

Nierówności wielomianowe i równania dwukwadratowe

Nierówność wielomianowa rzadko jest na maturze osobnym zadaniem, ale pojawia się w środku zadań z wartością bezwzględną, z parametrem i w dowodach. Metoda jest zawsze ta sama: rozłożyć wielomian na czynniki, zaznaczyć pierwiastki z krotnościami i odczytać znak z „wężyka”. Punkty traci się na pierwiastkach parzystej krotności i na czynnikach, które nie mają pierwiastków.

CZAS

ok. 30 min
czytania + ok. 50
min zadań

ZADANIA

6 zadań w treści,
próbka treningu
rachunkowego, 4
zadania w stylu
maturalnym;
pełny trening na
osobnej stronie

WYMAGANIA

podstawa
programowa,
zakres
rozszerzony:
III.R1, III.R6

W TEJ LEKCJI

- 0 Znak iloczynu
- 1 Metoda „wężyka”
- 2 Najpierw rozkład
- 3 Równania dwukwadratowe
- 4 Liczba rozwiązań z parametrem
- 5 Trening rachunkowy
- 6 Na maturze
- 7 Najczęstsze błędy
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Znak iloczynu

Iloczyn $(x + 2)(x - 1)(x - 3)$ jest dodatni, gdy ujemnych czynników jest parzyście wiele. Dla bardzo dużego x wszystkie trzy są dodatnie, więc iloczyn też. Przy przejściu przez $x = 3$ czynnik $x - 3$ zmienia znak, więc zmienia się znak całości. Potem tak samo przy 1 i przy -2 . Stąd zbiór $(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$ to $(-2, 1) \cup (3, +\infty)$. Rysunek, na którym znak „wije się” przez kolejne pierwiastki, nazywa się w szkole wężykiem.

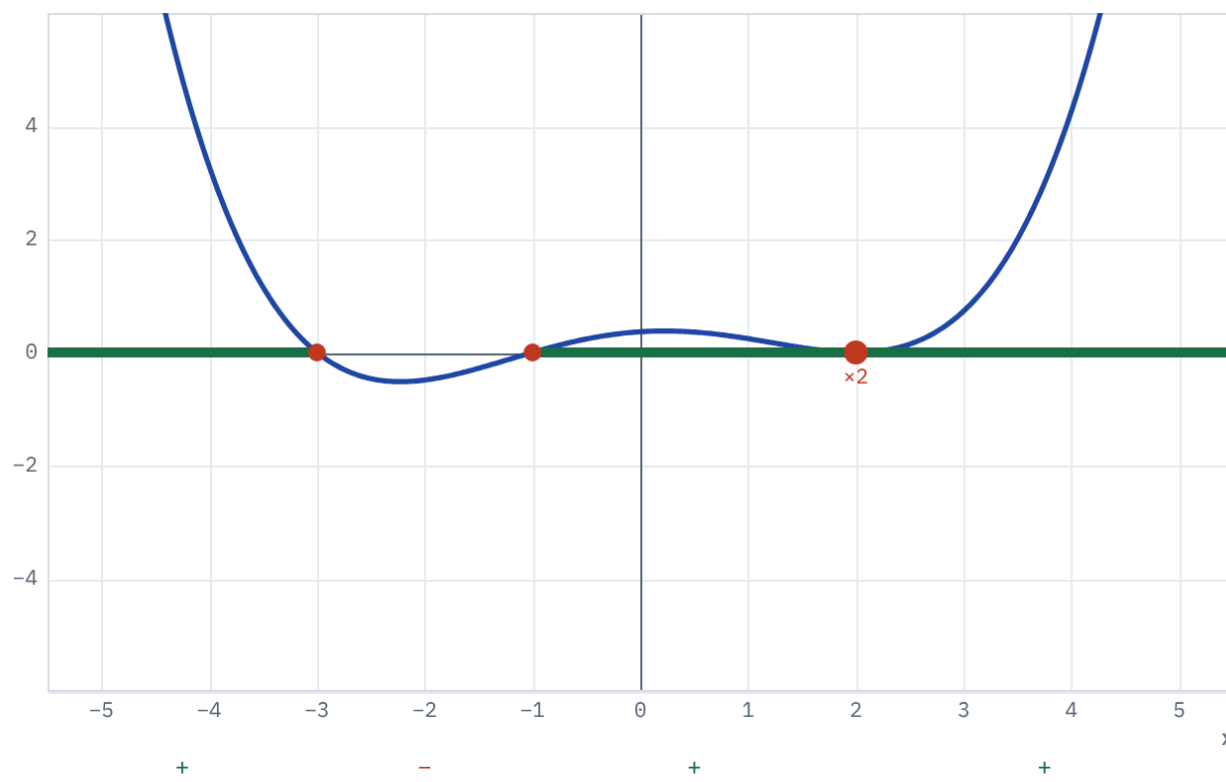
Metoda „wężyka”

🔧 PRZEPIS NA $W(x) \geq 0$

1. Rozłóż W na czynniki liniowe i kwadratowe bez pierwiastków: $W(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_n)^{k_n} \cdot Q(x)$, gdzie $Q > 0$.
2. Zaznacz pierwiastki na osi. Zaczynij z prawej strony od znaku a .
3. Idąc w lewo, przy pierwiastku **nieparzystej** krotności zmień znak, przy **parzystej** zostaw (wykres się odbija).
4. Odczytaj przedziały; przy $\geq$ i $\leq$ dołącz **wszystkie** pierwiastki, także te parzystej krotności, wokół których znak jest „zły”.

SYMULACJA 1

Wielomian rozłożony na czynniki, jego wykres i pasek znaków pod spodem. Wybierz wielomian i nierówność. Większe kropki to pierwiastki parzystej krotności: wykres się od nich odbija i znak się nie zmienia. Porównaj $W(x) > 0$ i $W(x) \geq 0$ dla $(x + 3)(x + 1)(x - 2)^2$: liczba 2 wchodzi do zbioru tylko przy nierówności nieostrej.



— $y = W(x)$ — pierwiastki (podwójne: odbicie) — zbiór rozwiązań

$$W(x) (x + 3)(x + 1)(x - 2)^2$$

pierwiastki (krotność) -3 (1); -1 (1); 2 (2)

$$W(x) \geq 0 (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$$

Znak skrajnie po prawej to znak współczynnika przy najwyższej potędze (+). Przy pierwiastku nieparzystej krotności znak się zmienia, przy parzystej nie (tu: $x = 2$; wykres się odbija). Przy nieostrej nierówności pierwiastek parzystej krotności należy do zbioru, nawet jeśli wokół niego znak jest zły.

Stan na rysunku: $W(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)^2$; $W(x) \geq 0$ dla $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$.

Przykład 1.1

Pierwiastek podwójny

Rozwiąż nierówność $(x + 3)(x + 1)(x - 2)^2 \leq 0$.

- 1 Pierwiastki: -3 (1), -1 (1), 2 (2). Współczynnik przy x^4 dodatni.
- 2 Znaki od prawej: $(2, +\infty)$: $+$; przy 2 bez zmiany: $(-1, 2)$: $+$; przy -1 zmiana: $(-3, -1)$: $-$; przy -3 zmiana: $(-\infty, -3)$: $+$.
- 3 ≤ 0 : przedział ze znakiem $-$ z końcami oraz pierwiastek 2 .

Wynik: $x \in [-3, -1] \cup \{2\}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 5 min

- 1 Rozwiąż nierówność $-x(x - 4)(x + 1) > 0$.

- 2 Rozwiąż nierówność $(x - 1)^2(x + 2) > 0$.

 podstawowe  średnie  trudniejsze

2 Najpierw rozkład

Narzędzia rozkładu są w lekcji 2.2 Wielomiany: dzielenie, rozkład na czynniki, pierwiastki całkowite: wyłączanie przed nawias, grupowanie, wzory skróconego mnożenia, pierwiastki całkowite i dzielenie przez dwumian. Zanim zaczniesz szukać pierwiastków, sprawdź grupowanie: często wystarcza.

Przykład 2.1

Grupowanie

Rozwiąż nierówność $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 \geq 0$.

- 1 $x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 9) = (x - 2)(x - 3)(x + 3)$.
- 2 Pierwiastki $-3, 2, 3$ (pojedyncze), współczynnik dodatni: od prawej $+, -, +, -$.

Wynik: $x \in [-3, 2] \cup [3, +\infty)$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 8 min

- 1 Rozwiąż nierówność $x^3 + 4x^2 + 4x < 0$.

- 2 Rozwiąż nierówność $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \leq 0$.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

3 Równania dwukwadratowe

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Podstaw $t = x^2$ z warunkiem $t \geq 0$: $at^2 + bt + c = 0$. Każde $t > 0$ daje dwa rozwiązania $x = \pm\sqrt{t}$, $t = 0$ daje jedno ($x = 0$), $t < 0$ nie daje żadnego.

Przykład 3.1

Podstawienie

Rozwiąż równanie $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.

- 1 $t = x^2 \geq 0$: $t^2 - 7t - 18 = 0$, $(t - 9)(t + 2) = 0$.
- 2 $t = 9$ daje $x = \pm 3$; $t = -2 < 0$ odrzucamy.

Wynik: $x \in \{-3, 3\}$.

- 1 Rozwiąż nierówność $x^4 - 10x^2 + 9 < 0$.

podstawowe średnie trudniejsze

4 Liczba rozwiązań z parametrem

Przykład 4.1

Cztery rozwiązania

Dla jakich m równanie $x^4 - 4x^2 + m = 0$ ma cztery różne rozwiązania?

- 1 $t = x^2$: $t^2 - 4t + m = 0$ musi mieć dwa różne dodatnie pierwiastki.
- 2 $\Delta = 16 - 4m > 0$, czyli $m < 4$.
- 3 Oba dodatnie: $t_1 + t_2 = 4 > 0$ i $t_1 t_2 = m > 0$.

Wynik: $m \in (0, 4)$. Dla $m = 0$ jest $t = 0$ i $t = 4$: trzy rozwiązania $(0, \pm 2)$.

- 1 Dla jakich m równanie $x^4 - 2x^2 + m - 3 = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania?

podstawowe średnie trudniejsze

5 Trening rachunkowy

Próbka treningu rachunkowego. Pełny trening ma 25 przykładów i zadań, z odpowiedziami i w wersji do druku.

POZIOM A · POSTAĆ ILOCZYNOWA

1 Rozwiąż nierówność.



a) $(x - 1)(x + 2)(x - 4) < 0$ b) $(x + 1)^2(x - 3) \leq 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM B · NAJPIERW ROZKŁAD

 ZESTAWY B

1 Rozłóż i rozwiąż.



a) $x^3 - 4x \geq 0$ b) $x^3 - 7x + 6 \leq 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

POZIOM C · DWUKWADRATOWE

 ZESTAWY C

1 Rozwiąż.



a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

2 Podaj liczbę rozwiązań równania $x^4 - 6x^2 + m = 0$ dla podanego m .



a) $m = 5$

... pozostałe przykłady na stronie treningu

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ trudniejsze

Pełny trening (25 przykładów i zadań) →

6 Na maturze

W arkuszach rozszerzonych z lat 2024–2026 nie było osobnego zadania z nierównością wielomianową. Nierówności tego typu pojawiają się jako etap: w zadaniu z wartością

bezwzględna z maja 2026 jedna z dróg prowadziła przez nierówność stopnia czwartego z pierwiastkiem podwójnym, a sprawozdanie CKE odnotowuje, że często pomijano warunek $x \neq 3$. W informatorze nierówności wielomianowe od parametru są fragmentem zadania za 6 punktów. Poniższe zadania są nasze; ćwiczą to samo narzędzie w osobnych zadaniach.

ZADANIA W STYLU MATURALNYM

4 zadania · 12 pkt · ok. 30 min

- 1 (0–3 pkt) Rozwiąż nierówność $x^3 + x^2 - 8x - 12 \geq 0$.

- 2 (0–2 pkt) Rozwiąż równanie $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$.

- 3 (0–3 pkt) Rozwiąż nierówność $(x^2 - 4)(x^2 - 6x + 9) < 0$.

- 4 (0–4 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0$ ma dokładnie cztery różne rozwiązania.


 podstawowe  średnie  trudniejsze

7 Najczęstsze błędy

× „Przy każdym pierwiastku znak się zmienia.”

Tylko przy pierwiastku nieparzystej krotności. Przy $(x - 2)^2$ znak zostaje.

× „ $(x - 3)^2(x + 1) \geq 0$, więc $x \geq -1$.”

To prawda, ale przy > 0 trzeba wykluczyć $x = 3$, a przy ≤ 0 dołączyć $\{3\}$ do $(-\infty, -1]$.

× „Zaczynam od znaku + z prawej.”

Zaczynasz od znaku współczynnika przy najwyższej potędze. Przy $-x^3 + \dots$ z prawej jest $-$.

× „ $x^2 + 4$ to czynnik z pierwiastkami ± 2 .”

$x^2 + 4 > 0$ zawsze. Nie zmienia znaku i nie daje pierwiastków.

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jaki znak ma $-2x^5 + \dots$ dla bardzo dużych x ?

Ujemny.

- 2 Czy $x = 1$ należy do zbioru rozwiązań $(x - 1)^4(x + 5) > 0$?

Nie: tam wielomian jest równy 0.

- 3 Ile rozwiązań ma $x^4 = 16$?

Dwa: ± 2 .

- 4 Ile rozwiązań daje $t = x^2 = 0$?

Jedno: $x = 0$.

Karta wzorów i co dalej

WĘŻYK

start z prawej: znak a_n

nieparzysta krotność: zmiana; parzysta:
odbicie

$\geq, \leq$: dołącz wszystkie pierwiastki

DWUKWADRATOWE

$$t = x^2 \geq 0$$

$t > 0$: dwa x , $t = 0$: jedno, $t < 0$: żadne

Broszura CKE „Wybrane wzory matematyczne” nie opisuje metody wężyka ani podstawienia $t = x^2$.

Dalej: równania i nierówności wymierne (lekcja 3.4 Wyrażenia, równania i nierówności wymierne), wartość bezwzględna (3.5 Równania i nierówności z wartością bezwzględną).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Pierwiastki $-1, 0, 4$; współczynnik przy x^3 ujemny.
2. Znaki od prawej: $-, +, -, +$.
3. $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 4)$.
1. Dla $x \neq 1$ kwadrat jest dodatni, więc znak to znak $x + 2$.
2. $x > -2$ i $x \neq 1$: $(-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

Zadania • część 2

1. $x(x + 2)^2 < 0$.
2. Dla $x \neq -2$ znak to znak x : $x < 0, x \neq -2$.
3. $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.
1. $x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 2)(x + 2)$.
2. Znaki od prawej: $+, -, +, -$.
3. $x \in (-\infty, -2] \cup [2, 3]$.

Zadania • część 3

1. $(x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.
2. Znaki od prawej: $+, -, +, -, +$.
3. $x \in (-3, -1) \cup (1, 3)$.

Zadania • część 4

1. $t^2 - 2t + m - 3 = 0, t \geq 0$. Dwa rozwiązania x są wtedy, gdy jest dokładnie jedno $t > 0$ (i nie ma $t = 0$).
2. Podwójny pierwiastek $t = 1$: $\Delta = 4 - 4(m - 3) = 0$, czyli $m = 4$.
3. Albo pierwiastki różnych znaków: $t_1 t_2 = m - 3 < 0$, czyli $m < 3$.
4. $m \in (-\infty, 3) \cup \{4\}$.

Zestawy A

- a) $(-\infty, -2) \cup (1, 4)$ b) $(-\infty, 3]$

Zestawy B

- a) $[-2, 0] \cup [2, +\infty)$ b) $(-\infty, -3] \cup [1, 2]$

Zestawy C

- a) $\pm 2, \pm 3$
- a) 4

Zadania w stylu maturalnym

1. 1. **Pierwiastek.** dzielniki 12; $W(3) = 27 + 9 - 24 - 12 = 0$.
2. **Rozkład.** Horner przez $x - 3$: 1; 4; 4; 0, czyli $W(x) = (x - 3)(x^2 + 4x + 4) = (x - 3)(x + 2)^2$.
3. **Znak.** $(x + 2)^2 \geq 0$; dla $x \neq -2$ znak to znak $x - 3$.
4. **Wynik.** $x \in \{-2\} \cup [3, +\infty)$.

1 pkt za znalezienie pierwiastka **3. 2 pkt** za rozkład $(x - 3)(x + 2)^2$. **3 pkt** za zbiór $\{-2\} \cup [3, +\infty)$.

Uwaga: odpowiedź $[3, +\infty)$ bez -2 to typowa utrata ostatniego punktu.

2. 1. **Podstawienie.** $t = x^2 \geq 0$: $2t^2 - 7t - 4 = 0$, $\Delta = 81$, $t = 4$ albo $t = -\frac{1}{2}$.
2. **Wynik.** $t = 4$: $x = \pm 2$; $t = -\frac{1}{2}$ odrzucamy.
1 pkt za rozwiązanie równania w t . **2 pkt** za $x = \pm 2$ z odrzuceniem $t < 0$.

3. 1. **Rozkład.** $(x - 2)(x + 2)(x - 3)^2$.
2. **Znak.** dla $x \neq 3$ znak to znak $(x - 2)(x + 2)$: ujemny dla $-2 < x < 2$.
3. **Wynik.** $x \in (-2, 2)$ (liczba 3 nie spełnia nierówności ostrej i nie leży w tym przedziale).
1 pkt za rozkład na czynniki liniowe. **2 pkt** za poprawny układ znaków z uwzględnieniem pierwiastka podwójnego. **3 pkt** za zbiór $(-2, 2)$.

4. 1. **Podstawienie.** $t = x^2$: $t^2 - (m + 1)t + m = (t - 1)(t - m) = 0$, czyli $t = 1$ albo $t = m$.
2. **Warunek.** potrzeba dwóch różnych dodatnich t : $m > 0$ i $m \neq 1$.
3. **Wynik.** $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
1 pkt za równanie w t . **2 pkt** za pierwiastki $t = 1$, $t = m$ (albo za warunki $\Delta > 0$, $t_1 t_2 > 0$, $t_1 + t_2 > 0$). **3 pkt** za warunki $m > 0$ i $m \neq 1$. **4 pkt** za odpowiedź.

Matura z matematyki · Lekcja 3.3: Nierówności wielomianowe i równania dwukwadratowe · Na podstawie: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom rozszerzony, od roku szkolnego 2024/2025 (CKE); arkusze, zasady oceniania i sprawozdania CKE z lat 2024–2026. Zadania są autorskie. Wszystkie liczby sprawdzone (tools/verify/mt3_3.py).