

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

W każdym arkuszu rozszerzonym z lat 2024–2026 było jedno zadanie za 4 punkty z wartością bezwzględną; sprawozdanie CKE nazywa je „pewniakiem”. Algorytm jest mechaniczny: punkty zerowania, przedziały, które razem dają całą oś, rozwiązanie w każdym przedziale, część wspólna, suma. Punkty traci się na przedziałach, które nie pokrywają osi, i na zapomnianej części wspólnej.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 60
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
III.R4

W TEJ LEKCJI

0 Moduł to odległość

1 Proste przypadki:

$$|f| = c$$

$$|f| < c$$

$$|f| > c$$

2 Metoda przedziałów

3 Skróty: wyłączanie i kwadraty

4 Moduł z trójmianem

5 Trening rachunkowy

6 Na maturze

7 Najczęstsze błędy

8 Sprawdź się

9 Karta wzorów i co dalej

Moduł to odległość

$|x - a|$ to odległość liczby x od a na osi (lekcja 1.1 Działania, przedziały i wartość bezwzględna). Dlatego $|x - 3| < 2$ to „ x jest bliżej niż 2 od 3”, czyli $(1, 5)$. Przy dwóch modułach interpretacja odległościowa przestaje wystarczać i potrzebny jest algorytm. W zadaniach maturalnych moduły zawsze dzielą oś na kilka przedziałów, w których można je opuścić.

1 Proste przypadki: $|f| = c$, $|f| < c$, $|f| > c$

DLA $c > 0$

- $|f(x)| = c \iff f(x) = c \text{ albo } f(x) = -c;$
- $|f(x)| < c \iff -c < f(x) < c;$
- $|f(x)| > c \iff f(x) < -c \text{ albo } f(x) > c.$

Dla $c < 0$: $|f| = c$ i $|f| < c$ nie mają rozwiązań, $|f| > c$ zachodzi zawsze (w dziedzinie).

Przykład 1.1

Nierówność z jednym modułem

Rozwiąż nierówność $|2x - 5| \geq 3$.

- 1 $2x - 5 \leq -3$ albo $2x - 5 \geq 3$.
- 2 $x \leq 1$ albo $x \geq 4$.

Wynik: $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 4 min

- 1 Rozwiąż równanie $|3x + 1| = 7$.

- 2 Rozwiąż nierówność $|x^2 - 5| < 4$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

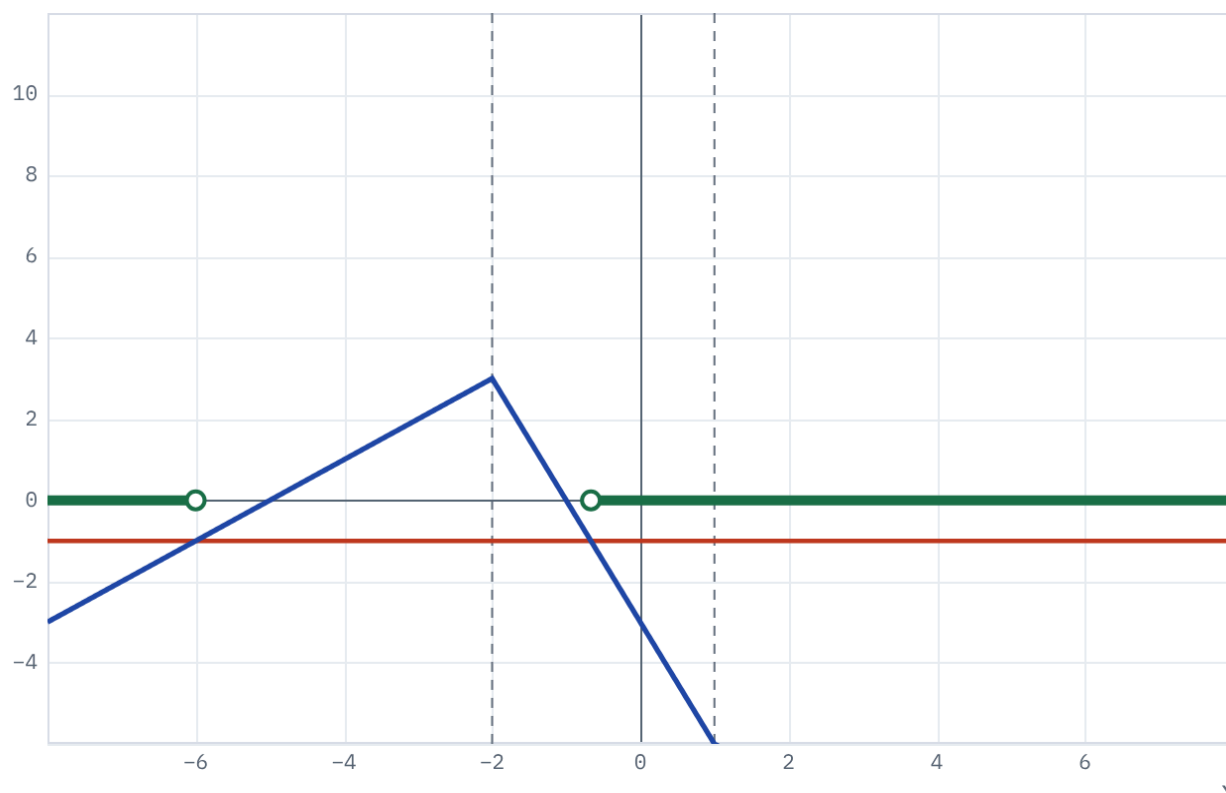
Metoda przedziałów

ALGORYTM (TAK JEST PUNKTOWANY)

1. Wyznacz punkty, w których wyrażenia pod modułami się zerują.
2. Podziel oś na przedziały, które **razem dają** $\mathbb{R}$: każdy punkt zerowania dołącz do jednego z sąsiednich przedziałów (np. $(-\infty, a)$, $[a, b)$, $[b, +\infty)$).
3. W każdym przedziale opuść moduły zgodnie ze znakiem: $|u| = u$ dla $u \geq 0$, $|u| = -u$ dla $u < 0$.
4. Rozwiąż nierówność liniową i weź **część wspólną** z przedziałem.
5. Odpowiedź to **suma** wyników ze wszystkich przedziałów.

SYMULACJA 1

Lewa i prawa strona nierówności jako wykresy. Przerywane linie to punkty zerowania modułów: między nimi wykresy są odcinkami prostych (albo łukami paraboli), bo moduły można tam opuścić. Zbiór rozwiązań to te x , dla których wykres lewej strony jest pod (albo nad) wykresem prawej. Pierwsza nierówność to przykład 2.1.



— lewa strona $L(x)$ — prawa strona $P(x)$ — zbiór rozwiązań — punkty zerowania modułów

nierówność $|x - 1| - 2|x + 2| < -1$

punkty zerowania -2 i 1

zbiór rozwiązań $(-\infty, -6) \cup (-2/3, +\infty)$

Punkty -2 i 1 dzielą oś na przedziały, w których każdy moduł ma stały znak i można go opuścić. Rozwiązanie to te x , dla których wykres $L(x)$ leży pod wykresem $P(x)$. Na końcu suma wyników ze wszystkich przedziałów.

Stan na rysunku: $|x - 1| - 2|x + 2| < -1$; zbiór rozwiązań $(-\infty, -6) \cup (-2/3, +\infty)$.

Przykład 2.1

Dwa moduły, trzy przedziały

Rozwiąż nierówność $|x - 1| - 2|x + 2| < -1$.

- 1 Punkty zerowania: -2 i 1 . Przedziały: $(-\infty, -2)$, $[-2, 1)$, $[1, +\infty)$.
- 2 $x < -2$: $(1 - x) + 2(x + 2) = x + 5 < -1$, czyli $x < -6$. Część wspólna: $(-\infty, -6)$.
- 3 $-2 \leq x < 1$: $(1 - x) - 2(x + 2) = -3x - 3 < -1$, czyli $x > -\frac{2}{3}$. Część wspólna: $(-\frac{2}{3}, 1)$.
- 4 $x \geq 1$: $(x - 1) - 2(x + 2) = -x - 5 < -1$, czyli $x > -4$. Część wspólna: $[1, +\infty)$.

Wynik: $x \in (-\infty, -6) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 12 min

- 1 Rozwiąż nierówność $|2x + 4| + |x - 3| \geq 9$.

- 2 Rozwiąż równanie $|x + 3| + |x - 1| = 6$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Skróty: wyłączanie i kwadraty

DWA RUCHY, KTÓRE SKRACAJĄ RACHUNEK

- **Wyłączenie:** $|4x - 8| = 4|x - 2|$, $|2 - x| = |x - 2|$. Często po tym zostaje mniej różnych modułów.
- **Kwadraty:** dla nieujemnych stron $|A| \leq |B| \iff A^2 \leq B^2 \iff (A - B)(A + B) \leq 0$. Sprawozdanie CKE z 2026 roku wskazuje tę drogę jako najszybszą.

Przykład 3.1

Przez kwadraty

Rozwiąż nierówność $|x + 1| \leq |2x - 4|$.

- 1 $(x + 1)^2 \leq (2x - 4)^2 \iff (x + 1 - 2x + 4)(x + 1 + 2x - 4) \leq 0$.
- 2 $(5 - x)(3x - 3) \leq 0 \iff (x - 5)(x - 1) \geq 0$.

Wynik: $x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 3

1 zadanie · ok. 5 min

- 1 Rozwiąż równanie $|6x - 3| + |1 - 2x| = 8$.



▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

4 Moduł z trójmianem

Przykład 4.1

Wspólny czynnik

Rozwiąż nierówność $|2x - 2| < |x^2 - 1|$.

- 1 $|2x - 2| = 2|x - 1|$, $|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1|$.
- 2 Dla $x = 1$ obie strony są zerami: nierówność ostra nie zachodzi.
- 3 Dla $x \neq 1$ dzielimy przez $|x - 1| > 0$: $2 < |x + 1|$, czyli $x < -3$ albo $x > 1$.

Wynik: $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. Dzielenie przez $|x - 1|$ bez osobnego zbadania $x = 1$ to dokładnie ten błąd, który w 2026 kosztował zdających ostatni punkt.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 6 min

- 1 Rozwiąż nierówność $|x^2 - 4| \geq |x + 2|$.



5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 23 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · JEDEN MODUŁ

ZESTAWY A

1 Rozwiąż.



a) $|x + 2| = 5$

b) $|x - 3| \leq -1$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · OPUSZCZANIE MODUŁÓW

ZESTAWY B

1 Zapisz bez modułów w podanym przedziale.



a) $|x - 1| + |x + 3|$, $x < -3$ b) $2|x + 1| - |x - 4|$,
 $-1 \leq x < 4$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · DWA MODUŁY I SKRÓTY

ZESTAWY C

1 Rozwiąż metodą przedziałów.



a) $|x - 1| + |x + 3| = 10$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Rozwiąż skrótem (wyłączenie albo kwadraty).

■■■

a) $|x - 2| < |x + 4|$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

Pełny trening (23 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

Zadanie z wartością bezwzględną za 4 punkty było w każdym arkuszu rozszerzonym 2024–2026. Według sprawozdań CKE zdający uzyskali za nie średnio 52% punktów w 2025 i 49% w 2026, gdy po raz pierwszy pojawił się moduł z trójmianem. Zasady oceniania mają stałe ograniczenia: przedziały, które nie pokrywają $\mathbb{R}$, dają co najwyżej 3 punkty; jeden błąd nierachunkowy przy opuszczaniu modułu co najwyżej 2 punkty; rozwiązanie graficzne bez rachunkowego sprawdzenia punktów przecięcia co najwyżej 3 punkty. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 16 pkt · ok. 45 min

1 (0–4 pkt) Rozwiąż nierówność $|x + 4| - 3|x - 1| > -2$.

■■■

2 (0–4 pkt) Rozwiąż równanie $|3x - 9| + |x + 1| = |3 - x| + |x - 5| + 6$.

■■■

3 (0–4 pkt) Rozwiąż nierówność $|x^2 - 9| > |3x - 9|$.

■■■

4 (0–4 pkt) Rozwiąż nierówność $|x - 2| + |x + 2| \leq 6 - x$.

■■■

■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „Przedziały: $x < -2$, $-2 < x < 1$, $x > 1$.”

Punkty -2 i 1 nie należą do żadnego przedziału. Przedziały muszą dawać $\mathbb{R}$; inaczej co najwyżej 3 punkty.

× „W przedziale wyszło $x > -4$, więc to jest wynik.”

Wynik w przedziale $[1, +\infty)$ to część wspólna $[1, +\infty) \cap (-4, +\infty) = [1, +\infty)$.

× „Odpowiedź to część wspólna wyników z przedziałów.”

Odpowiedź to **suma**: każdy przedział daje swoją część zbioru.

× „Dzielę obie strony przez $|x - 3|$.”

Tylko dla $x \neq 3$; przypadek $x = 3$ trzeba sprawdzić osobno.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Ile wynosi $|x - 2|$ dla $x < 2$?

$2 - x$.

2 Jaki jest zbiór rozwiązań $|x + 1| < -3$?

Pusty.

3 Na ile przedziałów dzielą oś trzy różne punkty zerowania?

Na cztery.

4 Kiedy wolno podnieść nierówność $|A| < |B|$ do kwadratu?

Zawsze: obie strony są nieujemne.

PROSTE PRZYPADKI ($c > 0$)

$$|f| < c \iff -c < f < c$$

$$|f| > c \iff f < -c \vee f > c$$

$$|A| \leq |B| \iff (A - B)(A + B) \leq 0$$

PRZEDZIAŁY

razem $\mathbb{R}$; w każdym część wspólna; na końcu suma

$$|ku| = |k| |u|, \quad |a - b| = |b - a|$$

W broszurze CKE „Wybrane wzory matematyczne” jest definicja wartości bezwzględnej i jej podstawowe własności. Metody przedziałów broszura nie opisuje.

Dalej: wzory Viète'a i równania z parametrem (lekcja 3.6 Wzory Viète'a i równania z parametrem).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $3x + 1 = 7$ albo $3x + 1 = -7$: $x = 2$ albo $x = -\frac{8}{3}$.

2. 1. $-4 < x^2 - 5 < 4$, czyli $1 < x^2 < 9$.

2. $x \in (-3, -1) \cup (1, 3)$.

Zadania • część 2

1. 1. $x < -2$: $-3x - 1 \geq 9$, $x \leq -\frac{10}{3}$.

2. $-2 \leq x < 3$: $x + 7 \geq 9$, $x \geq 2$: $[2, 3)$.

3. $x \geq 3$: $3x + 1 \geq 9$: cały $[3, +\infty)$.

4. $x \in (-\infty, -\frac{10}{3}] \cup [2, +\infty)$.

2. 1. $x < -3$: $-2x - 2 = 6$, $x = -4$ ✓.

2. $-3 \leq x < 1$: $4 = 6$, sprzeczność.

3. $x \geq 1$: $2x + 2 = 6$, $x = 2$ ✓.

4. $x \in \{-4, 2\}$.

Zadania • część 3

1. 1. $|6x - 3| = 3|2x - 1|$, $|1 - 2x| = |2x - 1|$, więc $4|2x - 1| = 8$.

2. $|2x - 1| = 2$: $x = \frac{3}{2}$ albo $x = -\frac{1}{2}$.

Zadania • część 4

1. 1. $|x + 2||x - 2| \geq |x + 2|$.

2. $x = -2$: $0 \geq 0$ ✓.

3. $x \neq -2$: $|x - 2| \geq 1$, czyli $x \leq 1$ albo $x \geq 3$.

4. $x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ (liczba -2 już jest w zbiorze).

Zestawy A

1. a) $-7, 3$ b) $\emptyset$

Zestawy B

1. a) $-2x - 2$ b) $3x - 2$

Zestawy C

1. a) $-6, 4$

2. a) $(-1, +\infty)$

Zadania w stylu maturalnym

1. **Przedziały.** $(-\infty, -4)$, $[-4, 1)$, $[1, +\infty)$.
 2. $x < -4$. $-(x+4) + 3(x-1) = 2x - 7 > -2$, $x > \frac{5}{2}$: brak części wspólnej.
 3. $-4 \leq x < 1$. $(x+4) + 3(x-1) = 4x + 1 > -2$, $x > -\frac{3}{4}$: $(-\frac{3}{4}, 1)$.
 4. $x \geq 1$. $(x+4) - 3(x-1) = -2x + 7 > -2$, $x < \frac{9}{2}$: $[1, \frac{9}{2})$.
 5. **Suma.** $x \in (-\frac{3}{4}, \frac{9}{2})$.

1 pkt za podział na przedziały i nierówność bez modułu w jednym z nich. **2 pkt** za nierówności bez modułów we wszystkich przedziałach. **3 pkt** za rozwiązania w dwóch przedziałach (z częścią wspólną). **4 pkt** za odpowiedź.

Uwaga: przedziały, które nie dają razem $\mathbb{R}$ (np. same nierówności ostre), ograniczają wynik do 3 pkt.

2. **Wyłączenie.** $|3x - 9| = 3|x - 3|$, $|3 - x| = |x - 3|$: $2|x - 3| + |x + 1| = |x - 5| + 6$.
 2. $x < -1$. $-2x + 6 - x - 1 = -x + 5 + 6$: $-3x + 5 = -x + 11$, $x = -3 \checkmark$.
 3. $-1 \leq x < 3$. $-2x + 6 + x + 1 = -x + 11$: $7 = 11$, sprzeczność.
 4. $3 \leq x < 5$. $2x - 6 + x + 1 = -x + 11$: $4x = 16$, $x = 4 \checkmark$.
 5. $x \geq 5$. $3x - 5 = x + 1$: $x = 3$, poza przedziałem.
6. **Odpowiedź.** $x \in \{-3, 4\}$.

1 pkt za wyłączenie (albo podział na przedziały i jeden przedział bez modułów). **2 pkt** za równania we wszystkich przedziałach. **3 pkt** za rozwiązania w co najmniej dwóch przedziałach. **4 pkt** za $\{-3, 4\}$.

3. **1. Czynniki wspólne.** $|x - 3| |x + 3| > 3|x - 3|$.
 2. $x = 3$. $0 > 0$: fałsz.
 3. $x \neq 3$. $|x + 3| > 3$: $x < -6$ albo $x > 0$.
 4. **Odpowiedź.** $x \in (-\infty, -6) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$.

1 pkt za rozkład $|x - 3| |x + 3|$ i $3|x - 3|$. **2 pkt** za zbadanie $x = 3$. **3 pkt** za $|x + 3| > 3$ i jego rozwiązanie. **4 pkt** za zbiór z wykluczonym 3.

Uwaga: pominięcie warunku $x \neq 3$ daje co najwyżej 3 pkt.

4.
 1. $x < -2$. $-2x \leq 6 - x$, $x \geq -6$: $[-6, -2)$.
 2. $-2 \leq x < 2$. $4 \leq 6 - x$, $x \leq 2$: cały $[-2, 2)$.
 3. $x \geq 2$. $2x \leq 6 - x$, $x \leq 2$: $\{2\}$.
 4. **Suma.** $x \in [-6, 2]$.

1 pkt za przedziały i jeden przedział bez modułów. **2 pkt** za wszystkie trzy nierówności. **3 pkt** za rozwiązania w dwóch przedziałach. **4 pkt** za $[-6, 2]$.

Matura z matematyki · Lekcja 3.5: Wartość bezwzględna · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); typy zadań, łatwości, błędy i ograniczenia punktacji według arkuszy, zasad oceniania i sprawozdań CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt3_5.py).