

Wzory Viète'a i równania z parametrem

W każdym arkuszu rozszerzonym jest jedno zadanie typu „wyznacz wszystkie m , dla których równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki spełniające warunek...”. Jest warte 4–6 punktów i punktowane etapami: Δ , znaki pierwiastków, warunek przeliczony przez $x_1 + x_2$ i $x_1 x_2$, część wspólna. W 2026 roku wariant „oba pierwiastki w przedziale” był drugim najtrudniejszym zadaniem arkusza. Ta lekcja to lista warunków i przekształceń, które trzeba znać na pamięć.

CZAS

ok. 40 min
czytania + ok. 70
min zadań

ZADANIA

8 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 3
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
III.R3, III.R5

W TEJ LEKCJI

- 0 Cztery etapy, cztery punkty
- 1 Wzory Viète'a
- 2 Wyrażenia symetryczne przez
 s i
 p
- 3 Szablon zadania z parametrem
- 4 Położenie pierwiastków względem liczby
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

0

Cztery etapy, cztery punkty

Zadanie z parametrem wygląda groźnie, ale jego klucz jest zawsze podobny: osobny punkt za $\Delta > 0$, punkt za warunek znaku (jeśli jest), trzy punkty za przeliczenie warunku na nierówność w m i jej rozwiązanie, punkt za część wspólną. Kto zapisze $\Delta > 0$ i wzory Viète'a, ma już punkty, nawet jeśli nie dokończy rachunku. Kto napisze $\Delta \geq 0$ przy „dwóch różnych” pierwiastkach, traci punkt pierwszego etapu.

1

Wzory Viète'a

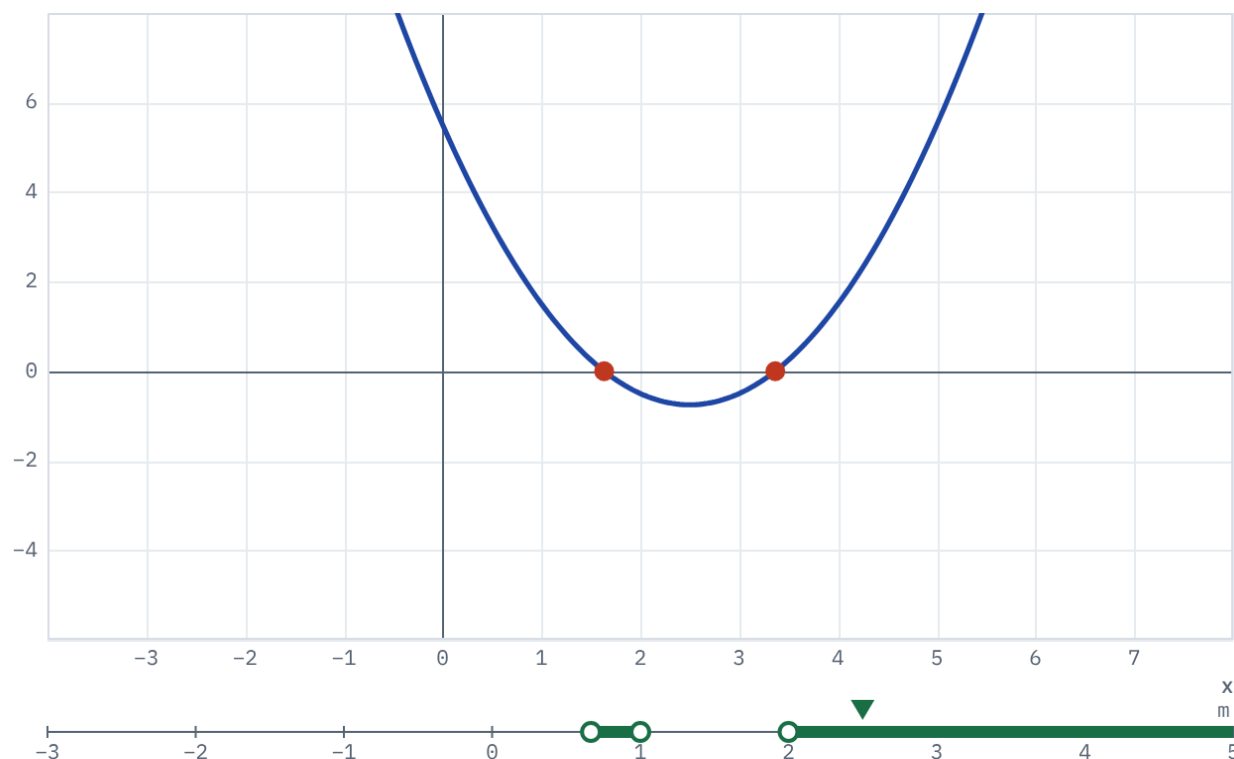
DLA $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $\Delta \geq 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = s, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = p.$$

Wzory działają tylko wtedy, gdy pierwiastki istnieją, dlatego warunek na Δ jest zawsze pierwszym etapem. Gdy a zależy od parametru, osobno rozpatrz $a = 0$ (równanie liniowe) albo wpisz $a \neq 0$ do warunków.

SYMULACJA 1

Rodzina równań $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$. Przesuwaj m i wybieraj warunek. U góry parabola i jej pierwiastki, na dole oś parametru m z zaznaczonym zbiorem dobrych m ; trójkąt to bieżące m . Porównaj warunki „dwa różne dodatnie” i „dwa różne ujemne”: oba mają $x_1x_2 > 0$, a dają zupełnie inne zbiory.



— $y = x^2 - 2mx + 3m - 2$ — pierwiastki — dobre m (warunek spełniony)

$$\Delta/4 = (m - 1)(m - 2) \quad 0,75 \quad \checkmark$$

$$x_1 + x_2 = 2m \quad 5$$

$$x_1x_2 = 3m - 2 \quad 5,5$$

$$\text{pierwiastki } 1,63; \quad 3,37$$

warunek: dwa różne dodatnie **spełniony**

odpowiedź $m \in (2/3, 1) \cup (2, +\infty)$

$\Delta > 0$, $x_1 + x_2 = 2m > 0$ i $x_1x_2 = 3m - 2 > 0$. Sam warunek $x_1x_2 > 0$ nie wystarcza: oba mogłyby być ujemne.

Stan na rysunku: $m = 2,5$; warunek „dwa różne dodatnie” spełniony; $m \in (2/3, 1) \cup (2, +\infty)$.

Przykład 1.1

Suma i iloczyn bez liczenia pierwiastków

Pierwiastki równania $2x^2 - 6x + 1 = 0$ to x_1, x_2 . Oblicz $x_1 + x_2$, x_1x_2 i $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

- 1 $\Delta = 36 - 8 = 28 > 0 \checkmark$.
- 2 $s = 3, p = \frac{1}{2}$.
- 3 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{1/2} = 6$.

Wynik: $3, \frac{1}{2}, 6$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Dla równania $x^2 + 5x - 3 = 0$ oblicz $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$.
- 2 Dla jakich m równanie $(m - 1)x^2 + 4x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki?

□□□ podstawowe ▣▣▣ średnie ▤▤▤ trudniejsze

2 Wyrażenia symetryczne przez s i p

NAJCZĘSTSZE PRZEKSZTAŁCENIA

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= s^2 - 2p \\(x_1 - x_2)^2 &= s^2 - 4p \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{s}{p} \\x_1^3 + x_2^3 &= s^3 - 3sp \\x_1^4 + x_2^4 &= (s^2 - 2p)^2 - 2p^2 \\|x_1 - x_2| &= \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\end{aligned}$$

Wyrażenie, które nie jest symetryczne (np. $x_1 - x_2$ bez modułu albo $x_1^2 - x_2^2$), rozpisz jako iloczyn: $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$, a $|x_1 - x_2| = \sqrt{s^2 - 4p}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 5 min

1 Wyraż $x_1^3 + x_2^3$ przez s i p (wyprowadź).

2 Dla równania $x^2 - 4x + 1 = 0$ oblicz $x_1^4 + x_2^4$.

▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀▀ trudniejsze

3 Szablon zadania z parametrem

ETAPY (I PUNKTY W KLUCZU)

1. **Istnienie:** $a \neq 0$ (jeśli zależy od m) i $\Delta > 0$ dla „dwóch różnych”.
2. **Znaki** (jeśli treść ich wymaga): oba dodatnie: $s > 0$ i $p > 0$; oba ujemne: $s < 0$ i $p > 0$; różnych znaków: $p < 0$.
3. **Warunek:** zapisz przez s i p , podstaw wzory, rozwiąż nierówność w m .
4. **Część wspólna** wszystkich warunków.

Przykład 3.1

Suma kwadratów pierwiastków

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki spełniające $x_1^2 + x_2^2 \leq 30$.

- 1 $\frac{\Delta}{4} = (m-1)^2 - (m+5) = m^2 - 3m - 4 = (m-4)(m+1) > 0$: $m \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.
- 2 $s = 2(m-1)$, $p = m+5$; $x_1^2 + x_2^2 = 4(m-1)^2 - 2(m+5) = 4m^2 - 10m - 6$.
- 3 $4m^2 - 10m - 6 \leq 30 \iff 2m^2 - 5m - 18 \leq 0$; pierwiastki -2 i $\frac{9}{2}$: $m \in [-2, \frac{9}{2}]$.
- 4 Część wspólna: $[-2, -1) \cup (4, \frac{9}{2}]$.

Wynik: $m \in [-2, -1) \cup (4, \frac{9}{2}]$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 12 min

- 1 Wyznacz m , dla których równanie $x^2 + mx + m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne.

- 2 Wyznacz m , dla których równanie $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$ ma dwa różne pierwiastki spełniające $|x_1 - x_2| < 3$.

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ trudniejsze

4 Położenie pierwiastków względem liczby

📌 DLA $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ I LICZBY k (WIERZCHOŁEK $x_w = -\frac{b}{2a}$)

- $x_1 < k < x_2 \iff f(k) < 0$ (wtedy $\Delta > 0$ automatycznie).
- oba pierwiastki większe od $k \iff \Delta > 0, x_w > k, f(k) > 0$.
- oba w przedziale $(k, l) \iff \Delta > 0, k < x_w < l, f(k) > 0, f(l) > 0$.

Równoważnie można przesunąć pierwiastki: „oba większe od k ” $\iff (x_1 - k) + (x_2 - k) > 0$ i $(x_1 - k)(x_2 - k) > 0$, przy $\Delta > 0$. Dla $a < 0$ znaki $f(k)$ się odwracają (albo pomnóż równanie przez -1).

Przykład 4.1

Liczba między pierwiastkami

Dla jakich m liczba 1 leży między pierwiastkami równania $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$? A dla jakich oba pierwiastki są większe od 1?

- 1 $f(1) = 1 - 2m + 3m - 2 = m - 1 < 0$: $m < 1$.
- 2 Oba większe od 1: $\Delta > 0$ ($m < 1$ albo $m > 2$), $x_w = m > 1$, $f(1) = m - 1 > 0$. Część wspólna: $m > 2$.

Wynik: $m \in (-\infty, 1)$; oba większe od 1 dla $m \in (2, +\infty)$. Sprawdź oba w symulacji.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 12 min

- 1 Dla jakich m równanie $x^2 + (m-1)x - m - 4 = 0$ ma pierwiastki $x_1 < 2 < x_2$?
- 2 Dla jakich m oba pierwiastki równania $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ należą do przedziału $(-2, 4)$?

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 22 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WYRAŻENIA SYMETRYCZNE

ZESTAWY A

- 1 Dla równania $x^2 - 3x - 2 = 0$ oblicz (bez wyznaczania pierwiastków).



- a) $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ b) $(x_1 - x_2)^2$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

POZIOM B · WARUNKI NA PARAMETR

ZESTAWY B

- 1 Wyznacz m , dla których równanie ma dwa różne pierwiastki.



- a) $x^2 + 4x + m = 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

- 2 Zapisz pełny układ warunków (bez rozwiązywania), dla $f(x) = x^2 + bx + c$ z b, c zależnymi od m .



- a) dwa różne dodatnie

... pozostałe przykłady na stronie treningu

POZIOM C · PEŁNE KRÓTKIE ZADANIA

ZESTAWY C

1 Wyznacz wszystkie m .

■ ■ ■

a) $x^2 - 2x + m = 0$, dwa
różne, $x_1^2 + x_2^2 = 10$

b) $x^2 - 4x + m = 0$,
 $x_1 = 3x_2$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

Pełny trening (22 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

Zadanie z parametrem było w każdym arkuszu rozszerzonym z lat 2024–2026, za 4–6 punktów. Według sprawozdań CKE zdający uzyskali średnio 41% punktów w 2025 i tylko 18% w 2026 (wariant „oba pierwiastki w przedziale”). Typowe błędy: niepełny albo nierównoważny układ warunków, zastąpienie warunku „oba dodatnie” samym $x_1 x_2 > 0$, pominięcie $\Delta > 0$, błędy w nierównościach wymiernych od m . Zasady oceniania: $\Delta \geq 0$ zamiast $\Delta > 0$ to 0 punktów za etap pierwszy, a błąd nierachunkowy w etapach I–III to 0 punktów za etap końcowy. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

3 zadania · 14 pkt · ok. 45 min

1 (0–6 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste tego samego znaku, spełniające warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$.

2 (0–5 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których oba pierwiastki równania $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m - 3 = 0$ należą do przedziału $(-1, 5)$.

3 (0–3 pkt) Wyznacz wszystkie wartości m , dla których równanie $(x-3)(x^2 + mx + 4) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ trudniejsze

Najczęstsze błędy

- × „Dwa różne pierwiastki: $\Delta \geq 0$.”

$\Delta > 0$. Przy $\Delta = 0$ pierwiastek jest jeden. W kluczu: 0 punktów za ten etap.

- × „Oba dodatnie: $x_1 x_2 > 0$.”

To tylko „tego samego znaku”. Dodatnie wymagają jeszcze $x_1 + x_2 > 0$.

- × „ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$.”

Brakuje $-2x_1 x_2$. W kluczu z 2025 taki błąd ograniczał wynik do 2 punktów.

- × „ $\frac{2m}{m-3} > 1$, więc $2m > m - 3$.”

Mnożenie przez $m - 3$ o nieznanym znaku. Przenieś na jedną stronę (lekcja 3.4 Wyrażenia, równania i nierówności wymierne).

- × „Mam trzy zbiory warunków, więc to koniec.”

Odpowiedzią jest ich część wspólna, za którą jest osobny punkt.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Ile wynosi $x_1 + x_2$ dla $3x^2 - 6x + 2 = 0$?

2.

- 2 Jak wyrazić $(x_1 - x_2)^2$ przez s i p ?

$s^2 - 4p$.

- 3 Jaki warunek daje „pierwiastki różnych znaków”?

$x_1 x_2 < 0$ (wtedy $\Delta > 0$ automatycznie).

4 Kiedy liczba k leży między pierwiastkami f przy $a > 0$?

Gdy $f(k) < 0$.

VIÈTE

$$s = -\frac{b}{a}, p = \frac{c}{a}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p, (x_1 - x_2)^2 = s^2 - 4p$$

$$x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp$$

WARUNKI

dwa różne: $a \neq 0, \Delta > 0$

dodatnie: $s > 0, p > 0$; różnych znaków:

$$p < 0$$

$$x_1 < k < x_2: af(k) < 0$$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” są wzory Viète'a (w dziale o funkcji kwadratowej). Przekształceń wyrażeń symetrycznych i warunków na położenie pierwiastków broszura nie zawiera.

Dalej: układy równań i zadania tekstowe (lekcja 4.1 Układy równań liniowych i zadania tekstowe).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\Delta = 37 > 0; s = -5, p = -3$.
2. $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 15$.
1. $a \neq 0; m \neq 1$.
2. $\Delta = 16 - 4(m - 1) = 20 - 4m > 0; m < 5$.
3. $m \in (-\infty, 1) \cup (1, 5)$.

Zadania • część 2

1. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$
2. $= s(s^2 - 2p - p) = s^3 - 3sp$.
1. $s = 4, p = 1; x_1^2 + x_2^2 = 14$.
2. $14^2 - 2 = 194$.

Zadania • część 3

1. $\Delta = m^2 - 4m - 12 = (m - 6)(m + 2) > 0; m < -2$ albo $m > 6$.
2. $s = -m < 0; m > 0. p = m + 3 > 0; m > -3$.
3. Część wspólna: $m > 6$.
1. $\Delta = (m + 2)^2 - 8m = (m - 2)^2 > 0; m \neq 2$.
2. $|x_1 - x_2| = \sqrt{\Delta} = |m - 2| < 3; -1 < m < 5$.
3. $m \in (-1, 2) \cup (2, 5)$. (Pierwiastki to 2 i m .)

Zadania • część 4

1. $f(2) = 4 + 2m - 2 - m - 4 = m - 2 < 0$.
2. $m < 2$.
1. Pierwiastki to $m - 1$ i $m + 1$ ($\Delta = 4 > 0$ zawsze).
2. $m - 1 > -2$ i $m + 1 < 4; -1 < m < 3$.
3. Ta sama odpowiedź wychodzi z warunków $f(-2) > 0, f(4) > 0, -2 < x_w < 4$.

Zestawy A

1. a) 3; -2 b) 17

Zestawy B

1. a) $m < 4$
2. a) $\Delta > 0, -b > 0, c > 0$

Zestawy C

1. a) $m = -3$ b) $m = 3$

Zadania w stylu maturalnym

1. **Etap I.** $m \neq -1$; $\frac{\Delta}{4} = m^2 - (m+1)(m-3) = 2m+3 > 0$: $m > -\frac{3}{2}$. Razem $m \in (-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$.
2. **Etap II (ten sam znak).** $x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+1} > 0 \iff (m-3)(m+1) > 0$: $m < -1$ albo $m > 3$.
3. **Etap III (warunek).** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{s}{p} = \frac{2m/(m+1)}{(m-3)/(m+1)} = \frac{2m}{m-3} > 1 \iff \frac{m+3}{m-3} > 0$: $m < -3$ albo $m > 3$.
4. **Część wspólna.** $(-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, \infty)$, $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$:

$$m \in (3, +\infty).$$

1 pkt za etap I ($m \neq -1$ i $\Delta > 0$). **1 pkt** za etap II. **3 pkt** za etap III: **1 pkt** za zapis $\frac{s}{p}$, **2 pkt** za nierówność $\frac{2m}{m-3} > 1$, **3 pkt** za jej rozwiązanie. **1 pkt** za część wspólną.

Uwaga: pomnożenie $\frac{2m}{m-3} > 1$ przez $m-3$ bez badania znaku to błąd metody w etapie III.

1. Δ . $\frac{\Delta}{4} = (m+1)^2 - (m^2 + 2m - 3) = 4 > 0$ dla każdego m ; pierwiastki $m+1 \mp 2$, czyli $m-1$ i $m+3$.
2. **Warunki.** $m-1 > -1$ i $m+3 < 5$.
3. **Wynik.** $0 < m < 2$.

1 pkt za $\Delta > 0$. **2 pkt** za pierwiastki w zależności od m (albo za warunki $f(-1) > 0$, $f(5) > 0$). **3 pkt** za warunek na wierzchołek albo oba warunki na pierwiastki. **4 pkt** za rozwiązanie warunków. **5 pkt** za $m \in (0, 2)$.

Uwaga: niepełny układ warunków (np. bez warunku na wierzchołek przy drodze przez $f(-1)$ i $f(5)$) daje co najwyżej 3 pkt.

1. **Pierwiastek 3.** jest zawsze; trójmian nie może dać żadnego innego.
2. **Przypadek $\Delta < 0$.** $m^2 - 16 < 0$: $m \in (-4, 4)$.
3. **Przypadek „trójmian ma tylko pierwiastek 3”.** wymagałby $\Delta = 0$ i $x_w = -\frac{m}{2} = 3$, czyli $m = -6$; ale wtedy $\Delta = 36 - 16 \neq 0$. Niemożliwe.
4. **Odpowiedź.** $m \in (-4, 4)$.

1 pkt za $\Delta < 0$. **2 pkt** za rozwiązanie $m \in (-4, 4)$. **3 pkt** za wykluczenie przypadku podwójnego pierwiastka 3.

Matura z matematyki · Lekcja 3.6: Wzory Viète'a i równania z parametrem · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości, błędy i schematy punktacji według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt3_6.py).