrazy wolne też są w tej samej proporcji.

SYMULACJA 1 Dwie proste $a_1x + b_1y = c_1$ i $a_2x + b_2y = c_2$. Zmieniaj współczynniki.

Ustaw $a_2 = 2$, $b_2 = 4$: proste staną się równoległe. Potem $c_2 = 8$: pokryją się i układ będzie nieoznaczony.



— $a_1x + b_1y = c_1$ — $a_2x + b_2y = c_2$ — rozwiązanie

układ $x + 2y = 4$; $3x - y = 5$

rodzaj oznaczony (proste się przecinają)

rozwiązanie $x = 2$, $y = 1$

Każde równanie liniowe z dwiema niewiadomymi to prosta. Rozwiązanie układu to punkt wspólny obu prostych.

Stan na rysunku: $x + 2y = 4$; $3x - y = 5$; układ oznaczony (proste się przecinają); $x = 2$, $y = 1$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 4 min

1 Ile rozwiązań ma układ $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$?

2 Dla jakiej wartości k układ $\begin{cases} x + ky = 2 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$ jest sprzeczny?

3 Zadania tekstowe: przepis

PIĘĆ KROKÓW

1. Nazwij niewiadome słowami i z jednostkami („ x – cena jednej czekolady w zł”).
2. Każde zdanie z liczbą przełóż na jedno równanie.
3. Rozwiąż układ.
4. Sprawdź, czy wynik ma sens (liczba osób całkowita, cena dodatnia).
5. Odpowiedz na **dokładnie to pytanie**, które jest w treści (często pytają o jedną z dwóch wielkości albo o coś pochodnego).

Przykład 3.1

Gdyby było o tyle więcej...

W klasie jest 32 uczniów. Gdyby chłopców było o 4 więcej, to chłopców byłoby dwa razy więcej niż dziewcząt. Ilu jest chłopców?

- 1 c – liczba chłopców, d – liczba dziewcząt. $c + d = 32$.
- 2 „Gdyby chłopców było o 4 więcej” zmienia tylko chłopców, dziewczęta zostają: $c + 4 = 2d$.
- 3 $c = 2d - 4$; $2d - 4 + d = 32$, więc $d = 12$ i $c = 20$.

Wynik: 20 chłopców. Sprawdzenie sensu: liczby całkowite, dodatnie, $20 + 4 = 24 = 2 \cdot 12$ ✓. Gdyby wyszła liczba niecałkowita, to znak błędu w układzie.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 8 min

- 1 Za 3 zeszyty i 2 długopisy zapłacono 19 zł, a za 2 zeszyty i 5 długopisów 31 zł. Ile kosztuje długopis?
- 2 Suma dwóch liczb wynosi 50. Jeśli większą zmniejszymy o 20%, a mniejszą zwiększymy o 4, otrzymamy równe liczby. Wyznacz te liczby.

Zadania z procentami

Co drugie zadanie tekstowe w arkuszach 2024–2026 zawierało procenty. Kluczowe pytanie przy każdym procencie: **z czego?** „15% drzew w pierwszym sadzie” to $0,15x$, gdzie x to liczba drzew w pierwszym sadzie, a nie we wszystkich.

Przykład 4.1

Dwa budżety

Dwie drużyny dostały łącznie 80 000 zł. Pierwsza wydała 15% swojej kwoty, druga 10% swojej, razem 10 500 zł. Ile dostała pierwsza drużyna?

- 1 x – kwota pierwszej drużyny, y – drugiej (w zł). $x + y = 80\,000$.
- 2 $0,15x + 0,10y = 10\,500$.
- 3 $y = 80\,000 - x$: $0,15x + 8000 - 0,10x = 10\,500$, czyli $0,05x = 2500$.

Wynik: $x = 50\,000$ zł (druga drużyna 30 000 zł).

Sprawdzenie: $7500 + 3000 = 10\,500$ ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 10 min

- 1 W dwóch magazynach jest razem 900 t zboża. Po wywiezieniu 30% z pierwszego i 20% z drugiego w obu zostało tyle samo. Ile ton było w pierwszym?

- 2 Sklep sprzedał 150 koszulek po 40 zł i 60 zł. Po odjęciu 20% podatku i kosztów zostało 5280 zł. Ile koszulek sprzedano po 60 zł?


 podstawowe  średnie  trudniejsze

Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 26 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · UKŁADY

ZESTAWY A

1 Rozwiąż układ.



a) $x + y = 7, x - y = 1$ b) $\frac{x}{2} + y = 4, x - \frac{y}{3} = 1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Podaj rodzaj układu: oznaczony (O), sprzeczny (S), nieoznaczony (N).



a) $x - 2y = 3, 2x - 4y = 6$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM B · PRZEKŁAD NA RÓWNANIA

ZESTAWY B

1 Zapisz jako równanie (x, y – liczby z treści).



a) x jest o 5 większe od b) x stanowi 40% sumy x i y
podwojonego y

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

POZIOM C · KRÓTKIE ZADANIA TEKSTOWE

ZESTAWY C

1 Rozwiąż.



a) 5 kg jabłek i 2 kg gruszek b) 1000 zł na dwóch
kosztuje 23 zł, 2 kg jabłek i lokatach, 3% i 5%, odsetki
5 kg gruszek 26 zł; cena kg razem 42 zł; ile na 5%
jabłek

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ trudniejsze

Pełny trening (26 przykładów i zadań) →

W każdej sesji z lat 2024–2026 było jedno zadanie tekstowe za 2 punkty prowadzące do układu równań. Według sprawozdań CKE zdający uzyskali średnio 30% punktów w 2025 (zadanie z budżetami i procentami było najtrudniejszym zadaniem arkusza podstawowego) i 40% w 2026. Typowe błędy: brak modelu (niezrozumienie, od czego liczy się procent), dodatkowe założenia spoza treści, poprawny układ, którego nie udało się rozwiązać. Klucz: 1 punkt za poprawny układ albo równanie z jedną niewiadomą albo równoważne rozumowanie, 2 punkty za wynik. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

 ZADANIA W STYLU MATURALNYM

5 zadań · 8 pkt · ok. 25 min

- 1 (0–2 pkt) Gmina przeznaczyła 600 000 zł na remonty dwóch szkół. Na szkołę A wydano 12% przyznanej jej kwoty, a na szkołę B 9% przyznanej jej kwoty, łącznie 61 800 zł. Oblicz, ile przyznano szkole A. Zapisz obliczenia.
- 2 (0–2 pkt) Na koncert sprzedano 240 biletów: normalne po 45 zł i ulgowe po 30 zł. Po odjęciu 15% kosztów organizacji zostało 8160 zł. Oblicz, ile sprzedano biletów ulgowych.
- 3 (0–1 pkt) W koszu jest 64 owoce: jabłka i gruszki. Gdyby gruszek było o 8 mniej, jabłek byłoby trzy razy więcej niż gruszek. Liczbę j jabłek i g gruszek opisuje układ
- A. $j + g = 64$, $j = 3(g - 8)$ B. $j + g = 64$, $3j = g - 8$
C. $j + g = 56$, $j = 3g$ D. $j + g = 64$, $j - 8 = 3g$
- 4 (0–1 pkt) Układ równań
$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -6x + 4y = 12 \end{cases}$$
- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie B. ma dokładnie dwa rozwiązania
C. nie ma rozwiązań D. ma nieskończenie wiele rozwiązań
- 5 (0–2 pkt) W dwóch sadach rosło łącznie 1200 drzew. W pierwszym uszło 10%, a w drugim 25% drzew. Wtedy w drugim sadzie zostało o 90 drzew mniej niż w pierwszym. Ile drzew rosło w pierwszym sadzie?

 podstawowe  średnie  trudniejsze

Najczęstsze błędy

× „15% to $0,15 \cdot 80\,000$.”

Tylko jeśli procent liczy się od całości. „15% swojej kwoty” to $0,15x$.

× „Gdyby było o 4 więcej, to $c + 4 = 2(d - 4)$.”

Zmienia się tylko ta wielkość, o której mowa. Nie dopisuj zmian, których nie ma w treści.

× „Wyszło x , odpowiadam x .”

Sprawdź, o co pytają. Często o drugą niewiadomą albo o różnicę.

× „Zgadłem 80 i się zgadza.”

Zgadnięcie bez wykazania, że to jedyne rozwiązanie, to w kluczu 1 punkt.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Jak położenie prostych odpowiada układowi sprzecznemu?

Proste równoległe, różne.

2 Jak zapisać „po wywiezieniu 30% zostało x ton”?

$0,7 \cdot (\text{początkowa ilość}) = x$.

3 Ile równań potrzeba dla dwóch niewiadomych?

Dwóch niezależnych.

4 Co trzeba zrobić po rozwiązaniu zadania tekstowego?

Sprawdzić sens wyniku i odpowiedzieć na pytanie z treści.

UKŁADY

oznaczony: proste się przecinają
proporcjonalne współczynniki: sprzeczny
albo nieoznaczony

ZADANIA TEKSTOWE

niewiadome słowami; zdanie z liczbą =
równanie
procent: zawsze „z czego”

Broszura CKE „Wybrane wzory matematyczne” nie zawiera metod rozwiązywania układów.

Dalej: dla rozszerzenia układy z równaniem kwadratowym (lekcja 4.2 Układy równań z równaniem kwadratowym); procenty w lekcji 1.4 Procenty, procent składany, lokaty i kredyty.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. 1. $x = 1 + 3y$; $2 + 6y + y = 9$, $y = 1$.
2. $x = 4$, $y = 1$.
2. 1. $2a - 3 = 5$, $a = 4$.
2. $8 + b = 11$, $b = 3$.
3. $a + b = 7$.

Zadania • część 2

1. Drugie równanie to pierwsze razy -3 : nieskończenie wiele.
2. 1. Proporcja współczynników: $\frac{1}{3} = \frac{k}{6}$, $k = 2$.
2. Wyrazy wolne: $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{3}$ ✗, więc sprzeczny dla $k = 2$.

Zadania • część 3

1. 1. $3z + 2d = 19$, $2z + 5d = 31$.
2. Razy 2 i razy 3: $6z + 4d = 38$, $6z + 15d = 93$; odejmujemy: $11d = 55$.
3. $d = 5$ zł (zeszyt 3 zł).
2. 1. $a + b = 50$, $0,8a = b + 4$.
2. $0,8a = 54 - a$, więc $1,8a = 54$.
3. $a = 30$, $b = 20$.

Zadania • część 4

1. 1. $x + y = 900$, $0,7x = 0,8y$.
2. $0,7x = 0,8(900 - x)$, $1,5x = 720$.
3. $x = 480$ t.
2. 1. Utarg: $5280 : 0,8 = 6600$ zł.
2. $a + b = 150$, $40a + 60b = 6600$.
3. $40 \cdot 150 + 20b = 6600$, $b = 30$.

Zestawy A

1. a) $(4, 3)$ b) $(2, 3)$
2. a) N

Zestawy B

1. a) $x = 2y + 5$ b) $x = 0,4(x + y)$

Zestawy C

1. a) 3 zł b) 600 zł

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. **Układ.** $a + b = 600\,000$, $0,12a + 0,09b = 61\,800$.
2. **Podstawienie.** $0,12a + 54\,000 - 0,09a = 61\,800$, czyli $0,03a = 7800$.
3. **Wynik.** $a = 260\,000$ zł.
1 pkt za układ albo równanie z jedną niewiadomą. 2 pkt za 260 000 zł.

2. 1. **Utarg.** $8160 : 0,85 = 9600$ zł.
2. **Układ.** $n + u = 240$, $45n + 30u = 9600$.
3. **Wynik.** $45 \cdot 240 - 15u = 9600$, $15u = 1200$, $u = 80$.
1 pkt za układ (albo równanie) z uwzględnieniem 85%. 2 pkt za 80 biletów ulgowych.

Uwaga: odjęcie 15% od każdej ceny osobno też jest poprawne: $38,25n + 25,5u = 8160$.

3. **A.** (Wtedy $g = 22$, $j = 42$.)

4. **C.** Drugie równanie po podzieleniu przez -2 : $3x - 2y = -6 \neq 6$. Proste równoległe.

5. 1. **Układ.** $x + y = 1200$, $0,75y = 0,9x - 90$.
2. **Podstawienie.** $0,75(1200 - x) = 0,9x - 90$, czyli $900 + 90 = 1,65x$.
3. **Wynik.** $x = 600$ drzew.
1 pkt za układ. 2 pkt za 600.

Matura z matematyki · Lekcja 4.1: Układy równań liniowych i zadania tekstowe · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości, błędy i punktacja według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt4_1.py).