

Wyrażenia, równania i nierówności wymierne

Na poziomie rozszerzonym wyrażenia wymierne trzeba dodawać, równania z nimi rozwiązywać z dziedziną, a nierówności rozwiązywać bez mnożenia przez mianownik o nieznanym znaku. Ten ostatni ruch decyduje o punktach w zadaniach z parametrem, gdzie warunek typu $\frac{m+8}{2-m} > 0$ jest jednym z etapów.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 50
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
II.R6, III.R2,
III.R7

W TEJ LEKCJI

- 0 Mnożenie, którego nie wolno zrobić
- 1 Działania na wyrażeniach wymiernych
- 2 Równania wymierne
- 3 Nierówności wymierne
- 4 Nierówność wymierna z parametrem
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Mnożenie, którego nie wolno zrobić

Nierówność $\frac{x-2}{x+1} \geq 1$. Pomnożenie przez $x+1$ daje $x-2 \geq x+1$, czyli $-2 \geq 1$: brak rozwiązań. A przecież $x = -2$ daje $\frac{-4}{-1} = 4 \geq 1$. Błąd: dla $x < -1$ czynnik $x+1$ jest ujemny i zwrot powinien się odwrócić. Bezpieczna droga to przeniesienie wszystkiego na jedną stronę: $\frac{x-2}{x+1} - 1 = \frac{-3}{x+1} \geq 0$, co zachodzi dokładnie dla $x+1 < 0$. Wynik: $x \in (-\infty, -1)$.

Działania na wyrażeniach wymiernych

 WYRAŻENIE WYMIERNE $\frac{W(x)}{Q(x)}$

- Dziedzina: wszystkie x , dla których $Q(x) \neq 0$ (we **wszystkich** mianownikach, także tych, które znikną po skróceniu).
- Dodawanie: rozłóż mianowniki na czynniki, weź najmniejszy wspólny mianownik, rozszerz ułamki.
- Skracanie tylko przez **czynnik** wspólny licznika i mianownika, nigdy przez składnik.

Przykład 1.1

Suma ułamków

Zapisz w najprostszej postaci $\frac{2}{x-2} - \frac{8}{x^2-4}$ i podaj dziedzinę.

- 1 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$; dziedzina $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
- 2 $\frac{2(x+2)-8}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)}$.

Wynik: $\frac{2}{x+2}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Liczba 2 zostaje wykluczona, choć zniknęła z mianownika.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 5 min

- 1 Uprość $\frac{x}{x+3} + \frac{3}{x-3} - \frac{18}{x^2-9}$.

2 Uprość $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ i podaj wartość dla $x = \sqrt{2}$.

podstawowe średnie trudniejsze

2 Równania wymierne

$$\frac{W(x)}{Q(x)} = 0 \iff W(x) = 0 \text{ i } Q(x) \neq 0$$

Przenieś wszystko na jedną stronę, sprowadź do jednego ułamka, przyrównaj licznik do zera i odrzuć liczby spoza dziedziny.

Przykład 2.1

Odrzucony pierwiastek

Rozwiąż równanie $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$.

- 1 Dziedzina $x \neq \pm 1$. Mnożymy przez $x^2 - 1$ (to wolno w równaniu, bo w dziedzinie jest różne od zera): $x(x+1) + (x-1) = 2$.
- 2 $x^2 + 2x - 3 = 0$, czyli $(x+3)(x-1) = 0$.
- 3 $x = 1$ nie należy do dziedziny.

Wynik: $x = -3$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

1 zadanie · ok. 4 min

1 Rozwiąż równanie $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x} = 1$.

podstawowe średnie trudniejsze

$$\nabla \frac{W(x)}{Q(x)} \geq 0$$

1. Wyznacz dziedzinę: $Q(x) \neq 0$.
2. Przenieś wszystko na jedną stronę i sprowadź do jednego ułamka. **Nie mnoż przez mianownik o nieznanym znaku.**
3. Iloraz ma ten sam znak co iloczyn: $\frac{W}{Q} > 0 \iff W \cdot Q > 0$; $\frac{W}{Q} \geq 0 \iff W \cdot Q \geq 0$ i $Q \neq 0$.
4. Rozwiąż nierówność wielomianową metodą wężyka (lekcja 3.3 Nierówności wielomianowe i równania dwukwadratowe); pierwiastki mianownika zawsze wykluczone.

Przykład 3.1

Nieostra nierówność wymierna

Rozwiąż nierówność $\frac{x+3}{x-1} \leq 2$.

- 1 Dziedzina $x \neq 1$. $\frac{x+3}{x-1} - 2 = \frac{x+3-2x+2}{x-1} = \frac{-x+5}{x-1} \leq 0$.
- 2 $\iff (5-x)(x-1) \leq 0$ i $x \neq 1$, czyli $(x-5)(x-1) \geq 0$, $x \neq 1$.
- 3 $(x-5)(x-1) \geq 0$ dla $x \leq 1$ albo $x \geq 5$; wykluczamy 1.

Wynik: $x \in (-\infty, 1) \cup [5, +\infty)$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 8 min

1 Rozwiąż nierówność $\frac{2x-1}{x+2} > 1$.

2 Rozwiąż nierówność $\frac{x^2-4}{x^2-2x-3} \geq 0$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

Nierówność wymierna z parametrem

Przykład 4.1

Etap z zadania o wzorach Viète'a

Pierwiastki równania $(3 - m)x^2 + 2x + m + 5 = 0$ mają iloczyn $x_1x_2 = \frac{m+5}{3-m}$. Dla jakich m ten iloczyn jest dodatni?

- 1 $\frac{m+5}{3-m} > 0 \iff (m+5)(3-m) > 0$.
- 2 Parabola w zmiennej m z ramionami w dół, pierwiastki -5 i 3 .

Wynik: $m \in (-5, 3)$. Mnożenie „na krzyż” do $m+5 > 3-m$ dałoby $m > -1$: błąd, za który w kluczu traci się punkt etapu.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

1 zadanie · ok. 4 min

- 1 Dla jakich m zachodzi $\frac{2m-1}{m+2} < 1$?

podstawowe średnie trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 23 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · WYRAŻENIA

ZESTAWY A

- 1 Uprość i podaj dziedzinę.

■ ■ ■

a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$

b) $\frac{x^2-9}{x^2+3x}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe średnie trudniejsze

ZESTAWY B

1 Rozwiąż.



a) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$

b) $\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{8}{x^2 - 1}$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

ZESTAWY C

1 Rozwiąż nierówność.



a) $\frac{x - 4}{x + 1} < 0$

b) $\frac{x}{x - 1} \leq 2$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Wyznacz wartości parametru.



a) $\frac{m + 4}{1 - m} > 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

podstawowe
 średnie
 trudniejsze

Pełny trening (23 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach rozszerzonych z lat 2024–2026 nie było samodzielnego zadania z nierównością wymierną. Takie nierówności są jednak etapem prawie każdego zadania z parametrem i wzorami Viète'a (lekcja 3.6 Wzory Viète'a i równania z parametrem), np. warunek $\frac{m+8}{2-m} > 0$ w maju 2025. W informatorze CKE dwie nierówności wymierne od parametru są częścią zadania za 6 punktów. Poniższe zadania są nasze, w stylu arkusza.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 12 pkt · ok. 30 min

1 (0-3 pkt) Rozwiąż nierówność $\frac{x+1}{x-2} \geq \frac{x}{x+2}$.

2 (0-3 pkt) Rozwiąż równanie $\frac{2}{x+1} + \frac{x}{x-2} = \frac{6}{x^2-x-2}$.

3 (0-2 pkt) Wyznacz wszystkie wartości m , dla których $\frac{m^2-9}{m-1} \leq 0$.

4 (0-4 pkt) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że $a+b=2$, prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq 1$.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „ $\frac{x-2}{x+1} \geq 1$, więc $x-2 \geq x+1$.”

Mnożenie przez $x+1$ wymagałoby znajomości jego znaku. Przenieś na jedną stronę.

× „Po skróceniu $(x-2)$ dziedzina się rozszerza.”

Dziedzinę wyznacza się przed skróceniem i ona się nie zmienia.

× „ $\frac{W}{Q} \geq 0 \iff W \cdot Q \geq 0$.”

Trzeba dodać $Q \neq 0$: pierwiastki mianownika spełniają $W \cdot Q = 0$, ale nie należą do dziedziny.

× „ $\frac{x+3}{x} = 1 + 3$.”

Skraca się czynniki, nie składniki: $\frac{x+3}{x} = 1 + \frac{3}{x}$.

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Kiedy $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$?

Gdy $W(x) = 0$ i $Q(x) \neq 0$.

2 Jaki znak ma $\frac{a}{b}$ w porównaniu z ab ?

Ten sam (dla $b \neq 0$).

3 Jaka jest dziedzina $\frac{x-1}{x^2-x}$?

$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

4 Czy w równaniu wymiernym wolno pomnożyć przez mianownik?

Tak, w dziedzinie (jest tam różny od zera). W nierówności nie, jeśli nie znasz jego znaku.

RÓWNANIE

$$\frac{W}{Q} = 0 \iff W = 0 \wedge Q \neq 0$$

dziedzina przed skracaniem

NIERÓWNOŚĆ

jedna strona, jeden ułamek

$$\frac{W}{Q} \geq 0 \iff WQ \geq 0, Q \neq 0$$

Broszura CKE „Wybrane wzory matematyczne” nie zawiera reguł z tej lekcji.

Dalej: wartość bezwzględna (lekcja 3.5 Równania i nierówności z wartością bezwzględną) i wzory Viète'a z parametrem (3.6 Wzory Viète'a i równania z parametrem).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Wspólny mianownik $(x-3)(x+3)$.
2. Licznik $x(x-3) + 3(x+3) - 18 = x^2 - 9$.
3. Wynik 1 dla $x \neq \pm 3$.
1. $\frac{1}{x(x+1)}$
2. $\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Zadania • część 2

1. $x \neq 0, 2$; $3x - 2(x-2) = x(x-2)$.
2. $x+4 = x^2 - 2x$, czyli $x^2 - 3x - 4 = 0$.
3. $x = -1$ albo $x = 4$.

Zadania • część 3

1. $\frac{x-3}{x+2} > 0$
2. $(x-3)(x+2) > 0$; $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.
1. $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+1)} \geq 0$, dziedzina $x \neq -1, 3$.
2. Pierwiastki $-2, -1, 2, 3$; znaki od prawej: $+, -, +, -, +$.
3. $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 2] \cup (3, +\infty)$.

Zadania • część 4

1. $\frac{m-3}{m+2} < 0$
2. $(m-3)(m+2) < 0$; $m \in (-2, 3)$.

Zestawy A

- a) $\frac{3x+1}{x(x+1)}$; $x \neq 0, -1$ b) $\frac{x-3}{x}$; $x \neq 0, -3$

Zestawy B

- a) -2 b) 2

Zestawy C

- a) $(-1, 4)$ b) $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$
- a) $(-4, 1)$

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. Dziedzina. $x \neq \pm 2$.

2. Jeden ułamek. $\frac{(x+1)(x+2) - x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{5x+2}{(x-2)(x+2)} \geq 0$.

3. Wężyk. pierwiastki $-2, -\frac{2}{5}, 2$; iloczyn $(5x+2)(x-2)(x+2) \geq 0$ dla $x \in [-2, -\frac{2}{5}] \cup [2, +\infty)$.

4. Dziedzina. wykluczamy ± 2 : $x \in (-2, -\frac{2}{5}] \cup (2, +\infty)$.

1 pkt za dziedzinę i sprowadzenie do jednego ułamka. **2 pkt** za nierówność wielomianową równoważną. **3 pkt** za zbiór z wykluczonymi ± 2 .

2. 1. Dziedzina. $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, więc $x \neq -1, 2$.

2. Mnożenie. $2(x-2) + x(x+1) = 6$, czyli $x^2 + 3x - 10 = 0$.

3. Wynik. $(x+5)(x-2) = 0$; $x = 2$ poza dziedziną, zostaje $x = -5$.

1 pkt za dziedzinę. **2 pkt** za równanie kwadratowe i jego pierwiastki. **3 pkt** za odrzucenie 2 i odpowiedź -5 .

3. 1. Iloczyn. $(m-3)(m+3)(m-1) \leq 0, m \neq 1$.

2. Wynik. znaki od prawej: $+, -, +, -$; $m \in (-\infty, -3] \cup (1, 3]$.

1 pkt za nierówność wielomianową z warunkiem $m \neq 1$. **2 pkt** za zbiór.

4. 1. Jeden ułamek. $\frac{(b+1) + (a+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{4}{ab+a+b+1} = \frac{4}{ab+3}$.

2. Równoważność. mianownik dodatni, więc nierówność $\iff 4 \geq ab+3 \iff ab \leq 1$.

3. Szacowanie. $b = 2 - a$: $ab = 2a - a^2 = 1 - (a-1)^2 \leq 1$.

4. Wniosek. nierówność prawdziwa; równość dla $a = b = 1$.

1 pkt za sprowadzenie do $\frac{4}{ab+3}$. **2 pkt** za równoważną nierówność $ab \leq 1$ z uzasadnieniem znaku mianownika. **3 pkt** za $ab = 1 - (a-1)^2$ (albo nierówność między średnimi). **4 pkt** za pełny dowód.

Matura z matematyki · Lekcja 3.4: Wyrażenia, równania i nierówności wymierne · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze i zasady oceniania CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt3_4.py).